FONDO PIZZOFALCONE

28-6-11

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XII

Palchetto C

Num.° d' ordine 6019

NAZIONALE
B. Prov.
2662
NAPOLI

BIBLIOTECA VITT. EM. III

B. Riv
I
2662

Digitized by Google

608893

LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GENERAL, OU LES ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

Par l'Auteur de l'Analyse Démontrée.

A VENISE,
CHEZ FRANÇOIS PITTERI.

MDCCXXXIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE.

PREFACE,

Où l'on donne une Notion Generale des Mathematiques:

On explique la methode qu'on y obſerve, qui conduit toujours à la verité; & l'on fait voir leur uſage pour la perfection de l'eſprit.

Notion generale des Mathematiques.

ON comprend ſous le nom *des Mathematiques* toutes les Sciences qui ont pour objet les rapports des grandeurs.

On appelle *Grandeur* tout ce qui eſt capable du plus & du moins, c'eſt à dire d'augmentation & de diminution, tout ce qui pouvant être comparé à d'autres choſes de même nature peut leur être égal, ou inégal, c'eſt à dire, plus grand ou plus petit, & qu'on peut leur égaler, quand il leur eſt inégal, en le diminuant de ce qu'il a de ſurplus, s'il eſt plus grand; ou en l'au-

gmentant de ce qui lui manque, s'il eſt plus petit.

Ainſi tout ce qui a des parties eſt une grandeur. Par exemple, les trois dimenſions de l'étendue, c'eſt à dire, les Longueurs, les Surfaces, les Soliditez des corps ſont des grandeurs : le Mouvement, la Vîteſſe, le Temps, les Poids, &c. ſont des grandeurs.

Les comparaiſons que l'on peut faire des grandeurs d'une même nature les unes avec les autres, en conſiderant combien de fois l'une contient l'autre, ou quelque partie déterminée de l'autre ; ou en prenant garde de combien l'une ſurpaſſe l'autre ; ces comparaiſons, dis-je, s'appellent *les rapports des grandeurs*. Par exemple, ſi le Soleil contient la Terre un million de fois, le rapport du Soleil à la Terre eſt celui d'un million à l'unité.

Dans les Mathematiques on ne conſidere pas ordinairement les grandeurs en elles-mêmes ; on ſçait évidemment qu'elles ſont compoſées d'une infinité de parties qu'on ne ſçauroit épuiſer. On cherche à découvrir les rapports des unes aux autres. Par exemple, dans la Geometrie on ne s'arrête pas à examiner le nombre infini des petites parties dans leſquelles une figure peut être diviſée ; on y cherche les rapports des lignes qu'on peut concevoir dans cette figure, les rapports qu'ont entr'elles & avec la figure entiere les differentes parties dont elle eſt compoſée ; enfin les rapports tant des parties de la figure que de la figure même avec les autres figures & grandeurs auxquelles elle peut être comparée.

On peut conſiderer les rapports des grandeurs

ou dans les grandeurs particulieres & ſenſibles dans leſquelles ils ſe trouvent, ou en general en regardant ces rapports ſans faire attention aux grandeurs particulieres dans leſquelles ſont ces rapports. Par exemple, les rapports qui forment les accords de la Muſique s'expliquent dans cette ſcience par les rapports qui ſont entre les longueurs de deux cordes égales en groſſeur, & qui ſont également tendues ſur un Inſtrument. Si on les pince, ou ſi on les touche avec l'archet ; quand le rapport des longueurs eſt égal, leurs ſons formeront l'*uniſſon* ; ſi le rapport des longueurs eſt celui de 1 à 2, elles feront entendre l'*octave* ; ſi ce rapport eſt comme 2 à 3, on entendra la *quinte* ; ſi ce rapport eſt comme 3 à 4, elles feront entendre la *quarte* ; & ainſi des autres accords. On peut auſſi conſiderer ces rapports détachez, pour ainſi dire, par l'eſprit de toute grandeur particuliere & ſenſible ; c'eſt à dire, ſans penſer à aucune grandeur particuliere. Il eſt évident que ces rapports des grandeurs regardez ainſi en general peuvent être appliquez à toutes les grandeurs particulieres.

Ces deux manieres de conſiderer les rapports des grandeurs font diſtinguer les Mathematiques en deux claſſes. La premiere, contient les Sciences Mathematiques qui ont pour objet les rapports des grandeurs en general, & il y en a trois, *la Geometrie, l'Arithmetique & l'Algebre*. Nous comprenons les deux dernieres ſous le nom de *la Science du Calcul des grandeurs en general* : Elles ſont les Sciences generales des Mathematiques, & elles en contiennent les élemens.

La ſeconde claſſe comprend les Sciences Mathematiques particulieres qui ont pour objet les rapports des grandeurs particulieres & ſenſibles ; & il y en a un grand nombre ; ce qui vient non ſeulement du nombre des grandeurs ſenſibles, mais encore de ce qu'une même grandeur ſenſible (comme le mouvement, les rayons viſuels, &c.) peut fournir de la matiere à pluſieurs ſciences. On ne donnera ici qu'une legere idée de quelques-unes des plus utiles & des plus curieuſes.

Dans la *Geometrie pratique* on apprend à meſurer toutes les longueurs, les ſurfaces & les ſoliditez des corps ſenſibles ; c'eſt à dire, à trouver leurs rapports avec leur unité ſenſible qui eſt un pied ou une toiſe ; & à tracer en petit ſur un plan toutes les figures ſenſibles des corps, de façon que toutes les parties de la figure ſur le plan ayent en petit les mêmes rapports qu'ont en grand les parties correſpondantes de la figure terreſtre & ſenſible.

La Mécanique des ſolides enſeigne les rapports que doivent avoir les parties dont les machines les plus néceſſaires & les plus uſitées dans les Arts ſont conſtruites, afin que telle force qu'on voudra, puiſſe, par le moyen de ces machines, égaler ou ſurmonter telle autre force ou telle autre réſiſtance qui pourra ſe préſenter ; c'eſt à dire, elle explique les rapports que doivent avoir les parties des machines pour être propres à augmenter ou à diminuer les degrez d'une force déterminée ſi petite & ſi grande qu'on voudra, ſelon tous les rapports dont on peut avoir beſoin dans l'uſage.

La Mécanique des fluides fait connoître les rapports

qui ſe peuvent trouver dans les differens degrez des forces mouvantes des fluides, dans leur mouvement, dans leur peſanteur, dans la vertu de reſſort des fluides qui en ont, dans la proprieté qu'ont quelques-uns de pouvoir être dilatez & condenſez. Elle explique les rapports des effets qui réſultent des differens degrez de ces forces, lorſque ces fluides agiſſent les uns ſur les autres, ou lorſqu'ils agiſſent ſur les corps ſolides en les pouſſant, en les preſſant, en leur réſiſtant, ou de quelqu'autre maniere que ce puiſſe être. Elle détermine auſſi les rapports des parties dont peuvent être conſtruites les machines utiles & curieuſes qui doivent ſervir pour employer les forces mouvantes des fluides à produire les differens effets dont on peut avoir beſoin.

On voit dans *la Muſique* les rapports qu'ont entr'eux les nombres des tremblemens ou vibrations de l'air faites en même temps, qui font entendre tous les accords & tous les tons de la Muſique; comme auſſi les rapports que doivent avoir les parties dont les Inſtrumens de Muſique ſont compoſez, pour les rendre propres à donner à l'air qui les environne (quand ils ſont pincez, ou touchez, ou frapez, ou quand ils ſont pouſſez par l'air qu'on y ſouffle) les tremblemens ou les vibrations qui font entendre les accords & tous les tons de la Muſique.

Il y a quatre ſciences ſur *les rayons viſuels*; c'eſt à dire, ſur les rayons de la lumiere, qui font appercevoir les objets. L'*Optique* découvre les rapports des parties de l'œil, & les rapports que les rayons viſuels, qui viennent des objets, reçoivent dans les

trois humeurs de l'œil, pour leur faire peindre au fond de l'œil les images claires & diſtinctes des objets ; & elle explique comment les differens rapports de ces images, des rayons viſuels & des yeux font voir toutes les diverſitez des objets, leur grandeur, leur éloignement, leur repos, leur mouvement, &c.

La Dioptrique détermine les rapports qui ſurviennent aux rayons viſuels lorſqu'ils traverſent differens milieux tranſparens, comme l'air, & l'eau, le verre, &c. Elle fait diſtinguer par ces differens rapports les ſept eſpeces de rayons contenus dans un même rayon de lumiere qui font appercevoir les ſept couleurs primitives, le rouge, l'orangé ou couleur d'or, le jaune, le vert, le bleu, le bleu obſcur, & le violet. Elle marque les figures qu'il faut donner aux verres pour rendre à notre vûe tant d'objets perdus par leur trop grand éloignement, ou par leur extrême petiteſſe : ce qui a donné le moyen d'enrichir la Phyſique & l'Aſtronomie de tant de nouvelles découvertes.

La Catoptrique examine les rapports de rayons viſuels réfléchis par des ſurfaces polies comme celles des miroirs, & les rapports des differentes images que font appercevoir ces rayons refléchis ſuivant les differens rapports des differentes ſurfaces polies, ſuivant les rapports des ſituations des objets éclairez dont elles reçoivent les rayons de lumiere & les réfléchiſſent, & ſuivant les rapports des differentes ſituations de l'œil qui reçoit ces rayons réfléchis.

Dans *la Perſpective* on ſuppoſe d'abord qu'on regarde au travers d'une glace tranſparente poſée à un

un certain éloignement de l'œil tous les objets qui ſe préſentent à la vûe, comme un Payſage & tout ce qu'il contient ; & l'on fait remarquer que les rayons viſuels qui ſont réfléchis par tous les points ſenſibles des objets qu'on apperçoit, & qui viennent en peindre les images au fond de l'œil, paſſent chacun par un point de cette glace ou de ce tableau qui eſt diſtingué de tous les autres points du même tableau. On ſuppoſe enſuite que chacun des points du tableau ſoit marqué par la couleur du rayon qui venant d'un point ſenſible de l'objet paſſe par ce point du tableau ; & que tout le tableau ayant la peinture des objets qu'on voyoit au travers, dont les traits ſont exactement ſur les mêmes points du tableau par où paſſoient les rayons des objets ; que le tableau, dis-je, devienne opaque, ſans que celui qui regardoit les objets en ſoit averti ; il s'imaginera voir encore les objets en eux-mêmes. On tire de ces deux ſuppoſitions les regles qu'on doit ſuivre dans la peinture des objets pour y placer tous les traits dans les rapports qui leur conviennent, ſuivant les éloignemens où les objets & l'œil peuvent être du tableau ; afin que celui qui regarde le tableau à une certaine diſtance, s'imagine voir en eux-mêmes les objets dont il ne voit que la peinture.

Dans l'*Aſtronomie* on fait d'abord conſiderer les mouvemens qui paroiſſent dans les Aſtres, & l'on fait diſtinguer les mouvemens qui paroiſſent leur être communs d'avec ceux qui paroiſſent propres & particuliers à chacun des Aſtres. Enſuite on fait imaginer dans le monde, qu'on regarde comme

un globe, les cercles où ſe font les revolutions communes des Aſtres, & les cercles où ſe font leurs révolutions particulieres; on fait auſſi imaginer les lignes qui ſervent d'eſſieux aux cercles des révolutions des aſtres, les points qui ſont les extrêmitez de ces eſſieux, & qui ſont *les poles* de ces cercles; comme auſſi les points où le cercle de la révolution propre du Soleil, qu'on nomme l'*Ecliptique*, coupe le plus grand des cercles des révolutions communes qu'on nomme l'*Equateur*; & de plus les points où les cercles des révolutions propres des planettes coupent l'Ecliptique. On fait imaginer les mêmes cercles, leurs eſſieux, leurs poles, & leurs points d'interſection ſur la Terre, ſur le Soleil & ſur les Planettes qu'on regarde comme des globes. C'eſt par rapport à ces cercles, à ces lignes & à ces points, regardez comme des termes fixes, qu'on diſtingue tous les rapports de tous les aſtres & de tous les points du Ciel, tant comparez les uns aux autres que comparez à la Terre: c'eſt par ces termes regardez comme fixes qu'on diſtingue de même les rapports de toutes les parties du globe terreſtre, compoſé de la Terre & de la Mer, les unes avec les autres, & leurs rapports avec tous les corps celeſtes; & c'eſt de-là que ſe forme *la Geographie*.

Après cela on détermine, par le moyen des obſervations faites dans toute l'exactitude poſſible, avec le ſecours de la Geometrie & du calcul, les rapports qu'ont les corps celeſtes dans leurs mouvemens, dans les temps employez tant dans leurs révolutions entieres que dans toutes les parties de leurs révolutions, dans leurs diſtances, ſoit de la

terre, ſoit les uns des autres; dans leurs groſſeurs; dans les comparaiſons des temps des revolutions des planettes avec leurs diſtances du Soleil qui eſt comme le centre de leurs mouvemens; en un mot, on détermine tous les rapports utiles que peuvent avoir les Aſtres, & qu'on peut découvrir par les obſervations. On forme enfin, ſur ces découvertes, des Regles fixes pour trouver exactement dans tous les momens, ſoit de l'avenir ſoit du paſſé, tous les rapports des ſituations des Aſtres; pour prévoir les momens où ſe trouvant pluſieurs enſemble dans une même ligne avec la terre, les plus proches feront éclipſer les plus éloignez, ou bien l'ombre de la terre fera éclipſer la Lune, & pour retrouver dans le paſſé les momens fixes de ces éclipſes.

C'eſt ſur ces Regles certaines que l'Egliſe a reformé le *Calendrier*, & l'a réduit à l'exactitude requiſe, afin que ſes Fêtes Mobiles ſe retrouvaſſent aux temps précis des mêmes Saiſons où l'Egliſe les fixa dès ſon commencement, dont elles s'étoient écartées dans la longue ſuite des temps, par les petits défauts des premieres ſupputations.

C'eſt à ces Regles que *la Chronologie* doit ce qu'elle a de plus aſſuré pour regler dans la ſuite des temps depuis le commencement du monde, & depuis les *Epoques* les plus remarquables, les places de tous les évenemens de l'Hiſtoire; afin d'ôter la confuſion des faits par la diſtinction exacte des temps où ils ſont arrivez; & pour réduire à l'uniformité les differentes manieres de compter les années qui ont été en uſage dans tous les âges du monde, & parmi toutes les differentes Nations.

On doit à ces mêmes Regles, en y joignant celles de la Perſpective, *la conſtruction des Globes Celeſtes, des Planiſpheres du Ciel, des Aſtrolabes* (qui ſont des aſtronomies, pour ainſi dire, parlantes aux yeux) dans l'exactitude, & dans la perfection où ils ſont à preſent.

C'eſt encore des principes de l'Aſtronomie que *la Gnomonique, ou l'Art de décrire les Cadrans*, a tiré les methodes de tracer ſur une ſurface plane ou courbe, avec le ſecours de la Geometrie, les lignes qui ſont les interſections où cette ſurface eſt coupée par les cercles que le Soleil paroît décrire, par ceux qui partageant ſa revolution journaliere en vingt quatre parties égales, la diſtinguent en heures; enfin par ceux qui peuvent avoir tel rapport qu'on voudra avec tous les points où ſe trouve le Soleil pendant une année, qui eſt le temps du mouvement propre qu'il nous paroît avoir: De maniere que ces lignes ont de tels rapports entr'elles, & avec tous les points du Ciel par où paſſe le Soleil, que le mouvement de l'ombre de la pointe d'un ſtile, poſé comme il le doit être ſur cette ſurface, fait diſtinguer l'heure qu'il eſt tant à l'endroit où l'on eſt, que par toute la terre, la ſaiſon où l'on eſt, le jour de l'année, le temps qui eſt paſſé depuis le lever du Soleil, ce qui en reſte juſqu'à ſon coucher, &c.

Les découvertes de l'Aſtronomie ont auſſi donné le moyen de faire en tous les endroits de la terre des obſervations exactes des éclipſes de la Lune, du Soleil, & des Satellites de Jupiter qui ſont plus frequentes, dont on s'eſt ſervi pour déterminer

avec exactitude les differens rapports des parties de la ſurface de la Terre & de la Mer; & pour marquer les poſitions juſtes ſur *les Globes terreſtres*, & *ſur les Cartes Geographiques*, tant des parties de la Terre, que des parties de la Mer. Ce qui a déja réduit *la Geographie* à une plus grande exactitude, & ce qui donne lieu d'eſperer qu'on la portera bientôt à la derniere perfection.

La Marine tire de la Bouſſole, c'eſt-à-dire, de l'Eguille aymantée, le fond de ſes pratiques. C'eſt par l'uſage de la Bouſſole qu'elle fait diſcerner à tout moment la route que doit tenir le Vaiſſeau; & en comptant exactement le chemin qu'il décrit ſur cette route, elle fait connoître à tout moment par les ſupputations, ou par les Cartes réduites, le lieu de la Mer où eſt le Vaiſſeau, c'eſt-à-dire, le rapport de ce point à toutes les parties de la Terre & de la Mer. Mais la variation de l'Eguille aymantée, les courans de la Mer, & la diverſité perpetuelle, & ſouvent peu ſenſible de la force du vent, & la dérive du Vaiſſeau, font perdre la certitude de ces pratiques, par les raiſons de douter qu'elles y apportent. La Marine la fait retrouver cette certitude, par le ſecours de l'Aſtronomie. Elle fait employer les obſervations des hauteurs du Soleil, & des autres Aſtres, & celles des éclipſes des Satellites de Jupiter, quand cela eſt poſſible; & l'on s'aſſure par-là de la juſteſſe de la route du Vaiſſeau, ſi les cauſes dont on vient de parler ne l'ont point alterée; ou bien l'on en corrige les défauts, s'il ſe trouve qu'elles y ayent produit des changemens.

Il eſt inutile de faire ici une plus longue énume-

ration des Sciences Mathematiques particulieres; on en peut tous les jours inventer de nouvelles; & il y en a de très-utiles dont la découverte s'eſt faite, pour ainſi dire, de notre temps. Les notions qu'on vient de donner des plus communes, ſuffiſent pour faire appercevoir aux Commençans, que les Sciences Mathematiques generales qui donnent la connoiſſance de tous les rapports qui peuvent ſe trouver entre toutes les grandeurs priſes en general, & qui apprennent les Methodes de developer ces rapports, de les comparer les uns avec les autres de toutes les manieres poſſibles: en un mot, de les déduire les uns des autres; que ces Sciences, dis-je, contiennent, pour ainſi dire, toutes les Sciences Mathematiques particulieres.

Pour diſtinguer ces Sciences generales les unes des autres, & pour donner une notion, on fera remarquer trois manieres d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports.

La premiere, qui eſt le plus à la portée des ſens, & de l'imagination, eſt de les exprimer par les lignes, & par les figures; car il n'y a point de rapport poſſible entre les grandeurs, qui ne puiſſe être exprimé par le rapport des lignes droites, puiſqu'on peut prendre des lignes droites qui ſoient entr'elles en tel rapport qu'on voudra. On peut auſſi imaginer des figures ſoit rectilignes, ſoit courbes, ſoit en partie rectilignes, & en partie courbes, dans leſquelles on peut concevoir des lignes droites terminées par la figure, qui ayent entr'elles tous les rapports poſſibles, & qui puiſſent repreſenter tous les rapports des grandeurs. Enfin on peut compa-

rer les parties des figures, tant les unes avec les autres, qu'avec les figures entieres dont elles ſont les parties, & même les figures entieres les unes avec les autres; on peut, dis-je, les comparer de maniere qu'on y trouve tous les rapports poſſibles; & par conſequent elles peuvent ſervir à repreſenter en general tous les rapports poſſibles des grandeurs.

La ſeconde maniere eſt d'employer les expreſſions des nombres. Pour le faire concevoir clairement, on fera remarquer que nous avons naturellement les idées claires & diſtinctes de l'unité, & de tous les nombres poſſibles compoſez de l'unité: que pour appliquer aux grandeurs particulieres & ſenſibles les idées des nombres, on prend dans chaque eſpece de grandeur une partie déterminée pour l'unité, par exemple, un pied dans les longueurs: un pied quarré dans les ſurfaces, un pied cubique dans les ſolides: une heure dans les temps: une livre dans les poids: un dégré dans les mouvemens, & dans les viteſſes, & ainſi des autres. Cette unité, étant une grandeur, eſt diviſible à l'infini. Qu'on peut comparer toutes les grandeurs de differentes eſpeces chacune à ſon unité, de trois manieres. 1°. Il y en a qui contiennent exactement l'unité pluſieurs fois; & ces rapports des grandeurs à l'unité, ou ſi l'on veut, les grandeurs qui contiennent exactement l'unité pluſieurs fois, s'appellent *les Nombres entiers.* Les differentes Nations ſe ſont ſervis de differents caracteres pour exprimer ces Nombres entiers; mais dans les Mathematiques on ſe ſert *des chiffres* (qu'on a reçu des Arabes) pour les

exprimer. 2°. Il y a des grandeurs qui ne contiennent pas l'unité exactement pluſieurs fois ; mais elles contiennent exactement une certaine partie déterminée de l'unité : par exemple, deux tiers de l'unité, trois quarts de l'unité, &c. Ces rapports des grandeurs aux parties déterminées de l'unité qu'elles contiennent, ou, ſi l'on veut, les grandeurs qui ne contiennent pas exactement l'unité, mais quelque partie de l'unité, ſe nomment ſimplement *rapports*, on les nomme auſſi *fractions* ; on les appelle encore *des nombres rompus*. On les exprime ces rapports, ou ces fractions, par deux nombres poſez l'un ſur l'autre, & ſeparez par une ligne, de cette maniere, $\frac{2}{3}$ (deux tiers), $\frac{3}{4}$ (trois quarts) &c. Le nombre d'enbas marque en combien de parties égales l'unité eſt diviſée ; & celui d'enhaut, combien la fraction contient de ces parties de l'unité. Dans la fraction $\frac{2}{3}$ (deux tiers), 3 marque que l'unité eſt diviſée en trois parties égales, ou en tiers ; & 2 exprime que cette fraction contient deux de ces tiers. 3°. L'unité materielle & diviſible peut être conçûe diviſée en tel nombre de parties égales qu'on voudra, & cela en allant de plus petites en plus petites, ſans aucune fin. En quelque nombre de petites parties égales qu'on puiſſe concevoir l'unité diviſée, il y a des grandeurs qui étant comparées avec l'unité, ne contiennent jamais exactement une de ces parties égales, quelque petites qu'elles ſoient ; mais elles contiennent toujours, outres ces petites parties égales, un petit reſte ; & quelque ſuppoſition que l'on faſſe, que ces petites parties de l'unité ſoient elles-mémes diviſées de plus petites

petites en plus petites ſans fin, il arrivera toujours que ces grandeurs ne contiendront jamais exactement ces plus petites parties égales de l'unité, un certain nombre de fois; mais il y aura toujours un petit reſte moindre que l'une de ces parties égales. (On le démontrera dans la ſcience du Calcul.) Ces grandeurs n'ont donc aucune meſure commune avec l'unité, & on nomme, à cauſe de cela, leurs rapports avec l'unité, *des rapports incommenſurables*, ou ſi l'on veut, on nomme ces grandeurs, *des grandeurs incommenſurables*: on leur donne des expreſſions propres qu'il ſeroit inutile de marquer ici, où elles cauſeroient de la difficulté aux Commençans. Or ces trois ſortes de rapports des grandeurs avec l'unité, comprennent tous les rapports poſſibles. On peut les concevoir en general, ſans penſer aux grandeurs particulieres & ſenſibles. Ainſi on peut exprimer par leur moyen tous les rapports des grandeurs en general.

La troiſiéme maniere d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports, eſt de marquer les grandeurs & leurs rapports, par les lettres de l'alphabet; ce ſont les caracteres les plus ſimples & les plus familiers. Cette maniere eſt la plus generale de toutes. On peut repreſenter par une lettre tous les nombres entiers, tous les nombres rompus, toutes les grandeurs incommenſurables, en ſuppoſant que notre eſprit peut ſubſtituer ſucceſſivement à la place de cette lettre, tous les nombres entiers & rompus, & toutes les grandeurs incommenſurables. On peut repreſenter de même par des lettres toutes les lignes, & toutes les

figures poſſibles, & tous leurs rapports, en ſuppoſant par notre eſprit toutes ces lignes & leurs rapports, & toutes ces figures avec leurs rapports, ſubſtituées les unes après les autres à la place de ces lettres par leſquelles notre eſprit les apperçoit toutes repreſentées. On peut de même concevoir toutes les grandeurs particulieres & ſenſibles, avec tous leurs rapports, repreſentées par les lettres. Ainſi tout ce que l'on démontre par ces expreſſions litterales, & tout ce qu'elles font découvrir, convient neceſſairement à toutes les grandeurs.

Ces trois manieres d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports, ſont ſeparement l'objet des trois ſciences generales des Mathematiques.

La Geometrie a pour objet les grandeurs en general, & tous leurs rapports, repreſentez par les lignes & par les figures; ou plutôt, quoique la Geometrie ſemble avoir pour objet particulier, les rapports des trois dimenſions du corps, des longueurs, des ſurfaces, & des ſolides; comme ces rapports peuvent auſſi exprimer tous les rapports de toutes les grandeurs particulieres & ſenſibles, la Geometrie eſt une ſcience generale des Mathematiques, qui doit préceder les Mathematiques particulieres & ſenſibles, & elle les contient éminemment.

L'Arithmetique a pour objet les grandeurs en general, & tous leurs rapports repreſentez par les expreſſions des nombres, c'eſt à dire, toutes les grandeurs numeriques.

L'Algebre a pour objet toutes les grandeurs, & tous leurs rapports repreſentez de la maniere la

plus generale qu'on puiſſe concevoir par les lettres de l'alphabet ; ce qui les fera nommer *les grandeurs litterales*.

Ces deux ſciences l'Arithmetique & l'Algebre, ont une liaiſon naturelle ; elles enſeignent à faire des operations ſemblables, l'une ſur les grandeurs numeriques, l'autre ſur les litterales ; elles ſe prêtent des ſecours & des éclairciſſemens reciproques. La grande univerſalité de l'Algebre ſurprend d'abord l'eſprit des Commençans, & le tient comme en ſuſpens. Ils ne ſçavent à quoi ils doivent déterminer ces idées ſi generales des expreſſions de l'Algebre. L'Arithmetique les fixe par les idées immuables des nombres qui ſont familiers à tout le monde. Ils peuvent d'abord ſuppoſer des nombres entiers déterminez à la place des lettres, & enſuite en ſuppoſer d'autres tels qu'ils voudront ; & la verité generale que leur preſente l'expreſſion litterale, ſe trouvera convenir à tous ces nombres. Après cela ils peuvent ſuppoſer des nombres rompus tels qu'il leur plaira, au lieu des lettres de l'expreſſion generale, puis des grandeurs incommenſurables quelles qu'elles puiſſent être ; & voyant toujours que la verité generale de l'expreſſion litterale ſe trouve convenir à toutes ces grandeurs dont le nombre eſt infini ; ils s'éleveront enfin à l'entiere univerſalité des expreſſions litterales, & ils s'accoutumeront à voir toutes les grandeurs poſſibles avec leurs rapports, repreſentées par les expreſſions litterales ; & que les reſolutions que fait découvrir le calcul des grandeurs litterales, ſont generales, & conviennent à toutes les grandeurs

poſſibles. Enfin ces deux Sciences mêlent ſouvent enſemble leurs expreſſions dans les mêmes operations. Ces raiſons ont porté à ne faire qu'une même Science generale de ces deux là, à laquelle on donne le nom de *La ſcience du Calcul des grandeurs en general*. On y explique à fond l'une & l'autre; on a tâché de n'y oublier aucun des principes, ni aucune des operations de l'une & de l'autre. C'eſt par cette Science qu'on doit commencer à apprendre les Mathematiques. Elle en contient les Elemens, ou plutôt elle les comprend toutes par ſon univerſalité, & elle donne la Methode la plus ſimple, la plus facile, la plus sûre, & qui eſt la plus proportionnée à l'étendue bornée de l'eſprit, pour les apprendre avec plaiſir, comme ſi on les découvroit ſoi-même. En voici une notion en peu de mots.

On donne dans cette Science des expreſſions, par le moyen des chiffres, & par le moyen des lettres, aux grandeurs conſiderées en general, & à tous les rapports qu'elles peuvent avoir entr'elles. On en donne aux grandeurs entieres, aux grandeurs rompues, & aux grandeurs incommenſurables, qui les diſtinguent les unes des autres. Cependant l'univerſalité des expreſſions litterales eſt cauſe que les expreſſions litterales des grandeurs entieres, & toutes les operations faites ſur ces expreſſions, conviennent auſſi aux grandeurs rompues, & aux grandeurs incommenſurables; mais les differens degrez de compoſition des rapports des grandeurs, & les differentes comparaiſons qu'il faut faire des uns avec les autres, obligent auſſi de donner des expreſſions propres aux grandeurs rompues, & aux gran-

deurs incommenſurables. On enſeigne enſuite à faire ſur ces trois ſortes d'expreſſions, toutes les operations qu'on nomme addition, ſouſtraction, multiplication, diviſion, formation des puiſſances, extraction des racines, &c. Ces operations ſe nomment auſſi du nom commun de *Calcul* des grandeurs. Les regles de ce Calcul ſont ſi sûres, ſi juſtes, & ſi lumineuſes, que pourvû qu'on obſerve l'ordre & la juſteſſe qu'elles preſcrivent, en quelque quantité que puiſſent être les grandeurs ſur leſquelles on opere, & quelque compoſition qu'il y ait dans leurs rapports, on voit clair dans tout le chemin que l'on ſuit; on eſt aſſuré qu'on ne s'écarte point, & qu'on arrive à la fin avec une entiere certitude. Le Calcul litteral a cependant ce grand avantage ſur le Calcul numerique, qui eſt plus ſimple, plus facile, plus court, plus general, qu'il demande bien moins de temps, qu'il ménage tout autrement la capacité de notre eſprit, & qu'il augmente, pour ainſi dire, à l'infini l'étenduë de ſa vuë qui eſt ſi bornée, en lui prétentant ſous l'expreſſion la plus ſimple qu'on puiſſe imaginer une infinité d'objets. Mais ce qu'il faut principalement remarquer pour appercevoir le grand uſage du calcul des grandeurs en general par rapport aux découvertes des Mathematiques, c'eſt qu'il conſiſte en des ſignes arbitraires ordonnez par la Science du calcul à marquer tous les raiſonnemens dans l'ordre & dans la ſuite naturelle qu'ils doivent avoir entr'eux; à marquer, dis-je, tous les raiſonnemens clairs, diſtincts & ſuivis que doit faire notre eſprit, pour déduire des grandeurs connues & de leurs rapports connus, en quelque

quantité qu'ils puiſſent être, & de quelque degré de compoſition qu'ils ſoient, tous les rapports qui peuvent s'en déduire neceſſairement. Cela fait voir que celui qui employe le calcul fait par-là tous les raiſonnemens naturels, exacts & dans l'ordre qu'ils doivent avoir, qu'on doit faire pour déduire des grandeurs & des rapports de ces grandeurs qui lui ſont connus, les rapports qui s'en peuvent déduire neceſſairement. C'eſt ce qui a fait faire tant de progrès aux Mathematiques depuis qu'on y a employé le calcul: c'eſt ce qui y a fait faire tant de découvertes ſi utiles; c'eſt ce qui les a rendues ſi faciles, & ce qui en a ôté ce qu'elles avoient de rebutant, en les faiſant apprendre avec le plaiſir de les découvrir ſoi-même, à ceux qui ſe ſont rendu le calcul familier, & qui en ont acquis l'habitude. Car c'eſt par les expreſſions litterales que fournit le calcul qu'on ſaiſit un Problême ou une queſtion ſur toutes ſortes de grandeurs generales & particulieres, & ſur leurs rapports, avec toutes les conditions qui y entrent & qui la déterminent. Et enſuite ſans partager la capacité de l'eſprit par la vûe de la quantité des objets, & de la compoſition des rapports qui entrent dans la queſtion, par la conſideration de toutes les lignes ou de toutes les figures, ſouvent en grand nombre, qui peuvent entrer en la queſtion, dont l'impreſſion ſenſible occuperoit toute l'étendue de l'eſprit, ou la plus grande partie, & feroit trouver la queſtion embaraſſée & rebutante, quelqu'utilité qu'il y apperçût; ſans, dis-je, toutes ces conſiderations fatigantes que cette methode rend inutiles, il ſuffit

de ne faire attention qu'au calcul, qui étant familier, laiſſe à l'eſprit toute ſon étendue ; & l'appliquant, ce calcul, à l'expreſſion de la queſtion, la plume ſeule conduit directement à la réſolution ; & ſi la queſtion a pluſieurs réſolutions, elles viennent toutes ſe préſenter. L'expreſſion litterale de la réſolution d'une queſtion qu'on a découverte devient elle-même une Regle generale qui donne la réſolution de toutes les queſtions ſemblables ſur toutes ſortes de grandeurs. Les réſolutions litterales portent encore avec elles leur demonſtration, ſans qu'il en faille d'autres, qui ne ſerviroient qu'à faire voir évidemment par des raiſonnemens ſuivis qu'on y eſt arrivé, & les raiſonnemens exprimez par le calcul ſont eux-mêmes très certains & très évidens par les démonſtrations des Regles du calcul qu'enſeigne la Science du calcul. Ces réſolutions & l'expreſſion de la queſtion contiennent auſſi tous les Corollaires qui en peuvent dépendre. On les en tire par le calcul, & l'on a le plaiſir de voir que chaque trait de plume produit des découvertes. Il arrive même ſouvent qu'une ſeule expreſſion litterale qui n'eſt compoſée que de peu de lettres qui ne feroient pas une ligne, contient une ſcience entiere dont on a le plaiſir de développer par le ſeul calcul toutes les parties les unes après les autres. Enfin l'univerſalité de cette Science a une ſi grande étendue, & l'art qu'elle donne de préſenter à l'eſprit une infinité d'objets differens ſous une ſimple expreſſion abregée, va ſi loin qu'il fait réduire, en pluſieurs occaſions, à une ſeule expreſſion litterale très ſimple, un nombre infini d'autres expreſſions

litterales, dont chacune eſt elle-même une Regle generale pour des réſolutions de Problêmes; & toutes ces expreſſions ſe tirent par le ſeul calcul de celle qui les repréſente toutes. On en verra des exemples dans le ſecond Volume de la Science du calcul.

On explique & on démontre dans ce premier Volume tous les calculs des grandeurs entieres tant litterales que numeriques, des grandeurs rompues, & des grandeurs incommenſurables, qu'il faut ſçavoir pour apprendre ou pour découvrir ſoi-même les Mathematiques. On y explique auſſi tout ce qu'il faut ſçavoir des rapports ſimples & des rapports compoſez, & de toutes les differentes comparaiſons qu'on peut faire des uns & des autres. Ce ſont là les ſeuls principes ou les ſeules connoiſſances que ſuppoſe l'*Analyſe démontrée*. Les Commençans pourront l'entendre ſans y trouver aucune difficulté qui les arrête. Ils y verront que les calculs qu'ils auront appris dans ce premier Volume ſont la clef qui ouvre l'entrée à toutes les découvertes.

Explication de la Methode qu'on obſerve dans les Mathematiques qui conduit toujours à la verité.

Les Mathematiques ſe ſont toujours diſtinguées par leur certitude: Elles ne contiennent que des veritez ſans aucun mélange d'opinion ni d'erreur. C'eſt une prérogative qui leur eſt propre de l'aveu de tout le monde, & elle ne leur a jamais été conteſtée. Cette certitude leur vient de deux cauſes.

La

La premiere eſt qu'elles ne s'appliquent qu'à des objets dont on a des idées claires & diſtinctes ; car il n'y a pas d'objets dont on ait des idées plus claires & plus diſtinctes que celles que nous avons des nombres, des trois dimenſions de l'étendue, & de toutes les grandeurs dont on cherche à connoître les rapports dans les Mathematiques, & l'on peut toujours voir clair dans les déductions que l'on peut faire de ces rapports les uns des autres. La ſeconde cauſe de la certitude des Mathematiques eſt que l'on y ſuit toujours, ſans jamais s'écarter, une methode qui conduit infailliblement à la verité.

Pour faire clairement concevoir cette methode aux Commençans, & pour faire voir qu'elle conduit avec une entiere certitude à la verité les démarches de l'eſprit qui la ſuit, on leur fera faire attention aux démarches que fait notre eſprit dans la recherche de la verité.

Quand notre eſprit cherche à découvrir quelque verité, il s'applique aux objets qui en ſont le ſujet, il les conſidere avec attention chacun en particulier ; & plus il s'applique, & plus ſon attention eſt forte ; plus auſſi ces objets s'approchent, plus ils lui paroiſſent clairs ; il en voit clairement toutes les faces ; il diſtingue l'une après l'autre toutes les choſes que ces objets renferment, & rien ne lui en échape.

Ces premieres démarches de l'eſprit dans la recherche de la verité, s'appellent de *ſimples perceptions*, ou de *pures perceptions*.

Après avoir apperçu clairement & diſtinctement les objets, il faut donner, pour ainſi dire, à chacun

ſa marque qui le diſtingue de tous les autres, & qui ſoit tellement liée à cet objet clairement apperçu, que quand cette marque ſe préſente, cet objet ſe préſente en même temps à notre eſprit ſous une vûe claire & diſtincte. Ces marques ſont d'elles-mêmes des ſignes arbitraires, mais elles deviennent des ſignes propres aux objets, & elles ſervent à les préſenter à l'eſprit par l'union qu'on en a faite à ces objets, & par l'habitude qu'on a acquiſe de les unir enſemble. Les paroles dont on ſe ſert pour déterminer un mot ou une autre marque à ſignifier un objet dont on a une idée claire & diſtincte, s'appelle *une définition*: en voici une: *Un nombre entier eſt celui qui contient exactement l'unité pluſieurs fois*.

2°. Notre eſprit après avoir conſideré attentivement les objets ſur leſquels il veut découvrir des veritez, il les compare les uns avec les autres, il en apperçoit par ſon attention les rapports; c'eſt à dire il voit clairement s'ils ſont égaux les uns aux autres, s'ils ſont inégaux; ſi les uns contiennent ou ne contiennent pas les autres, &c. Ce ſont ces rapports clairement apperçus entre les objets préſens à l'eſprit & comparez enſemble, qu'on appelle *des veritez*. Car puiſque ces rapports ſont clairement apperçus par l'eſprit, ils ſont tels qu'ils ſont apperçus, puiſque le neant ne ſçauroit être apperçu. Les veritez ſont les rapports réels entre les objets. L'erreur ou la fauſſeté n'eſt rien. La verité peut bien être apperçue, car elle eſt, c'eſt un rapport réel; mais l'erreur ou la fauſſeté ne ſçauroit être apperçue, car elle n'a aucune réalité, elle n'eſt rien, & le neant ne ſçauroit être apperçu; appercevoir

rien, & ne point appercevoir, c'eſt la même choſe.

Quand notre eſprit acquieſce aux rapports qu'il apperçoit ou qu'il s'imagine appercevoir, en jugeant que ces rapports ſont tels qu'il les apperçoit; cet acquieſcement de notre eſprit s'appelle *un Jugement*; par exemple, notre eſprit apperçoit le rapport d'égalité qui eſt entre 2 fois 2 & 4; il acquieſce à ce rapport, & il juge que ce rapport eſt vrai, en affirmant que 2 fois 2 ſont 4. Ces Jugemens ou ces acquieſcemens de notre eſprit aux rapports qu'il apperçoit, ſont les ſecondes démarches que fait notre eſprit dans la recherche de la verité.

Il eſt bon de faire diſtinguer deux choſes dans les ſecondes démarches de notre eſprit: la premiere eſt la perception des rapports ſans acquieſcer encore à ces rapports, ſans juger qu'ils ſont vrais. Cette perception doit préceder les jugemens, & elle eſt une pure perception; la ſeconde choſe eſt l'acquieſcement à ces rapports. C'eſt dans l'acquieſcement aux rapports que conſiſte, à proprement parler, le jugement ou la ſeconde démarche de notre eſprit dans la recherche de la verité. Cette remarque fera diſtinguer la verité de l'erreur. Car ce qu'on apperçoit clairement, étant neceſſairément & réellement tel qu'il eſt apperçu, il ne peut y avoir d'erreur dans les pures perceptions; on ne ſçauroit appercevoir que la verité, que ce qui eſt tel qu'il eſt apperçu. On ne ſçauroit donc ſe tromper, c'eſt à dire on ne ſçauroit tomber dans l'erreur, quand on n'acquieſce qu'à ce qu'on apperçoit clairement. L'erreur ne peut donc venir que de ce qu'on juge qu'on apperçoit, ce qu'on n'apperçoit

point; de ce que le jugement ſur un rapport précede la perception de ce rapport. Par exemple, ſi l'on juge qu'il y a un rapport d'égalité entre 2 fois 2 & 5, on tombe dans l'erreur, parceque ce jugement prévient la perception de l'eſprit; l'eſprit n'apperçoit point un rapport d'égalité entre 2 fois 2 & 5. Si donc on ne jugeoit d'un rapport qu'après l'avoir clairement apperçu, on ne ſe tromperoit point; & l'erreur ne vient que de ce qu'on juge d'un rapport qu'on n'a pas auparavant apperçu. C'eſt donc nous qui faiſons l'erreur en jugeant de nous-mêmes qu'il y a de certains rapports que notre eſprit n'a pas apperçu avant de porter notre jugement. Mais nous ne faiſons pas la verité, nous ne faiſons que l'appercevoir, & la découvrir telle qu'elle eſt en elle-même.

Les paroles dont on ſe ſert pour exprimer chacun de nos jugemens, s'appellent *une Propoſition*. En voici une. 12 *contient* 3 *pris quatre fois*.

3°. Après que notre eſprit a comparé les objets de ſes perceptions les uns avec les autres, qu'il en a apperçu les rapports, & qu'il en a porté ſon jugement; pour avancer dans la recherche de la verité, il compare ces rapports mêmes les uns avec les autres, & en s'appliquant avec attention à ces comparaiſons des rapports, il apperçoit clairement les liaiſons qu'ils ont entr'eux: il voit que les uns ſe déduiſent neceſſairement des autres; & en ſuivant la perception qu'il en a, il déduit les rapports les uns des autres. Cette troiſiéme démarche de l'eſprit, par laquelle il déduit une verité d'une ou de pluſieurs autres dont il apperçoit qu'elle doit ſuivre

neceſſairement, s'appelle *un raiſonnement*; en voici un. 3 pris quatre fois eſt égal à 12; 6 pris deux fois eſt auſſi égal à 12. Par conſequent 6 pris deux fois eſt égal à 3 pris quatre fois. La déduction que fait notre eſprit de la troiſiéme verité des deux autres dont elle eſt une ſuite neceſſaire, eſt un raiſonnement.

On doit faire diſtinguer dans cette troiſiéme démarche de l'eſprit, comme on a fait dans la ſeconde, la pure perception de la ſuite neceſſaire qui ſe trouve entre un rapport & d'autres rapports dont il ſe déduit, d'avec la déduction que fait notre eſprit de ce rapport en le tirant des autres, & en acquieſçant à cette déduction. Car notre eſprit ne ſçauroit ſe tromper en appercevant clairement les liaiſons qui ſont entre les rapports, & qu'on peut les déduire les uns des autres; puiſque ſi cette liaiſon neceſſaire eſt apperçue clairement, elle eſt telle qu'elle eſt apperçue, elle eſt vraye; le neant ne ſçauroit être apperçu. On ne tombe donc dans l'erreur en *faiſant des raiſonnemens* dans la recherche de la verité, que lorſque l'on déduit un rapport d'autres rapports avant d'avoir vû clairement que cette déduction eſt neceſſaire. L'action de l'eſprit, par laquelle il fait cette déduction, & y acquieſce ſans l'avoir apperçue clairement, eſt la cauſe de l'erreur, qui conſiſte en ce qu'il croit qu'un certain rapport eſt une ſuite neceſſaire d'autres rapports; & cependant dans la verité cette ſuite n'eſt point, & elle ne ſçauroit être apperçue.

Pour rendre ſenſibles aux Commençans ces trois démarches de notre eſprit dans la recherche de la

verité, on en va faire voir l'application à un exemple ſur le mouvement des corps. On ſuppoſera qu'on veut découvrir comment on peut faire que deux boules ſur un plan horizontal poli en allant en ligne droite l'une contre l'autre, ſe rencontrent avec des forces égales, ou avec des forces qui ſoient en tel rapport qu'on voudra.

1°. Notre eſprit doit conſiderer avec attention l'idée des deux corps, en quoi conſiſte leur mouvement lorſqu'ils vont l'un contre l'autre; qu'eſt-ce qui fait la quantité de leur mouvement; comment un mouvement peut augmenter ou diminuer, être plus fort ou plus foible. Les connoiſſances de toutes ces choſes conduiront à la reſolution de la queſtion.

On voit d'abord que chaque boule eſt un corps compoſé de parties de même nature, qu'on nomme à cauſe de cela *homogenes*; & l'aſſemblage ou le nombre de ces parties qui ſe meuvent toutes enſemble, ſe nomme *la maſſe* du corps.

Pendant qu'un corps ne change point de place, & qu'il conſerve les mêmes rapports de proximité & de diſtance avec les corps qui l'environnent, l'eſprit n'y voit aucun mouvement: Mais s'il change ſans ceſſe de place, s'il change ſucceſſivement les rapports de diſtance qu'il a avec les corps qui l'environnent, en un mot s'il eſt tranſporté d'un lieu en un autre en paſſant ſucceſſivement par les milieux qui ſont entre deux, l'eſprit voit clairement que ce corps eſt en mouvement. Ainſi dans un corps en mouvement notre eſprit n'y apperçoit que du tranſport, en ne faiſant attention qu'à ce qui eſt dans un

corps en mouvement, & point du tout à la force exterieure qui lui donne le mouvement, dont la conſideration ſeroit ici inutile. Notre eſprit n'attache donc pas d'autre idée au terme de mouvement d'un corps, que l'idée de tranſport de ce corps.

L'eſprit apperçoit encore clairement, que ſi un corps qui a parcouru une certaine longueur, comme dix toiſes en un certain temps comme deux minutes, venoit à parcourir une double longueur, comme 20 toiſes dans le même temps de deux minutes, il auroit dans le ſecond cas le double du tranſport ou du mouvement qu'il avoit dans le premier cas. Ou bien encore, ſi le même corps avoit parcouru 10 toiſes dans le temps de deux minutes, & qu'il vint à parcourir ces 10 toiſes dans la moitié du temps, c'eſt à dire en une minute, l'eſprit voit clairement qu'il auroit dans le ſecond cas, le double du tranſport ou du mouvement qu'il avoit dans le premier cas.

La longueur du chemin que parcourt un corps par ſon mouvement ou par ſon tranſport, comparée au temps pendant lequel cette longueur eſt parcourue, eſt ce qu'on nomme *la viteſſe*. Par exemple, ſi deux corps égaux ſe meuvent, & que l'un parcoure une plus grande longueur que l'autre en un même temps, il a plus de viteſſe que l'autre. Comme encore ſi deux corps égaux parcourent la même longueur ou des longueurs égales, & que le temps que le premier employe à parcourir cette longueur, ſoit plus petit que le temps que le ſecond employe à parcourir la même longueur, le premier a plus de viteſſe que le ſecond.

Notre eſprit apperçoit donc clairement qu'il y a plus de tranſport, ou plus de mouvement dans un corps, lorſqu'il y a une plus grande longueur parcourue dans le même temps, ou bien lorſque la même longueur eſt parcourue en moins de temps; & que dans ces cas la viteſſe du mouvement eſt plus grande.

Notre eſprit voit encore clairement qu'en concevant la maſſe d'un corps qui ſe meut, partagée en une infinité de petites parties égales, chacune de ces parties égales a ſon tranſport ou ſon mouvement propre. Et comme on ſuppoſe que le corps ſe meut en ligne droite, le tranſport ou le mouvement de l'une des parties eſt égal au mouvement de chaque autre partie égale, & la viteſſe du tranſport d'une partie eſt égale à la viteſſe du tranſport de chaque autre partie. Ainſi on voit évidemment que plus il y a de parties dans un corps qui ſe meut en ligne droite, & plus il y a de mouvement.

2°. Après ces perceptions, notre eſprit porte ces jugemens: Puiſque le mouvement n'eſt que le tranſport d'un corps; plus il y a de tranſport, plus il y a de mouvement.

Plus il y a de viteſſe dans le tranſport d'un corps qui ſe meut, & plus ſon mouvement eſt grand.

Quand un corps ſe meut en ligne droite, la viteſſe du tranſport de chacune des petites parties étant égale, la quantité totale du mouvement eſt la viteſſe de chaque petite partie, repetée autant de fois, ou priſe autant de fois que la maſſe contient de fois chaque partie; c'eſt ce qu'on nomme la viteſſe multipliée par la maſſe.

La

La force d'un corps en mouvement n'eſt que la quantité de ſon mouvement, & ſuivant le jugement précedent, c'eſt la viteſſe de ſon tranſport multipliée par ſa maſſe.

3°. Après ces ſecondes démarches, notre eſprit n'a plus que cette troiſiéme à faire pour reſoudre la queſtion. Pour faire mouvoir deux corps l'un contre l'autre avec des forces égales, il n'y a qu'à donner à chacun une égale quantité de mouvement. Mais pour leur donner cette égale quantité de mouvement, il faut donner à chacun une viteſſe qui ſoit telle, que la viteſſe du premier corps étant multipliée par la maſſe du premier corps, le produit qui en viendra ſoit égal à celui qui naîtra de la viteſſe du ſecond multipliée par la maſſe du ſecond. D'où l'on conclut qu'il n'y a qu'à donner aux deux boules des viteſſes telles, que la viteſſe de chacune étant multipliée par ſa maſſe, il en reſulte un produit égal; & les boules ſe rencontreront avec des forces égales.

Après cela il n'y a plus qu'à déterminer le rapport des maſſes des boules pour déterminer les viteſſes. Si, par exemple, elles ſont égales, il faut donner à chacune une égale viteſſe. Si l'une eſt double de l'autre, ou triple, ou quadruple, &c. il faut donner à la plus petite une viteſſe double, ou triple, ou quadruple, &c. de la viteſſe qu'on donnera à la plus grande.

Si l'on veut que les forces des deux boules qui ſe meuvent l'une contre l'autre ſoient en tel rapport qu'on voudra, par exemple, que l'une ſoit double, ou triple ou quadruple, &c. de l'autre, &

que les boules ſoient égales, il faut donner une viteſſe double, triple, &c. à celle qui doit avoir une force double, triple, &c.

Si les boules ſont inégales, il faut regler la viteſſe qu'on leur doit donner par rapport à leur maſſe, & par rapport au degré de force qu'on veut donner à chacune des boules: par exemple, ſi l'on veut qu'une boule, qui n'eſt que la moitié d'une autre, vienne rencontrer cette autre (qui a un degré de viteſſe) avec une force double, il faut lui donner quatre degrez de viteſſe.

Les trois démarches de notre eſprit que l'on a expliquées, & qu'on vient de rendre ſenſibles par un exemple, ſuffiſent pour découvrir les veritez qui ne ſont pas fort compoſées. Mais quand on veut s'appliquer à la recherche d'un grand nombre de veritez qui dépendent les unes des autres, par exemple, à la recherche des veritez que renferme une ſcience entiere comme celle du mouvement, ou comme la Geometrie, &c. Il y a un ſi grand nombre d'objets auſquels il faut s'appliquer avec attention pour les appercevoir clairement; il y a tant de veritez à découvrir, & tant de raiſonnemens à faire pour les déduire les unes des autres, qu'il eſt neceſſaire d'obſerver un certain ordre dans toute la ſuite des démarches de notre eſprit qui les conduiſe toujours ſurement à la verité. Cet ordre s'appelle *Methode*, & il y en a de deux ſortes.

L'une ſe nomme *la Methode ſynthetique ou de compoſition*. Cette Methode preſcrit de commencer par les veritez les plus ſimples; d'en déduire les veritez qui ne dépendent que des premieres, & qui ont

avec elles une liaiſon neceſſaire; de déduire de ces ſecondes veritez celles qui ne dépendent que des premieres & des ſecondes, & qu'on peut nommer les troiſiémes veritez; enfin d'avancer ainſi par ordre des veritez plus ſimples à celles qui les ſuivent immédiatement. Cette Methode eſt propre pour enſeigner une ſcience entiere.

L'autre Methode s'appelle *Methode analytique ou de reſolution*. Elle ſert ſur tout pour la reſolution des queſtions particulieres. Voici ce qu'elle preſcrit. Quand on veut reſoudre une queſtion; après l'avoir bien conçue, il faut ſuppoſer qu'elle eſt reſolue, c'eſt à dire, il faut ſuppoſer que ce qui eſt en queſtion eſt vrai, ou même quelquefois on peut ſuppoſer qu'il eſt faux. Il faut déduire de cette ſuppoſition les conſequences qui s'en peuvent déduire; de ces premieres conſequences en déduire de ſecondes; des troiſiémes de ces ſecondes; & continuer ainſi de raiſonner juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à quelque propoſition dont la verité eſt évidente, ou qui eſt évidemment fauſſe. Dans le premier cas, ce qui étoit en queſtion qu'on a ſuppoſé vrai, l'eſt effectivement, puiſqu'il conduit neceſſairement à une verité évidente, d'où l'on peut retourner par la Methode ſynthetique à ce qu'on a ſuppoſé être véritable. Si l'on avoit ſuppoſé que ce qui étoit en queſtion fût faux, & que cela eût conduit à une propoſition évidente, il eſt clair que ce qui auroit été ſuppoſé faux, le ſeroit effectivement, & qu'on pourroit démontrer par la Methode ſyntetique en retournant de la propoſition évidente où on étoit venu, à celle qui étoit en queſtion, que ce que l'on

avoit ſuppoſé faux, ſeroit tel qu'on l'avoit ſuppoſé. Dans le ſecond cas, où l'on arriveroit par des conſequences toujours évidentes à une propoſition évidemment fauſſe, il eſt viſible que ce que l'on avoit ſuppoſé être vrai, ſe trouve faux.

La connoiſſance qu'on vient de donner des démarches que fait notre eſprit dans la recherche de toutes les veritez, tant les plus ſimples que les plus compoſées, ſervira à faire comprendre aux Commençans les Regles de la Methode que l'on obſerve exactement dans les Mathematiques, & à leur faire voir clairement que ces Regles conduiſent les démarches de l'eſprit infailliblement à la verité.

Regles ſur les perceptions. 1. On ne doit former aucun jugement, ni aucun raiſonnement ſur les objets de ſes applications, que l'on n'ait auparavant des perceptions claires & diſtinctes de ces objets, des rapports de ces objets, & des déductions par leſquelles on les tire les uns des autres, c'eſt à dire, des ſuites & des dépendances neceſſaires qu'ont ces rapports les uns des autres : Et l'on doit toûjours conſerver l'évidence dans toutes les démarches de l'eſprit en la recherche de la verité.

2. Comme l'évidence dans nos perceptions eſt abſolument neceſſaire pour découvrir la verité, on doit être exact à pratiquer les moyens qui procurent cette évidence. Le premier eſt d'apporter toute l'attention dont nous ſommes capables aux objets de nos applications, & de ne point nous laſſer de les conſiderer juſqu'à ce que nous ayons clairement & diſtinctement connu tout ce qu'ils contiennent, ou du moins ce qui nous paroîtra neceſſaire pour

la reſolution de la queſtion qui eſt le ſujet de notre application. Le ſecond eſt de nous rendre ſi familiere la perception claire & diſtincte des objets en nous y appliquant pluſieurs fois, que nous n'y puiſſions plus penſer qu'ils ne ſe preſentent à notre eſprit avec une entiere évidence. (Ce moyen eſt plus important qu'on ne le penſe ordinairement.) Le troiſiéme eſt que, puiſqu'on doit diſtinguer les objets que nous avons apperçus clairement par des marques, ou des ſignes, ou des paroles qui leur ſoient tellement liées, que ces marques ne puiſſent ſe preſenter que les objets ne ſe preſentent en même temps ſous une vue claire & diſtincte; il faut par des définitions, donner des noms à tous les objets que nous avons apperçus clairement & diſtinctement; c'eſt à dire, il faut attacher ces objets à des noms qui en réveillent les idées claires & diſtinctes; & il faut bien prendre garde de ne ſe ſervir que de noms qui ſoient attachez, ou par l'uſage, ou par des définitions de nom, à ſignifier des objets dont on a des idées claires & diſtinctes; car on tomberoit dans l'erreur ſi l'on ſe ſervoit de mots équivoques, c'eſt à dire qui réveillent pluſieurs idées differentes, & qui peuvent être pris tantôt en un ſens, & tantôt en un autre; ou de mots qui excitent des idées obſcures, c'eſt à dire qui n'ont pas de ſignification claire & diſtincte.

Regles ſur les propoſitions. 1. On doit admettre pour vrayes, ſans preuve, les propoſitions qui expriment des rapports que l'on voit clairement & diſtinctement; comme celles-ci. Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties: Un tout eſt égal à toutes ſes parties

priſes enſemble : Deux grandeurs égales à une troiſiéme ſont égales entr'elles ; & les autres ſemblables qui expriment des rapports qu'on apperçoit avec une entiere evidence. Ces ſortes de propoſitions s'appellent des *axiomes*. 2. Toute propoſition qui exprime un rapport qu'on n'apperçoit pas avec évidence, ne doit pas être admiſe qu'on ne l'ait auparavant démontrée, c'eſt à dire, qu'on n'ait fait voir évidemment qu'elle ſe déduit neceſſairement d'autres propoſitions évidentes.

Regles ſur les raiſonnemens. Il y a deux choſes à conſiderer dans les raiſonnemens ; les propoſitions qui précedent les conſequences d'où ſont tirées ces conſequences ; la déduction des conſequences des propoſitions qui les précedent. 1. *Regle*. On ne doit mettre parmi les propoſitions dont on tire les conſequences, que des propoſitions qui ſoient dans la derniere évidence, ou par elles-mêmes, (c'eſt à dire qu'étant ſimples, il ſuffiſe de les conſiderer avec attention pour en voir clairement la verité ;) ou parcequ'elles ont déja été démontrées, & qu'elles ſont devenues évidentes par la déduction neceſſaire qu'on en a faite d'autres propoſitions évidentes. 2. *Regle*. Il faut qu'on voye clairement en déduiſant les propoſitions les unes des autres, que celles qui ſont déduites ſont des ſuites neceſſaires des propoſitions dont elles ſont déduites.

On n'admet dans les Mathematiques aucunes preuves qui ne ſoient conformes à ces deux Regles, & c'eſt à ces ſeules preuves qu'on donne le nom de *Démonſtrations*.

Quand on fait la recherche de veritez fort com-

poſées, ou d'un grand nombre de veritez qui dépendent les unes des autres, & qu'il faut pour les découvrir beaucoup de perceptions, de jugemens & de raiſonnemens; il faut mettre bien de l'ordre entre toutes ces démarches de l'eſprit, & employer *la Methode ſynthetique*, ou *la Methode analytique*, ou mêler l'une avec l'autre. Voici.

Les Regles communes à ces deux Methodes. 1. Il faut partager le ſujet de ſon application en toutes les parties qu'il peut avoir, en faiſant des diviſions exactes qui comprennent tout le ſujet. Il faut enſuite examiner avec attention toutes ces parties une à une, en commençant par les plus ſimples, & allant ſelon l'ordre naturel aux plus compoſées, en mettant même de l'ordre parmi celles qu'il paroît indifferent d'examiner les unes plutôt que les autres; & ne point paſſer des unes aux autres, qu'on n'ait reconnu diſtinctement celles que l'on quitte pour s'appliquer aux ſuivantes, & ſans ſe les être rendues très familieres: il faut retrancher après cela toutes les choſes qu'on verra clairement être inutiles à découvrir la verité qu'on cherche. 2. Dans toute la longue ſuite des propoſitions & des raiſonnemens qui font découvrir une verité compoſée, on doit voir clairement la verité de chacune des propoſitions en particulier, & que toutes les déductions que l'on fait de ces veritez, les tirant les unes des autres, ſont neceſſaires.

La Regle particuliere à la Methode ſynthetique, eſt qu'il faut toujours commencer par les choſes les plus ſimples & les plus connues, & n'établir pour principes dont on doit ſe ſervir dans ſes raiſonnemens, que

des propoſitions entierement évidentes. Il faut enſuite aller ſuivant l'ordre naturel des choſes les plus ſimples aux plus compoſées ſans faire de ſaut, c'eſt à dire, il faut en allant des premiers principes aux dernieres veritez, paſſer par toutes les veritez qui ſont comme les milieux, chacun en ſon rang naturel, entre les premiers principes & les dernieres veritez, ſans obmettre aucun de ces milieux; & conſerver toujours l'evidence dans tout le paſſage.

Les Regles particulieres à la Methode analytique, ſont, la 1re, qu'il faut concevoir clairement & diſtinctement l'état de la queſtion qu'on veut reſoudre, c'eſt à dire, qu'il faut avoir des idées diſtinctes des termes de la queſtion, afin de pouvoir les comparer, & découvrir le rapport que l'on cherche; & ne pas perdre de vue l'état de la queſtion dans toutes les démarches que fait l'eſprit pour la reſoudre, afin de n'en pas faire d'inutiles.

Dans chaque queſtion ou Problême, il y a toujours trois choſes à diſtinguer; 1°. des grandeurs inconnues qu'on cherche à découvrir; 2°. des grandeurs connues, & 3°. des rapports connus entre les grandeurs connues & les inconnues; & ces rapports ſont les conditions de la queſtion qui la déterminent. Il eſt ordinairement facile de diſtinguer, comme le preſcrit la premiere Regle, les grandeurs connues & les inconnues de la queſtion; mais il y a bien des queſtions où l'on ne voit pas d'abord les rapports déterminez entre les grandeurs connues & les inconnues qu'on cherche, qui ſont neceſſaires pour reſoudre la queſtion, & qui la déterminent; & c'eſt ſouvent la difficulté de trouver ces rapports,

rapports, qui fait tout la difficulté de la queſtion.

La ſeconde Regle eſt (quand l'énoncé de la queſtion n'exprime pas tous les rapports qui déterminent la queſtion) d'employer tout ce qu'on peut avoir de ſagacité, & de chercher par quelque effort d'eſprit dans les proprietez des grandeurs qui ſont les termes de la queſtion, les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues qu'on cherche, qui déterminent la queſtion, & qui ſont neceſſaires pour la reſoudre; & que ces rapports ſoient clairement & diſtinctement connus.

Dans les queſtions ſur les nombres, quand les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues, qui déterminent la queſtion, ne ſont pas bien énoncez dans la queſtion, ce qui arrive rarement, on les cherche ces rapports dans les proprietez des nombres quand la queſtion eſt de Geometrie, ou du moins quand on y peut faire entrer des figures de Geometrie (ce qui arrive dans la pluſpart des Problêmes) on cherche les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues, qui déterminent la queſtion, dans les proprietez des figures propres à la queſtion: Quand la queſtion eſt ſur les grandeurs ſenſibles, on doit chercher les rapports qui déterminent la queſtion dans les proprietez des grandeurs ſenſibles. Voici un exemple qui fera voir la maniere d'appliquer la ſeconde Regle. Suppoſé qu'on veuille reſoudre le Problême qui fut propoſé à Archimede, & qu'il reſolut, que voici. *Trouver ſi un ouvrage qui paroît être d'or, & que l'ouvrier aſſure être de pur or, n'eſt point mêlé d'argent, ſans l'endommager.* La premiere Regle s'applique ſans peine, & l'énoncé

du Problême fait voir nettement l'état de la queſtion. Il s'agit de s'aſſurer ſi l'ouvrage qui paroît d'or, & que l'ouvrier aſſure être de pur or, n'eſt point un compoſé ou un mêlange d'or & d'argent. La condition qui y eſt ajoûtée de ne point endommager l'ouvrage, entre auſſi dans l'état de la queſtion, & la rend ce ſemble plus difficile, en excluant tous les moyens de découvrir s'il y a ou s'il n'y a pas de mêlange en endommageant l'ouvrage. Il faut donc par la ſeconde Regle, chercher les rapports qui détermineront la queſtion, & qui donneront le moyen de la reſoudre, dans les proprietez de l'or pur, de l'argent, & d'un mêlange d'or & d'argent. C'eſt une proprieté des métaux, qu'en prenant des volumes de differens métaux, chacun d'un égal poids, tous ces volumes également peſans, ſeront inégaux en étendue, & le volume d'or ſera le moindre de tous. Par exemple, un volume d'or peſant 10 livres, & un volume d'argent du poids de 10 livres ſont inégaux en étendue; & le volume d'or eſt moindre que le volume d'argent. Cette proprieté fournit le rapport qu'on cherche pour déterminer la queſtion: car le poids de l'ouvrage qui eſt le ſujet du Problême, étant par exemple, ſuppoſé d'une livre; en prenant un lingot d'or pur d'une livre, il faut chercher le rapport de la grandeur du volume d'or à la grandeur du volume de l'ouvrage, & s'ils ſont de même grandeur, il n'y a point de mêlange; ſi le volume d'or pur eſt moindre que le volume de l'ouvrage, il y a du mêlange. Et ce rapport eſt conforme à la condition de ne point endommager l'ouvrage; puiſque, pour connoître le rapport des volu-

mes du lingot d'or pur & de l'ouvrage, il ne faut que tremper le lingot d'or pur & l'ouvrage dans de l'eau contenue dans un vaiſſeau qui ait ſur un de ſes cotez des marques qui faſſent connoître la quantité d'eau que fait élever dans le vaiſſeau, ou que fait ſortir du vaiſſeau, le corps plongé dans l'eau, laquelle quantité d'eau élevée dans le vaiſſeau, ou ſortie du vaiſſeau, eſt égale au volume de ce corps.

Les métaux ont une autre proprieté, dont la raiſon ſe tire de la proprieté précedente, laquelle donne encore plus facilement le rapport qui détermine la queſtion, & qui en fait découvrir la reſolution La voici. Des volumes égaux en peſanteur de differens métaux, perdent, étant plongez dans l'eau, une partie chacun de leurs poids; ces parties perdues ſont inégales, & l'or en perd moins que les autres. On tire de cette proprieté le rapport qui détermine la queſtion Il faut chercher, en peſant dans l'eau un lingot d'or pur du poids de l'ouvrage, & en peſant de même l'ouvrage, le rapport des parties de leur poids que perdront dans l'eau le lingot d'or pur & l'ouvrage. Car ſi les parties du poids perdues ſe trouvent égales, l'ouvrage eſt d'or pur; & ſi elles ſont inégales, il y a du mêlange. On trouveroit la quantité de ce mêlange en comparant enſemble les parties que perdroient de leur poids dans l'eau l'ouvrage, un lingot d'or pur, un lingot d'argent, tous trois d'un même poids. Mais cette recherche ſeroit ici inutile; ce qu'on a dit de la maniere de trouver le rapport qui détermine la queſtion propoſée par le moyen des proprietez des grandeurs qui entrent dans la queſtion, ſuffit pour faire concevoir la ſeconde Regle.

Quand on a bien diſtingué dans une queſtion les grandeurs inconnues qu'on cherche, les grandeurs connues, & qu'on a les rapports des unes avec les autres, qui ſont les conditions du Problême qui le déterminent, *La troiſiéme Regle* eſt qu'il faut ſuppoſer la queſtion comme reſolue, & déduire de cette ſuppoſition les conſequences qui s'en peuvent déduire ; de ces premieres en déduire de ſecondes, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à la reſolution évidente de la queſtion.

Voici la maniere dont on employe cette troiſiéme Regle dans la reſolution des Problêmes des Mathematiques. Regardant le Problême comme s'il étoit reſolu, on marque les grandeurs connues de la queſtion ordinairement par les premieres lettres de l'alphabet ; on marque les inconnues de la queſtion communément par les dernieres lettres de l'alphabet, quoique cela ſoit arbitraire. Et conſiderant les grandeurs inconnues comme ſi elles étoient connues, on les compare avec les grandeurs connues, ſuivant les rapports connus qu'elles ont enſemble ; on marque ces rapports par les expreſſions litterales ſuivant les Regles du calcul, & on les reduit à une ſeule expreſſion, qui conſiſte en deux parties égales, qu'on appelle à cauſe de cela *une équation*, ou *une égalité*. Cette équation eſt une expreſſion litterale de tout le Problême, & de tous les rapports ou de toutes les conditions qui le déterminent ; c'eſt auſſi l'expreſſion litterale de la ſuppoſition qu'on fait que le Problême eſt reſolu. Voici comment on tire des conſequences de cette ſuppoſition par le moyen du calcul, juſqu'à la reſolution évidente du

Problême. Les grandeurs inconnues ſont mêlées avec les grandeurs connues, & quelques fois entre elles dans les deux parties égales de l'équation, qu'on appelle auſſi les deux membres de l'équation. On applique ſur ces deux parties égales les operations du calcul, par leſquelles on fait ſur chaque partie égale des changemens égaux ; ce qui n'ôte point l'égalité entre les deux parties égales ; & cependant on arrive par ces calculs à dégager les inconnues, c'eſt à dire à faire en ſorte que les inconnues ſe trouvent égales à des grandeurs connues ; ainſi on arrive à une reſolution évidente du Problême, & on y arrive en tirant de la ſuppoſition qu'on a faite que le Problême étoit reſolu, des conſequences neceſſaires; puiſque les operations du calcul ſur l'expreſſion du Problême ſont autant de raiſonnemens juſtes & ſuivis, par leſquels on tire des rapports repreſentez par l'expreſſion du Problême, d'autres rapports qui s'en déduiſent neceſſairement, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à la reſolution évidente du Problême, qui eſt la derniere conſequence évidente & neceſſaire à laquelle on tendoit pendant toute la reſolution.

L'explication qu'on vient de faire des Regles de la Methode qu'on ſuit dans les Mathematiques, ſuffit pour faire voir clairement aux Commençans qu'elle conduit infailliblement à la verité. Car la verité n'eſt qu'un rapport réel ſoit ſimple, ſoit compoſé. Or la Methode conduit de telle ſorte les démarches de notre eſprit, qu'en la ſuivant il ne doit admettre que des rapports réels, ſoit ſimples, ſoit compoſez; puiſqu'il ne doit admettre que les rap-

ports qu'il apperçoit clairement & diſtinctement. La Methode conduit donc infailliblement notre eſprit à la verité.

C'eſt ici le lieu de faire diſtinguer la vraye Methode qu'on ſuit dans les Mathematiques, qui vient d'être expliquée, d'avec la ſeule apparence de cette Methode, dont on peut abuſer pour faire illuſion aux ſimples & à ceux qui n'y regardent pas de près. Ce n'eſt pas aſſez pour traiter une matiere ſuivant la Methode des Mathematiques, que de donner aux propoſitions les noms d'Axiomes, de Définitions, de Suppoſitions, de Theorêmes, de Lemmes, en un mot tous les noms ſemblables à ceux dont on ſe ſert dans les Mathematiques; & de donner de même aux preuves le nom de Démonſtrations. Ce n'eſt là que l'exterieur & l'apparence de la Methode des Mathematiques, & ce n'eſt pas là la vraye Methode qui conduit infailliblement à la verité, quand on raiſonne ſur des matieres dont on n'a pas des idées claires & diſtinctes; quand les propoſitions, qu'on nomme Axiomes, ou ſuppoſitions ſont obſcures, & ne ſe font pas admettre par leur évidence; quand dans les preuves à qui donne le nom de Démonſtrations, l'eſprit n'apperçoit pas d'évidence dans les propoſitions, ni dans les déductions par leſquelles elles ſont tirées les unes des autres.

De l'utilité des Mathematiques pour perfectionner notre eſprit.

On ne parlera pas ici de l'utilité des Mathematiques par rapport à toutes les commoditez qu'elles fourniſſent aux beſoins des hommes; par rapport à

ce qu'elles contribuent à la perfection des Arts, ni par rapport aux ſecours qu'en tirent les Sciences, & ſur tout la Phyſique, qu'on ne ſçauroit apprendre à fond, ni traiter avec quelque exactitude ſans les Mathematiques; on déduira ſimplement comme un Corollaire de la Methode qu'on ſuit dans les Mathematiques, les grands avantages qu'on peut tirer de ces Sciences pour perfectionner notre eſprit; c'eſt le principal uſage qu'on doit faire des Mathematiques: c'eſt auſſi le principal motif qui doit porter les jeunes perſonnes à s'y appliquer.

La premiere qualité de l'eſprit de l'homme, la plus neceſſaire, celle qui s'étend à toutes ſes actions, toutes ſes applications, tous ſes emplois, toutes ſes affaires, toutes ſes entrepriſes, celle qui doit diriger toutes ſes autres qualitez, en un mot celle, qui étant jointe à la droiture du cœur qu'elle doit mettre en œuvre, & qu'elle doit conduire par ſa lumiere, fait toute la perfection de l'homme; c'eſt *la juſteſſe d'eſprit*. C'eſt par elle qu'il diſtingue en toutes choſes *le vrai du faux, le juſte de l'injuſte, le bon parti du mauvais*; c'eſt par cette eſtimable qualité que l'homme juge de toutes choſes ſelon leur valeur, qu'il place toutes choſes dans le rang qui leur convient; c'eſt par elle qu'il eſt judicieux dans toute ſa conduite; en un mot c'eſt par elle qu'il eſt raiſonnable, & qu'il découvre en toutes choſes ce que preſcrit le bon ſens ou la raiſon.

Il ne ſuffit pas pour avoir cette juſteſſe d'eſprit, de ſçavoir les Regles qui conduiſent infailliblement à la verité; elle conſiſte dans l'habitude même de ſuivre ces Regles en toutes rencontres; elle ſuppoſe

avant toutes choſes un vrai deſir de n'être pas trompé, & un ardent amour de la verité; elle réunit en elle les habitudes ſuivantes; 1°. une force d'eſprit qui lui faſſe apporter à tous les ſujets ſur leſquels il doit juger, toute l'attention qu'ils demandent pour en juger ſelon la verité, ſans ſe rebuter de la peine qui s'y peut rencontrer; 2°. une grandeur ou une étendue d'eſprit qui dans les queſtions compoſées l'ait accoutumé à regarder d'une ſimple vue la ſuite de pluſieurs principes qui conduiſent tous enſemble à la verité qu'il cherche; 3°. une fermeté d'eſprit qui l'empêche de ſe laiſſer emporter par les premieres vrai-ſemblances, qui ne lui permette pas de ſe rendre aux ſeules apparences de la verité, qui lui faſſe retenir & ſuſpendre ſon jugement dans les choſes naturelles, & qui ſont du reſſort de la raiſon, juſqu'à ce qu'il ſoit forcé de le porter par une évidence entiere, & qui enſuite l'attache conſtamment à la verité clairement connue, & le retienne inébranlable; 4°. une netteté d'eſprit ou une habitude à mettre un tel ordre dans toutes ſes penſées, un tel arrangement dans toutes les parties du ſujet de ſon application, qu'il puiſſe aiſément faire toutes les comparaiſons neceſſaires pour trouver la verité; 5°. une ſagacité qui faſſe découvrir dans les queſtions les plus difficiles & les plus embaraſſées, les moyens les plus ſimples & les plus propres pour les reſoudre; 6°. enfin une habitude qu'il doit ſe faire de la connoiſſance claire & diſtincte des principes les plus ſimples, les plus generaux, & les plus feconds ſur chaque matiere qui peut être d'uſage dans la vie; de façon que ces principes ſoient toujours preſens,

preſens, & ſervent de lumiere à l'eſprit dans toutes les occaſions qui peuvent ſe preſenter, & qu'il n'ait plus qu'à en tirer les conſequences, pour juger ſainement de la pluſpart des choſes qui ſe rencontrent le plus ordinairement. C'eſt le concours de toutes ces habitudes qui forme celle qu'on nomme juſteſſe de l'eſprit.

Cette excellente habitude s'acquiert comme les autres par la pratique continuelle des actes qui la produiſent. Et il eſt évident par l'explication qu'on a fait de la Methode qu'on ſuit toujours dans les Mathematiques, que l'on y pratique continuellement les actes qui forment cette habitude. D'où ſuit évidemment l'utilité des Mathematiques pour former le jugement & perfectionner l'eſprit.

Car la ſeule qualité de l'eſprit neceſſaire pour apprendre les Mathematiques, eſt d'être capable d'attention. Un eſprit attentif y fera un progrès prodigieux. C'eſt par la ſeule attention qu'il découvrira toutes les veritez que ces Sciences contiennent, & qu'il ſe fera jour au travers des obſcuritez dont elles paroiſſent environnées aux eſprits incapables d'attention, dans tout ce qu'elles ſemblent avoir de plus caché & de plus ſecret. Ainſi l'étude de ces Sciences eſt le moyen le plus propre à acquerir la force d'eſprit, & à le rendre maître de ſon attention. Il n'y en a pas auſſi de plus capable de lui donner l'étendue dont il a beſoin lorſqu'il faut qu'il s'applique à des queſtions fort compoſées, & où il doit enviſager d'une ſeule vûe un grand nombre de principes d'où dépend la reſolution. Car les veritez que ces Sciences expliquent ſont

toutes liées les unes aux autres, & un ſeul principe répand une telle lumiere ſur toutes les veritez qu'il renferme, que l'eſprit voit d'une ſimple vûe toute la ſuite qu'elles ont entr'elles juſqu'à la derniere, pour ainſi dire, qui les ſuppoſe toutes. C'eſt dans ces Sciences que ſe forme le goût de l'eſprit pour la verité; qu'il s'accoutume & ſe familiariſe, pour ainſi parler, avec elle; qu'il la diſtingue, dans les choſes qui ſont du reſſort de la raiſon, par ſon propre caractere qui eſt la lumiere & l'évidence. Le bel ordre que mettent ces Sciences entre toutes les veritez qu'elles enſeignent, qui en fait une des plus grandes beautez, & en quoi conſiſte le principal de leur excellente Methode, ſert à former la netteté de l'eſprit, & à l'accoutumer à arranger ſes penſées dans tous les ſujets de ſes applications, de la maniere la plus naturelle & la plus propre tant à découvrir la verité qu'à l'expliquer aux autres. L'artifice ingenieux qu'elles employent ſans ceſſe pour reſoudre les queſtions les plus embaraſſées par les moyens les plus ſimples & les plus naturels, eſt ce qu'il y a de plus propre à donner à l'eſprit la ſagacité qui lui eſt de ſi grand uſage dans toutes les occaſions où il doit s'appliquer à des queſtions difficiles, & trouver de lui-même les moyens les plus propres à les reſoudre. Enfin les Mathematiques dépendent d'un très petit nombre de principes generaux qu'on ne fait, pour ainſi dire, que developer dans toutes ces Sciences, & elles ſont très propres à faire acquerir à l'eſprit l'habitude de la connoiſſance des principes les plus feconds ſur les matieres les plus d'uſage dans la vie; & d'en juger ſolidement en ſuivant leur lumiere.

AVERTISSEMENT.

LA Methode d'apprendre les Mathematiques par le moyen du calcul litteral & numerique, eſt la plus aiſée. En ôtant tout l'embarras & tout ce qu'il y avoit de rebutant dans cette étude, elle y ſubſtitue le plaiſir de les apprendre comme ſi on en faiſoit ſoi-même la découverte. Elle eſt la plus courte, & demande incomparablement moins de temps pour s'en rendre maître. Elle eſt plus lumineuſe & plus feconde, en conduiſant par tout à des reſolutions generales, & faiſant naître par chaque trait de plume des découvertes. Enfin elle eſt plus proportionnée à l'eſprit borné de l'homme, en menageant admirablement ſa capacité, & augmentant ſon étendue à l'infini par le bel ordre qu'elle met dans le grand nombre d'objets qu'il doit regarder d'une ſimple vûe, & dans tous les raiſonnemens qu'il doit faire pour les comparer les uns avec les autres afin d'arriver à la verité, & par l'art d'abreger ſes idées, & de lui repreſenter une infinité d'objets ſous l'expreſſion la plus ſimple qui ſoit poſſible. Il n'en faut pas d'autre preuve que le prodigieux progrès qu'ont fait les Mathematiques depuis qu'on les a traitées par le calcul. Ceux qui veulent apprendre les Mathematiques à fond en peu de temps, d'une maniere aiſée & qui leur faſſe plaiſir, entendre les excellens Ouvrages ſur ces Sciences faits de notre temps, où elles ſont traitées par le cal-

cul, & ſe mettre en état d'y faire eux-mêmes des découvertes, doivent commencer par apprendre le calcul, & ſe le rendre très familier. Mais il ne faut pas que le calcul les conduiſe comme des aveugles, ou comme des artiſans qui ſuivent des Regles dont ils ne ſçavent pas les raiſons, ou comme par un heureux bazard, aux veritez que contiennent les Mathematiques, qui ne ſeroient pas des veritez pour ceux qui ne verroient pas clairement leurs liaiſons & leur enchaînement neceſſaire avec les premiers principes connus de tout le monde; ils doivent apprendre en même temps les raiſons ſur leſquelles eſt fondé le calcul. Ils doivent voir clairement que les expreſſions litterales & numeriques, & toutes les operations du calcul ſur ces expreſſions, ſont des ſignes ſimples & faciles, déterminez par la ſcience du calcul à marquer par ordre tous les raiſonnemens clairs, diſtincts, ſolides, naturels & ſuivis, que fait l'eſprit pour déduire des rapports connus des grandeurs, tous les autres rapports qu'on en peut déduire. Que ces calculs étant appliquez aux figures de la Geometrie, repreſentent les rapports qui ſont entre les lignes contenues dans ces figures, ceux qui ſont entre les parties de ces figures comparées entr'elles ou avec les figures entieres dont elles ſont les parties; ceux qui ſont entre les figures mêmes comparées les unes aux autres: qu'ils repreſentent de même les rapports que toutes les grandeurs particulieres peuvent avoir entr'elles, & qu'ils repreſentent de plus les raiſonnemens exacts que fait notre eſprit dans les comparaiſons de ces rapports pour aller des uns aux autres; qu'enfin dans la reſolution de chaque queſtion ils marquent diſtinctement tous les raiſonnemens juſtes que fait l'eſprit pour déduire ce que l'on veut connoître dans la queſtion, de toutes les choſes qui y ſont connues.

La Science du calcul des grandeurs en general, *qu'on donne ici, eſt faite pour les Commençans, pour ceux qui n'ont encore aucune connoiſſance des Mathematiques, & qui veulent les apprendre à fond. On à tâché de l'expliquer avec une telle clarté, qu'ils puſſent l'apprendre d'eux mêmes ſans le ſecours d'un Maître. On n'y a oublié aucun des calculs qui ſont neceſſaires pour entendre* l'Analyſe Démontrée *& les nouvelles Methodes trouvées de notre temps, & qui ſont expliquées dans l'Analyſe Démontrée. On y a donné des démonſtrations de tous les calculs: & comme la multiplication & la diviſion des grandeurs litterales entieres doit convenir à toutes ſortes de grandeurs, c'eſt à dire aux grandeurs rompues & aux grandeurs incommenſurables, on à été obligé pour démontrer cette étendue, de donner dans* la premiere Section, *la notion des* rapports *& des* proportions, *& de démontrer les plus ſimples & les plus generales proportions d'où ſe déduiſent toutes les autres. Les Commençans pourront les paſſer ces premieres proportions dans une premiere lecture, & ſur tout les démonſtrations particulieres pour les rapports incommenſurables, le cas des incommenſurables étant clairement contenu dans le cas des rapports commenſurables par la notion de l'infini. On n'a mis ces démonſtrations particulieres aux incommenſurables, que pour ne laiſſer aucune propoſition ſans une démonſtration dans la rigueur mathematique, à ceux mêmes qui auroient quelque peine dans ces premiers commencemens, d'admettre la notion de l'infini.*

Les Commençans pourront même, (afin de n'être pas rebutez par la theorie, c'eſt à dire par les démonſtrations, & par tous les principes établis pour les démonſtrations) ſe contenter dans une premiere lecture, d'apprendre bien le

ſeul calcul des grandeurs entieres & rompues, & de ſe le rendre très familier, c'eſt à dire l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la diviſion, la formation des puiſſances, & l'extraction des racines des grandeurs numeriques & litterales entieres, & les mêmes operations ſur les grandeurs rompues avec les reductions qui leur ſont particulieres.

Quand ils ſe ſeront rendus ces calculs familiers, ils liront l'ouvrage tout de ſuite, en joignant la theorie à la pratique; ils apprendront tout ce qui regarde la comparaiſon des rapports ſimples & compoſez, & le calcul des grandeurs incommenſurables.

AVERTISSEMENT

Sur la réduction des moindres eſpeces aux plus grandes par rapport aux produits qui viennent de la multiplication des nombres de differentes eſpeces les uns par les autres, expliquée dans l'article 87 *page* 62, *qui doit être ajoûté à la page* 108 *après la ligne* 2e.

QUAND on a deux nombres, qui contiennent chacun differentes eſpeces, à multiplier l'un par l'autre; & qu'on les réduit chacun à la moindre eſpece, & qu'enſuite on multiplie ces deux nombres, ainſi réduits à la moindre eſpece, l'un par l'autre, ſuivant la regle de l'*art.* 87. Voici la methode pour réduire le produit qui eſt venu de cette multiplication à la plus grande eſpece que l'on cherche. Il faut prendre, 1°, l'unité de la plus grande eſpece de l'un des deux nombres, & la réduire à la moindre eſpece. (Dans l'exemple de l'*art* 87, il faut réduire 1 livre, qui eſt l'unité de la plus grande eſpece du premier nombre, en la plus petite eſpece qui eſt des deniers, & cette unité réduite ſera le nombre 240.) 2°. Il faut de même réduire l'unité de la plus grande eſpece du ſecond nombre, en la plus petite eſpece. (Dans l'exemple il faut réduire 1 toiſe, qui eſt l'unité de la plus grande eſpece du ſecond nombre, en pouces qui eſt la plus petite eſpece du ſecond nombre, & cette unité réduite ſera 72 pouces) 3°. Il faut multiplier les deux nombres, auſquels ces deux unitez de la plus grande eſpece de chacun des deux nombres propoſez ſont réduites, l'un par l'autre. (Dans l'exemple il faut multiplier 240 par 72) Le produit qui viendra de cette multiplication (lequel dans l'exemple eſt 17280,) eſt le nombre par lequel il faut diviſer le produit qu'on a trouvé par la regle de l'*art.* 87, (lequel produit dans l'exemple eſt 3707892.)

En faiſant la diviſion, le quotient qu'on trouvera exprimera le nombre de la plus grande eſpece que l'on cherche, c'eſt à dire, qu'on réduira par cette diviſion le produit à la plus grande eſpece que l'on cherche. (Dans l'exemple on

trouvera le quotient entier 214 livres avec la fraction $\frac{2972}{17280}$. Cette fraction ſe réduira aux moindres eſpeces priſes de ſuite par la methode de l'*art.* 274.)

Comme cette methode de multiplier les nombres qui contiennent differentes eſpeces expliquée dans l'*art* 87, eſt très embaraſſante, il ne faut point du tout s'en ſervir, ni de la diviſion des nombres qui contiennent differentes eſpeces expliquée dans l'*art.* 137, dans laquelle pour réduire le quotient à la plus grande eſpece, il faut réduire l'unité du dividende à la plus petite eſpece, & réduire de même l'unité du diviſeur à la plus petite eſpece; enſuite diviſer l'unité du dividende réduite à la moindre eſpece par l'unité du diviſeur auſſi réduite à la moindre eſpece, ce qui donnera un quotient: Enfin, diviſer le quotient que l'on aura trouvé par la methode de l'*art.* 137, par le quotient qu'on vient de former; & faiſant la diviſion, le quotient qu'on trouvera exprimera la plus grande eſpece que l'on cherche, c'eſt à dire, qu'on réduira par cette diviſion le quotient à la plus grande eſpece que l'on cherche.

Mais quand on aura deux nombres, qui contiennent chacun differentes eſpeces, à multiplier, ou à diviſer l'un par l'autre, il faudra réduire chacun de ces nombres en parties décimales par la methode de l'*art.* 276; multiplier enſuite ou diviſer ces deux nombres réduits en parties décimales l'un par l'autre; & l'on aura, dans les produits ou dans les quotients, les nombres entiers que l'on cherchoit, & de plus des parties décimales, qu'on réduira par l'article 276 aux moindres eſpeces priſes de ſuite des nombres propoſez.

LA

LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GENERAL.

LIVRE I.

Où l'on explique le calcul des grandeurs entieres.

SECTION I.

Où l'on explique les noms des principales Propoſitions dont on ſe ſert dans les Mathematiques, les axiomes generaux des ces ſciences, les principes dont on déduira les premieres Regles du calcul, & enfin la diviſion de ce Traité.

Explication des noms des principales Propoſitions des Mathematiques.

1.

DEFINITION eſt l'explication de ce que ſignifie un mot; ou bien c'eſt l'expreſſion dont on ſe ſert pour attacher un nom à un objet dont on a une idée claire & diſtincte, & pour déterminer ce nom à ſignifier cet objet. Par exemple cette propoſition : Un nombre entier eſt celui qui contient pluſieurs fois exactement l'unité, eſt une définition. Quoique les définitions des noms ſoient ar-

bitraires, elles n'en ſont pas moins inconteſtables; car on ne peut pas conteſter à celui qui l'a fait, qu'il n'attache à un tel nom l'objet auquel il détermine ce nom.

2.

Axiome eſt une propoſition ſi évidente par elle-même, qu'elle n'a pas beſoin de preuve, comme celle-ci. Une choſe ne peut pas être & n'être pas en même temps; ou comme cette autre, le rien, ou ce qui ne participe point du tout à l'être, ne ſçauroit être apperçu. Car appercevoir rien, & ne point appercevoir, eſt évidemment la même choſe. Il ſuffit, afin qu'une propoſition ſoit un axiome, qu'en y apportant de l'attention on voye avec une entiere évidence la verité ou le rapport qu'elle exprime.

3.

Suppoſition ou *demande* eſt une propoſition qui n'eſt pas tout à fait ſi évidente qu'un axiome, mais qui neanmoins eſt inconteſtable; ainſi on ne peut pas s'empêcher de l'accorder. Par exemple, on ſuppoſe que tous ceux qui apprennent l'addition & la ſouſtraction des nombres, ſçavent ajouter enſemble tout nombre moindre que dix, avec tout autre nombre auſſi moindre que dix; & retrancher un nombre moindre que dix de tout autre nombre plus grand, & trouver le nombre qui reſte & qui en fait la difference. On ſuppoſe de même dans la Geometrie, que deux points étant donnez ſur un plan, on peut tirer avec une regle une ligne droite de l'un à l'autre. Comme auſſi, qu'un point étant donné ſur un plan, & une ligne droite qui part de ce point, on peut tracer avec le compas ouvert de la grandeur de cette ligne, une circonference qui ait ce point pour centre. On peut voir par là que ces ſortes de ſuppoſitions ou de demandes ſont inconteſtables, & n'ont pas beſoin de preuve. On n'en fait pas d'une autre ſorte dans les ſciences generales des Mathematiques, qui ont pour objet la grandeur en general, où tout doit être démontré dans la derniere rigueur. Mais dans les ſciences particulieres des Mathematiques, qui ont pour objet les grandeurs ſenſibles, on eſt quelquefois obligé de faire des ſuppoſitions qui ne ſont pas ſi inconteſtables que celles des ſciences generales : comme dans l'Aſtro-

nomie on eſt obligé, pour expliquer les mouvemens & les autres apparences des Aſtres, de ſuppoſer, ou que la Terre tourne autour du Soleil, ou que le Soleil tourne autour de la Terre ; parcequ'on ne peut pas avoir de démonſtration de l'une ni de l'autre de ces ſuppoſitions. On déduit enſuite des ſuppoſitions que l'on a faites par des conſéquences évidentes tout ce que renferment ces ſciences particulieres; & les ſuppoſitions étant une fois admiſes, tout le reſte, qui en eſt une ſuite évidente, eſt démontré.

On n'admet ſans preuve dans les Mathematiques que les trois ſortes de propoſitions qu'on vient d'expliquer. Toute autre propoſition doit être démontrée en la déduiſant des axiomes, des définitions & des ſuppoſitions, ou bien la déduiſant d'autres propoſitions qui ont déja été démontrées, & qui par là ſont dévenues claires & inconteſtables. Voici l'explication des noms qu'on donne aux propoſitions qu'il faut démontrer.

Theorême eſt une propoſition qu'il faut démontrer, & qui ne preſcrit rien à faire, comme ſi l'on propoſoit de démontrer cette propoſition : Le nombre 9 étant ajouté à lui même tant de fois que l'on voudra, les chifres qui exprimeront cette addition, feront toujours enſemble exactement neuf une ou pluſieurs fois. Comme 2 fois 9 ſont 18 : or 1 & 8 ſont exactement 9. De même 3 fois 9 ſont 27 : or 2 & 7 ſont exactement 9, &c. cette propoſition ſeroit un theorême.

Problême eſt une propoſition qui preſcrit quelque choſe à faire, & il faut démontrer, quand on l'a réſolu, qu'on a fait ce qui étoit preſcrit : par exemple, voici un Problême. Pluſieurs grands nombres étant donnez, les ajouter tous enſemble, c'eſt à dire trouver le nombre qui doit venir de l'addition de tous ces nombres donnez.

Corollaire eſt une propoſition qui ſuit d'une autre. Ainſi quand on a démontré une propoſition, & qu'on en déduit enſuite d'autres propoſitions, on les appelle des Corollaires de cette propoſition.

Lemme eſt une propoſition qu'il faut démontrer ; mais qu'on ne met dans le lieu où elle eſt, que pour ſervir de preuves à d'autres propoſitions qui la ſuppoſent, & on ne la mettroit pas ſi l'on n'en avoit pas beſoin pour démontrer ces autres propoſitions.

On ajoute quelquefois des *Remarques* après des propoſitions, les Anciens les nommoient des *Scholies* : ce ſont ordinairement des éclairciſſemens.

Les Axiomes generaux des Mathematiques :

1.

1. UN tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble ; il eſt plus grand que l'une de ſes parties ; & ſuppoſé qu'il n'ait que deux parties, un tout moins l'une de ſes parties eſt égal à l'autre partie.

2.

2. Les grandeurs égales à une même grandeur, ou à des grandeurs égales, ſont égales entr'elles.

3.

3. Les grandeurs doubles, triples, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, ſont égales; comme auſſi les grandeurs qui ſont la moitié, le tiers, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, ſont égales; & reciproquement les grandeurs ſont égales, dont d'autres grandeurs égales ſont le double, le triple, &c. ou la moitié, le tiers, &c.

4.

4. Si l'on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs égales, ou ſi de grandeurs égales l'on retranche d'autres grandeurs égales plus petites, les grandeurs qui viendront de ces additions ou de ces retranchemens ſeront égales.

5.

5. Si l'on ôte d'une grandeur la même grandeur ou une grandeur égale, il ne reſte rien.

6.

6. Si des grandeurs ſont égales, toute autre grandeur plus grande ou moindre, que l'une de ces grandeurs eſt auſſi plus grande ou moindre que chacune des autres. Et ſi une grandeur eſt plus grande ou moindre qu'une autre, toutes les grandeurs égales à la premiere, ſont plus grandes ou moindres que la ſeconde.

7.

7. Si à des grandeurs égales l'on ajoute des grandeurs inégales, ou ſi de ces grandeurs égales l'on en retranche d'inégales, les grandeurs qui en naîtront ſeront inégales; & celles auſquelles on aura ajouté les plus grandes, comme auſſi celles dont on aura ôté les moindres, ſeront les plus grandes.

8.

8. Si à des grandeurs inégales l'on ajoute des grandeurs égales, ou ſi de ces grandeurs inégales l'on en retranche d'égales, les grandeurs qui en viendront ſeront inégales; & celles qui étoient les plus grandes avant l'addition ou le retranchement, le ſeront encore après.

Voilà les principaux axiomes des Mathematiques; quand on aura beſoin des autres, ils ſe préſenteront ſi clairement & ſi naturellement à l'eſprit, qu'il eſt inutile de les mettre ici.

AVERTISSEMENT.

Les Chifres qu'on verra à la marge au commencement des principales propoſitions de ce Traité, ne ſont marquez que pour les citer dans les endroits où ces propoſitions ſervent de preuves. Or pour les citer on met cette marque *; ainſi quand on trouvera dans la ſuite cette marque * dans le Traité, & à la marge vis à vis la même marque * avec un nombre; cela ſignifiera que la preuve que l'on cite eſt dans la propoſition ou dans l'article à qui convient le nombre, qui eſt à la marge à côté de la marque *.

Principes dont on déduira les démonſtrations des premieres Regles du Calcul pour les grandeurs numeriques.

DE'FINITIONS.

1.

ON prend dans toutes les eſpeces de grandeurs une de leurs parties qu'on détermine, à qui on attribue l'idée *de l'unité*: c'eſt à dire, on la conſidere par raport aux grandeurs de même eſpece, comme l'unité par raport aux nombres. Par exem-

ple, on prend dans les longueurs une longueur déterminée pour l'unité qu'on nomme un pied; dans les largeurs, une largeur d'un pied quarré; dans les ſolides, un corps ſolide d'un pied cubique; dans les poids on prend une livre; dans les temps, une heure; dans les mouvemens, un degré de mouvement; dans les vîteſſes, un degré de vîteſſe, & ainſi des autres.

2.

9. On compare enſuite les grandeurs avec leur unité, & on leur attribue les idées des nombres. Quand une grandeur contient ſon unité exactement pluſieurs fois, on la nomme *un nombre entier*; ainſi 4 pieds, 4 livres, 4 heures, &c. ſont des nombres entiers.

La maniere de marquer les nombres eſt arbitraire, on en voit de differentes parmi les differentes Nations, la plus commode, que l'on a reçue des Arabes, eſt de marquer les nombres par *les chifres*. La voici.

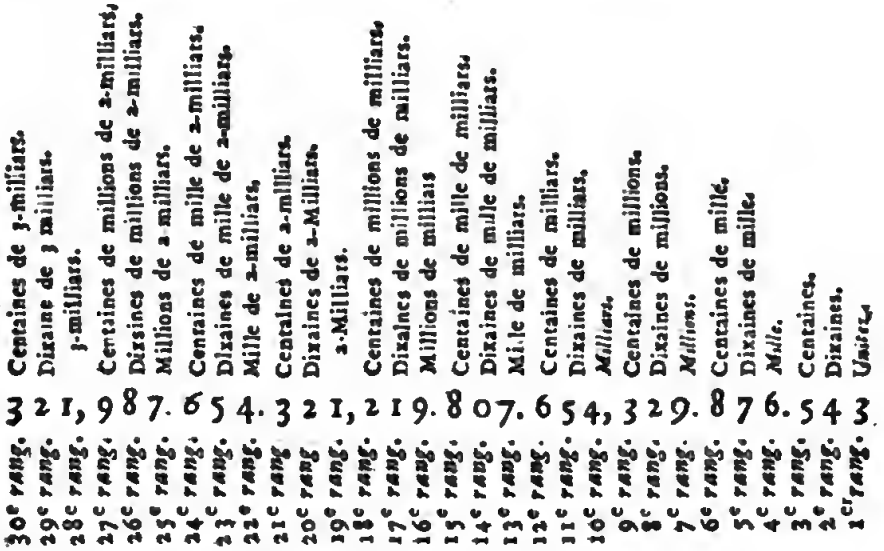
3.

10. 1 ſignifie *un*; 2, *deux*; 3, *trois*; 4, *quatre*; 5, *cinq*; 6, *ſix*, 7, *ſept*; 8, *huit*; 9, *neuf*. Il n'y a que ces neuf caracteres qu'on nomme *chifres*, pour marquer les nombres, & ils ſuffiſent pour cela, comme on le verra dans la définition ſuivante; mais on remarquera que l'on ſe ſert encore d'un dixiéme caractere o, qu'on nomme *zero*, & qui ſignifie *rien*; c'eſt à dire, que là où l'on marque o, il n'y a aucun nombre, ni aucune unité, ni aucune grandeur.

4.

11. Pour marquer tous les nombres entiers, quelque grands qu'ils puiſſent être, avec les ſeuls dix caracteres précedens, on écrit ces nombres dans une ligne droite en allant de droite à gauche, & l'on marque dans le premier rang à droite le chifre qui exprime les unitez de ces nombres au deſſous de dix; dans le ſecond rang, le chifre qui exprime combien ces nombres contiennent de dixaines d'unitez au deſſous de dix; dans le troiſiéme rang, le chifre qui marque combien ils contiennent de dixaines de dixaines, qu'on nomme des centaines d'unitez, au deſſous de dix; dans le quatriéme rang, le chifre

qui marque combien ils contiennent de dixaines de centaines qu'on nomme des mille, & ainſi de ſuite en allant de droite à gauche, comme on le voit dans cet exemple ; & l'on doit remarquer que quand il n'y a point de chifre à mettre dans un rang, & qu'il y en a cependant dans les rangs ſuivans vers la gauche, on marque o dans ce rang là, tant pour exprimer qu'il n'y a point de nombre convenable à ce rang, que pour diſtinguer l'ordre des rangs des chifres qui ſont vers la gauche.



Pour exprimer facilement un grand nombre, il n'y a qu'à le partager par des points de trois en trois rangs, en allant de droite à gauche, & enſuite par des virgules de neuf en neuf rangs auſſi de droite à gauche; & remarquer, 1°, qu'en chaque ternaire le premier rang à droite ne contient que des unitez, qui retiennent le nom d'unitez dans le premier ternaire; mais que ces unitez ſe nomment mille dans le ſecond ternaire, & millions dans le troiſiéme. Que dans le ſecond rang de chaque ternaire ce ſont des dixaines, & dans le troiſiéme rang des centaines. 2°, que dans le ſecond novenaire (pour ainſi parler) les unitez ſe nomment milliars; dans le troiſiéme, bi-milliars, qu'on a ainſi marquées 2-milliars; dans le quatriéme, tri-milliars, qu'on a ainſi exprimées 3-milliars, &c. Ainſi quelque nombre de rangs que puiſſe occuper un grand nombre, pourvû qu'on ſçache ſon dernier rang à gauche, qui eſt, par exemple, le trentiéme, on voit tout d'un

coup que contenant trois novenaires, & de plus trois rangs du quatriéme novenaire, le dernier chifre à gauche exprime des centaines de 3-milliars. On peut ainſi énoncer le nombre qui précede : Trois cens vingt & un 3-milliars neuf cens quatre-vingt ſept millions ſix cens cinquante & quatre mille trois cens vingt & un 2-milliars deux cens dix-neuf millions huit cens ſept mille ſix cens cinquante & quatre milliars trois cens vingt-neuf millions huit cens ſeptante ſix mille cinq cens quarante & trois unitez.

5.

12. On partage, pour la commoditè des calculs, l'unité en dix parties ; chacune de ces dixiémes en dix parties, qui ſont des centiémes de l'unité ; chaque centiéme en dix parties, qui ſont des milliémes de l'unité; chaque milliéme en dix autres, & ainſi de ſuite à l'infini. Quand un nombre contient un nombre entier d'unitez, & qu'il contient de plus de ces ſortes de parties, qui ſont des dixiémes de l'unité, des centiémes, des milliémes, &c. l'on ajoute les chifres qui marquent ces parties dans la même ligne au devant de l'unité, en allant dans ce cas de gauche à droite ; & quand il manque un chifre dans l'un des rangs, on marque o dans ce rang là, pour diſtinguer les rangs qui ſont plus à droite.

Pour diſtinguer ces *parties décimales* des unitez entieres, on marque un point, ou une virgule, ou une petite ligne, ou un petit arc entre les unitez entieres & les parties décimales. On peut auſſi marquer au haut du dernier chifre à droite des parties décimales, le chifre en petit caractere, qui exprime le rang où il eſt comme l'on voit ici, ce qu'on néglige ordinairement comme inutile.

Centaines.
Dixaines.
Unitez.
Dixiémes.
Centiémes.
Milliémes.
Dix milliémes.
Cent milliémes.
Millioniémes.
&c.

3 4 5,3 7 0 4 5 6 8 9 1 0 4 3^{xii}

Corollaire

Corollaires de la quatriéme & cinquiéme Définition.

COROLLAIRE I.

13. DIX unitez d'un rang ne valent qu'une unité dans le rang qui eſt immédiatement plus à gauche. Dix centaines, par exemple, ne valent qu'un mille.

COROLLAIRE II.

14. UNE unité d'un rang vaut dix dans le rang qui eſt immédiatement plus à droite: par exemple, un mille vaut dix centaines.

Ces deux premiers Corollaires conviennent aux nombres entiers, & aux nombres qui contiennent des parties décimales.

COROLLAIRE III, *pour les nombres entiers.*

15. SI l'on recule d'un rang un nombre qui n'a que des entiers, on le fait valoir dix fois plus qu'il ne valoit; ſi on le recule de deux rangs, cent fois plus; ſi on le recule de trois rangs, mille fois plus, & ainſi de ſuite: par exemple, mettant deux zeros devant 53, on aura 5300, qui vaut cent fois plus que 53.

COROLLAIRE IV, *pour les nombres entiers.*

16. SI l'on ôte un rang à droite d'un nombre entier, on le fait valoir dix fois moins qu'il ne valoit; ſi l'on en ôte deux rangs, cent fois moins, & ainſi de ſuite. Ainſi ôtant deux rangs de 5300, on aura 53, qui vaut cent fois moins que 5300.

COROLLAIRE V.

Pour les nombres qui contienent des parties décimales.

17. POUR réduire un nombre entier en dixiémes, ſans en changer la valeur, il n'y a qu'à ajouter un zero, en mettant un point entre le nombre & le zero que l'on ajoute. Pour le réduire en centiémes, il faut lui ajouter deux zeros; en milliémes, trois zeros, & ainſi de ſuite. De même, pour réduire un nombre qui exprime des parties décimales de l'unité, c'eſt à dire des dixiémes, centiémes, milliémes, &c. en parties décimales plus petites, il n'y a qu'à ajouter à ce nombre, qui

exprime des parties décimales, autant de zeros qu'il en faut pour lui donner le rang qui lui convient par raport aux parties décimales plus petites auſquelles on le veut réduire. Ainſi pour réduire o, 13^{m}, c'eſt à dire treize centiémes en millioniémes, il faut écrire o, 130000^{vi}.

*12. Ce Corollaire eſt une ſuite de la cinquiéme définition *. Car il eſt évident que chaque unité d'un nombre entier contient dix dixiémes; qu'elle contient auſſi cent centiémes, & de même mille milliémes, & ainſi de ſuite. Par conſéquent en faiſant valoir chaque unité d'un nombre dix dixiémes, ou cent centiémes, ou mille milliémes, &c on n'en change point la valeur. Or en mettant un zero, deux zeros, trois zeros, &c. devant un nombre, au devant du point qui diſtingue les

12. parties décimales, on fait valoir, par la cinquiéme définition, chacune des unitez de ce nombre, c'eſt à dire ce nombre là même, des dixiémes, des centiémes, &c. On doit ſeulement remarquer qu'il faut être exact à marquer le point ou la virgule qui ſépare les unitez entieres des parties décimales; & quand il n'y a que des parties décimales ſans aucun nombre entier, qu'on doit mettre au devant vers la gauche, le nombre de zeros qu'il faut pour occuper les rangs juſqu'au nombre entier, & écrire un point ou une virgule au devant de ces zeros vers la gauche, & un zero au de-là du point ou de la virgule vers la gauche, pour faire connoître le rang où commenceroit le nombre entier, comme dans ces exemples : o. 130000^{vi}. o. 000324^{vi}. Le premier contient cent trente mille millioniémes, & le ſecond contient trois cens vingt-quatre millioniémes. Ainſi on remarquera qu'en ajoutant un zero, deux zeros, trois zeros, &c. au devant d'un nombre entier, ſans mettre de point entre ce nombre & les zeros ajoutez, on fait valoir ce nombre dix fois plus, cent fois plus, mille fois plus, &c. qu'il ne valoit auparavant. Mais en mettant un point au devant de ce nombre, & écrivant au devant du point vers la droite un zero, deux zeros, trois zeros, &c. on ne change point la valeur de ce nombre; mais on le réduit par là à valoir des dixiémes, des centiémes, des milliémes, &c. de l'unité; c'eſt à dire, on exprime par là combien ce nombre vaut de dixiémes, de centiémes, de milliémes, &c. de l'unité; ou bien encore, on partage par là toutes les unitez de ce nombre en dixiémes, centiémes, &c. car chaque unité contient dix

dixiémes de l'unité, cent centiémes, mille milliémes, &c.

COROLLAIRE VI.

Pour les nombres qui contiennent des parties décimales.

18. SI dans un nombre décimal quelconque, par exemple, 132.456378^{VI}, on avance le point qui diſtingue les parties décimales d'avec les entiers d'un rang vers la droite, le nombre 1324.56378^{V} vaudra préciſément dix fois plus que le précedent; car chacun des chifres vaudra par-là * dix fois plus qu'il ne valoit. Si l'on avance le point de deux rangs, le nombre 13245.6378^{IV} vaudra préciſément cent fois plus qu'il ne valoit; car chacun des chifres vaudra par-là cent fois plus qu'il ne valoit. Si l'on avance le point de trois rangs, le nombre 132456.378^{III} vaudra mille fois plus qu'il ne valoit, & ainſi de ſuite. * 15.

Si au contraire on recule le point qui diſtingue les entiers d'avec les parties décimales vers la gauche d'un rang, de deux rangs, de trois rangs, &c. le nombre propoſé vaudra par ces changemens dix fois moins, cent fois moins, mille fois moins, &c. qu'il ne valoit.* * 16.

6e DEFINITION.

19. UN nombre qui ne contient pas l'unité exactement; mais qui contient un certain nombre de parties égales, dans leſquelles on conçoit que l'unité eſt diviſée, s'appelle un *nombre rompu*, il s'appelle encore *une fraction*; ainſi un nombre qui contient deux tiers de l'unité, eſt un nombre rompu.

On marque chaque nombre rompu par deux nombres entiers de cette maniere $\frac{2}{3}$. On tire une ligne, & l'on met au deſſous le nombre qui exprime en combien de parties égales l'unité eſt diviſée, & on appelle ce nombre le *dénominateur*; on écrit ſur la ligne le nombre qui marque combien le nombre rompu contient de ces parties, & on nomme ce nombre le *numerateur*. Ainſi $\frac{2}{3}$ eſt une fraction, le dénominateur 3 marque que l'unité eſt partagée en trois parties égales qu'on nomme tiers, c'eſt à dire en trois tiers; & le numerateur 2 fait voir que la fraction $\frac{2}{3}$ contient deux de ces parties, c'eſt à dire deux tiers, ou deux fois $\frac{1}{3}$.

COROLLAIRE.

20. IL eſt évident que tous les nombres, ſoit entiers, ſoit rompus, ont entr'eux une meſure commune, qui eſt l'unité, ou quelqu'une des parties égales, dans leſquelles on peut concevoir que l'unité eſt diviſée, par laquelle ils ſont exactement meſurez.

7e DEFINITION.

21. ON démontrera dans la ſuite qu'il y a des grandeurs, qu'on peut repréſenter par des lignes droites, qui ſont telles qu'en prenant l'une de ces grandeurs pour l'unité, en quelque nombre de parties égales qu'on puiſſe la concevoir diviſée, jamais les autres n'auront pour meſure commune exacte aucune de ces parties égales. On nomme ces grandeurs *incommenſurables*, ce qui ſignifie qu'elles ne peuvent avoir aucune meſure commune. Les grandeurs incommenſurables ont des expreſſions particulieres que l'on expliquera dans la ſuite.

Principes pour les grandeurs litterales, *qu'on nomme auſſi* algebriques.

8e DEFINITION OU SUPPOSITION.

22. ON peut exprimer une grandeur quelconque par une lettre de l'alphabet : par exemple, on peut repréſenter une ligne droite donnée quelconque par la lettre *a* ; on peut exprimer une autre ligne droite differente par *b*. On peut de même exprimer un nombre quelconque donné par une lettre *a*, & un autre nombre par *b*. Il en eſt de même de toute autre grandeur.

Dans les Problêmes on repréſente les grandeurs connues par les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, &c. & les grandeurs inconnues que l'on cherche, par les dernieres *z*, *y*, *x*, &c.

On nomme les grandeurs ainſi exprimées, *litterales*, & encore *algebriques*.

AVERTISSEMENT.

LES Commençans ont d'ordinaire de la peine à ſe fixer dans l'eſprit les grandeurs que l'on repréſente par les lettres ;

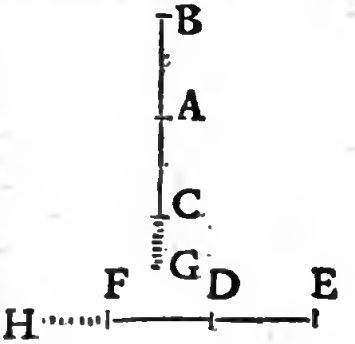
parcequ'en effet ces expreſſions litterales ne marquent pas des grandeurs particulieres, mais des grandeurs conſiderées en general; & cela eſt cauſe que quand on leur apprend le calcul de ces lettres, ils s'imaginent ne le pas apprendre; & quoiqu'il ſoit le plus facile & le plus ſimple de tous les calculs qu'on peut imaginer, & qu'ils le conçoivent d'abord, ils s'imaginent ne le pas concevoir; parcequ'ils n'attachent pas les idées particulieres des grandeurs particulieres aux expreſſions litterales, & qu'à cauſe de cela ils n'en voyent pas l'utilité. Mais ils ne doivent pas ſe rebuter, ils verront dans la ſuite que la ſcience de ce calcul litteral, & de la maniere de s'en ſervir, eſt la clef pour s'ouvrir l'entrée à toutes les decouvertes; qu'on a le plaiſir d'apprendre par ce moyen toutes les Mathematiques, comme ſi on les inventoit ſoi-même; que les Mathematiques ſont devenues ſi faciles, par l'invention de ce calcul & de la maniere de l'employer, que chaque trait de plume donne naiſſance à des découvertes; qu'on a fait des progrès ſurprenans dans les Mathematiques depuis l'invention de ce calcul, & depuis qu'on l'applique à réſoudre les Problêmes de ces ſciences; qu'il fait trouver des réſolutions ſimples & generales de tous les cas des Problêmes qu'on veut réſoudre; & qu'il fait ſouvent découvrir avec une très grande facilité, ſous une expreſſion qui n'occupe pas une ligne, qui même quelquefois ne contient que quatre ou cinq lettres, la réſolution d'une infinité de Problêmes. Ce calcul a l'avantage d'augmenter, pour ainſi dire, l'étendue de notre eſprit, en lui repréſentant, ſous des expreſſions ſimples & abregées, les objets les plus compoſez, & l'infini même : & outre cela il ne fatigue point l'imagination.

Pour ôter aux Commençans autant qu'il eſt poſſible la peine qu'ils pourroient trouver dans les calculs des expreſſions litterales, qui ne leur peut venir que de ce qu'ils n'attacheroient à ces expreſſions que les idées generales des grandeurs en general, il eſt bon de les avertir ici qu'ils peuvent attacher à chaque lettre une ligne droite qu'ils determineront de la longueur qu'ils voudront, & ſuppoſer qu'une lettre repréſente une ligne droite, une autre lettre repréſente une autre ligne droite; & s'ils le trouvent plus commode, ils pourront ſuppoſer que l'une de ces lettres repréſente une ligne droite, qui contient un certain nombre de parties éga-

les comme un certain nombre de pouces, qu'une autre lettre repréſente une autre ligne droite qui a un autre nombre des mêmes parties égales ; cela n'empêchera pas que les lettres ne leur repréſentent les grandeurs en general : car il eſt évident qu'il n'y a pas de grandeurs qu'on ne puiſſe repréſenter par des lignes droites.

9e DEFINITION.

23. ON diſtingue les grandeurs en *poſitives* & *négatives*. Dans le commerce, par exemple, le bien qu'a un Marchand eſt une grandeur poſitive; les dettes qu'il a, ſont des grandeurs négatives. Dans les lignes & dans toutes les grandeurs qu'on peut repréſenter par les lignes, pour diſtinguer la maniere de prendre une ligne comme *CAB*, en allant de bas en haut, de la maniere de prendre la même ligne *BAC* dans le ſens contraire, en revenant de haut en bas, on nomme la ligne priſe dans l'un de ces ſens *poſitive*, & *négative* priſe en l'autre ſens. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que *CAB* priſe en allant de *C* en *B* eſt *poſitive*, elle ſera *négative* priſe en ſens contraire en deſcendant de *B* en *C*. De même ſi l'on prend *FDE* pour *poſitive*, en allant de gauche à droite, elle ſera *négative*, en revenant de droite à gauche de *E* vers *F*.



COROLLAIRE I.

24. D'où l'on voit que ces deux ſortes de grandeurs poſitives & négatives, ſont les unes aux autres des retranchemens mutuels : par exemple, la grandeur poſitive *CAB*, allant de *C* à *B*, étant poſée, ſi l'on met deſſus la négative plus petite *BA*, en retournant de *B* vers *C*, elle retranchera *BA* de la quantité poſitive *BAC*, & il ne reſtera plus de la poſitive que *CA*; & ſi l'on ajoute encore la négative *AC*, qui jointe à *BA* eſt égale à la poſitive *CB*, elle retranchera entierement la poſitive *CA*, & il reſtera zero. Si l'on met une grandeur négative *BG* plus grande que *CB*, ſur la poſitive *CB*, alors il reſtera la négative *CG*. De même ſi un Marchand a 100000 livres de bien, & qu'il ait des dettes, ſi les dettes ſont moindres que le bien, il lui reſte le ſurplus du

bien ſur les dettes; ſi elles ſont égales au bien, il ne lui reſte rien; & ſi elles ſurpaſſent ſon bien, non ſeulement il n'a rien, mais il s'en manque le ſurplus des dettes ſur le bien qu'il n'ait quelque choſe.

COROLLAIRE II.

25. IL eſt évident que zero ou le rien eſt le terme entre les grandeurs poſitives & les négatives qui les ſepare les unes des autres. Les poſitives ſont des grandeurs ajoutées à zero; les négatives ſont pour ainſi dire au deſſous de zero ou de rien; ou, pour mieux dire, zero ou le rien eſt entre les grandeurs poſitives & négatives; & c'eſt comme le terme entre les grandeurs poſitives & négatives, où commencent les unes & les autres. Par exemple dans les lignes le point C au deſſus duquel ſont les poſitives *CA*, *CB*, & au deſſous duquel ſont les négatives *CG*, eſt le terme qui les ſepare, auquel elles commencent, & d'où elles partent vers des parties oppoſées: On nomme ce terme *l'origine* des grandeurs poſitives & négatives, & à ce terme il n'y a ni grandeurs poſitives ni négatives, ainſi il y a zero ou rien. De même *F* eſt l'origine des grandeurs poſitives *FD*, *FE* qui vont à droite, & des négatives comme *FH* qui vont à gauche, & au point *F* il n'y a ni grandeurs poſitives ni négatives; ainſi il y a zero. On remarquera que c'eſt une choſe arbitraire que de prendre les poſitives dans lequel on voudra des ſens oppoſez des grandeurs poſitives & négatives, & les négatives dans l'autre ſens; mais quand dans un Problême on les a déterminées dans l'un de ces deux ſens, il faut les conſerver dans tout le Problême.

COROLLAIRE III.

26. LES grandeurs poſitives, ajoutées les unes aux autres, ne font qu'une grandeur poſitive plus grande qui les contient toutes; & de même les négatives, ajoutées enſemble, font une grandeur négative qui les contient toutes; & ce n'eſt qu'en ajoutant enſemble des poſitives & des négatives qu'elles ſe diminuent ou ſe font des retranchemens mutuels.

COROLLAIRE IV.

27. IL ſuit de tout ce que l'on vient de dire des grandeurs poſitives & négatives, que pour ôter une grandeur poſitive, il

n'y a qu'à y mettre la même grandeur négative : & que pour ôter de même une grandeur négative, il n'y a qu'à mettre la même grandeur positive. Une personne qui n'a rien aura 10000 livres si on lui donne ces 10000 livres; mais il se retranchera 10000 livres, s'il n'a rien, lorsqu'il sera une dette de 10000 livres.

10e DEFINITION, *où l'on explique les signes* + & —.

28. ON marque le signe +, qui signifie *plus*, devant les grandeurs positives; le signe —, qui signifie *moins*, devant les négatives. L'on met toujours le signe — devant les négatives; mais quand il y a plusieurs grandeurs jointes ensemble par les signes + & —, & que la premiere est positive, on sous-entend le signe + devant cette premiere sans le mettre, comme aussi quand une grandeur positive est seule. (Quand on parle des signes dans le calcul des grandeurs, on entend toujours les signes + & —). Par exemple $4 + 3 - 2$ font 5. De même $a + b - c$ exprime la grandeur qui resulte, en joignant ensemble les deux grandeurs positives representées par $a + b$, avec la grandeur négative representée par $-c$.

11e DEFINITION.

29. LE signe + marque aussi l'*addition*, & le signe — la *soustraction* ou le retranchement : c'est à dire, pour marquer qu'il faut ajouter ensemble plusieurs grandeurs; on les écrit les unes devant les autres, en mettant audevant de chacune le signe +. Par exemple $3 + 4 + 5$ signifie que les grandeurs 3, 4, 5 sont ajoutées ensemble, ce qui fait 12. Pour retrancher une grandeur d'une autre grandeur, on écrit la grandeur dont on doit faire la soustraction la priemere avec son signe, on écrit ensuite la grandeur qu'il faut retrancher en marquant au devant le signe —, par exemple $5 - 4$ signifie que le nombre 4 est retranché de 5, ce qui fait 1. Cela ne cause point d'équivoque par rapport aux grandeurs positives marquées par +, & aux grandeurs négatives marquées par —; car plusieurs grandeurs positives jointes ensemble, précedées chacune du signe +, sont ajoutées ensemble; & quand il y a des grandeurs négatives, précedées chacune
*14. du signe —, jointes aux positives, elles en sont retranchées. *

30. La seule chose à remarquer en cela sur les grandeurs négatives,

gatives, eſt que ſi l'on mettoit deux ſignes devant une grandeur négative, comme + — 3, & — — 3, le premier ſigne + dans + — 3 marqueroit l'addition de la grandeur négative — 3, ce qui ſignifieroit ſimplement — 3; car pour ajouter une grandeur négative, il faut ſimplement l'écrire avec ſon ſigne — * : le premier ſigne — dans — — 3 marqueroit la * 26.
ſouſtraction de la grandeur négative — 3, ce qui ſignifieroit + 3; car pour retrancher une grandeur négative, il faut * * 27.
l'écrire avec le ſigne +.

31. D'où l'on voit que le ſigne — devant une grandeur, ne marque qu'une oppoſition. Si cette grandeur devant laquelle eſt le ſigne — eſt poſitive ou négative, le ſigne — marque qu'il faut prendre la grandeur oppoſée. Ainſi — + a = — a, & — — a = + a.

12e DEFINITION.

32. CETTE marque = ſignifie que les grandeurs qui ſont des deux côtez de cette marque ſont égales, & on l'appelle la marque ou *le ſigne de l'égalité*. Ainſi 3 + 4 = 9 — 2 ſignifie que les grandeurs 3 & 4 ajoutées enſemble ſont égales à 9 dont on a retranché 2. $a + b = c + d$ ſignifie que les deux grandeurs a & b jointes enſemble ſont égales aux deux grandeurs c & d auſſi jointes enſemble. Les grandeurs qui ſont de chaque côté du ſigne =, s'appellent les *membres* de l'égalité. $a + b$ eſt le premier membre; $c + d$ eſt le ſecond membre.

33. Cette autre marque > ou <, qu'on peut nommer la marque *d'inégalité*, ſignifie que les grandeurs qui ſont des deux côtez de cette marque ſont inégales, & que la plus grande eſt du côté de l'ouverture, & la plus petite du côté de la pointe. Ainſi $a > b$ ſignifie que a eſt plus grande que b, & $b < a$ ſignifie que b eſt moindre que a.

13e DEFINITION.

34. LA comparaiſon que l'on fait de deux grandeurs de même eſpece, comme de deux lignes, de deux temps, de deux mouvemens, &c. ſe nomme *un rapport*, & encore *une raiſon*. On en diſtingue de deux ſortes.

Lorſqu'on compare une grandeur avec une autre de même eſpece, en conſiderant l'excès de la plus grande ſur la moindre, c'eſt à dire, la difference qu'il y a de la plus grande à la

moindre, cela s'appelle *un rapport arithmetique*, ou *une raiſon arithmetique*. Ainſi la comparaiſon de 5 à 3, en conſiderant que 2 eſt leur difference ou l'excès de 5 ſur 3, eſt un rapport arithmetique.

35. La comparaiſon que l'on fait de deux grandeurs de même eſpece, en conſiderant combien la premiere contient de fois la ſeconde, ou combien elle eſt contenue de fois dans la ſeconde, ſi elle eſt la plus petite, s'appelle *un rapport geometrique*, ou *une raiſon geometrique*.

Quand l'une des grandeurs ne contient pas exactement l'autre, ou n'y eſt pas contenue exactement, alors on conçoit l'une des deux partagée en un nombre déterminé, tel qu'on voudra, de parties égales entr'elles, & la comparaiſon qu'on fait de deux grandeurs, en conſiderant combien l'une contient de fois une des parties égales contenue dans l'autre un certain nombre de fois, eſt ce qu'on nomme *un rapport geometrique*, ou *une raiſon geometrique*. Quand on parle de *rapports* ou de *raiſons*, ſans ajouter le mot de geometrique ou d'arithmetique, on entend toujours les rapports geometriques. Par exemple ſi l'on compare une ligne de ſix pieds, qu'on ſuppoſera repreſentée par a, avec une ligne de deux pieds qu'on ſuppoſera repreſentée par b, en conſiderant qu'elle la contient trois fois, ce ſera un rapport geometrique, ou ſimplement un rapport. Si l'on compare auſſi une ligne a de ſix pieds avec une ligne d de cinq pieds, en conſiderant que a contient ſix fois la partie un pied qui eſt cinq fois dans b; ce ſera encore un rapport.

On marque un rapport geometrique comme une fraction en tirant une ligne, & écrivant ſur cette ligne le premier terme du rapport, & le ſecond terme ſous la ligne. Ainſi $\frac{6}{2}$ marque le rapport de 6 à 2. De même $\frac{a}{b}$ marque le rapport de la grandeur repreſentée par a à la grandeur repreſentée par b, & on nomme *antecedent* le premier terme a, & *conſequent* le ſecond terme b. On nomme auſſi, comme dans les fractions, le premier terme a le *numerateur*, & le ſecond b le *dénominateur*; & l'on regarde un rapport $\frac{a}{b}$ comme une fraction litterale.

36. Quand il arrive qu'en concevant l'un des termes d'un rapport partagé en tel nombre fini & déterminé qu'on voudra de parties égales, l'autre terme ne contient jamais exacte-

ment un nombre précis de fois une de ces parties égales, mais qu'il la contient un certain nombre de fois avec un reſte ; on dit que ces deux grandeurs ont un rapport geometrique *incommenſurable*.

14e DEFINITION.

37. QUAND on a un rapport $\frac{a}{b}$, le rapport $\frac{b}{a}$ s'appelle le rapport *inverſe* du premier, lequel premier eſt appellé *direct*, eu égard au ſecond.

15e DEFINITION.

38. QUAND l'antecedent & le conſequent d'un rapport ſont égaux, on le nomme *un rapport d'égalité*. quand ils ſont inégaux, on le nomme *un rapport d'inégalité*.

AXIOME.

39. DANS les rapports d'inégalité plus l'antecedent eſt grand par rapport au conſequent, & plus le rapport eſt grand : & plus l'antecedent eſt petit par rapport au conſequent, & plus le rapport eſt petit. Ainſi une ligne de 100 toiſes a un plus grand rapport à une ligne de 20 toiſes qu'à une ligne de 50 toiſes; & une ligne de 20 toiſes a un moindre rapport à une ligne de 100 toiſes qu'à une ligne de 50 toiſes.

COROLLAIRE I.

40. D'où il ſuit que le rapport d'une grandeur à zero eſt infiniment grand, puiſqu'une grandeur réelle eſt infiniment grande par rapport à rien; & que le rapport de zero à une grandeur eſt infiniment petit, par une raiſon contraire.

REMARQUE.

ON peut remarquer ſur ce premier Corollaire qu'on ne peut pas faire la comparaiſon ou le rapport d'une grandeur à une choſe qui n'eſt pas de même nature; par exemple, on ne peut pas comparer une ligne avec un corps ſolide. Ainſi à parler exactement on ne peut pas comparer une grandeur avec le neant qui ne participe point à l'être, bien loin d'être de la même nature ou de la même eſpece d'être, qu'eſt la grandeur qu'on lui compare. Mais toute grandeur étant conçue diviſible à l'infini, on peut concevoir une partie de cette grandeur

qui ſoit ſi petite qu'elle ne differe, pour ainſi dire, preſque pas du neant, & qui ſoit telle que cette grandeur comparée à cette partie ſoit infiniment grande par rapport à elle, & que cette partie comparée à cette grandeur ſoit infiniment petite; c'eſt cette partie infiniment petite qu'on nomme zero, & qu'on regarde comme zero dans ce premier Corollaire.

COROLLAIRE II.

41. SI une même grandeur, qu'on nommera A, étant comparée à deux autres qu'on nommera B & C, a un plus grand rapport à la premiere B qu'à la ſeconde C, il eſt évident que B eſt plus petite que C. Si B & C étant comparées à A, le rapport de B à A eſt plus petit que celui de C à A, il eſt clair que B eſt moindre que C. Enfin ſi B eſt moindre que C, le rapport de B à A eſt moindre que le rapport de C à A.

COROLLAIRE III.

42. SI $\frac{A}{B}$ exprime un rapport d'inégalité, on peut le rendre plus petit qu'il n'eſt de deux façons, 1°. en diminuant l'antecedent A d'une grandeur C, ſans diminuer le conſequent B. 2°. en augmentant le conſequent B d'une grandeur C, ſans augmenter l'antecedent. Ainſi $\frac{A-C}{B}$ & $\frac{A}{B+C}$ ſont de moindres rapports que $\frac{A}{B}$. D'où l'on voit qu'il faut faire le contraire pour rendre le rapport $\frac{A}{B}$ plus grand qu'il n'eſt.

REMARQUE.

ON doit remarquer qu'un rapport pouvant être augmenté & diminué, & pouvant être egal ou inégal à un autre rapport, eſt une grandeur; & que par conſequent les rapports égaux peuvent être regardez comme des grandeurs égales, & les rapports inégaux comme des grandeurs inégales. Par exemple les rapports de 1 à 2, de 2 à 4, ſont des grandeurs égales; les rapports de 1 à 2, de 1 à 3, ſont des grandeurs inégales.

Pour concevoir cela clairement, il faut remarquer qu'un rapport peut être regardé de deux façons, comme un rapport & comme une grandeur, ce qu'on entendra mieux par des exemples; une ligne d'un pied comparée à une ligne de deux pieds, en eſt la moitié; une ligne d'un pied comparée à une

ligne de trois pieds, en eſt le tiers. Quand on ne conſidere que cette comparaiſon de l'antecedent au conſequent, on ne regarde que le rapport de l'un à l'autre. Le rapport lui-même peut auſſi être regardé comme une grandeur, voici comment. Quand on compare le rapport lui-même à l'unité, par exemple quand on compare le rapport $\frac{1}{2}$ une moitié, ou $\frac{1}{3}$ un tiers avec l'unité; une moitié contient une des parties dont l'unité en contient deux; un tiers contient une des parties dont l'unité en contient trois. Il eſt évident qu'en regardant ainſi un rapport, c'eſt une grandeur, & que $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{4}$ ſont deux grandeurs égales; que $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſont deux grandeurs inégales.

AXIOME.

43. SI un rapport $\frac{A}{B}$ eſt plus grand qu'un autre rapport $\frac{C}{D}$, il eſt plus grand que tout autre rapport égal à $\frac{C}{D}$, ou moindre que $\frac{C}{D}$.

16e DEFINITION.

44. QUAND on compare les rapports des grandeurs entr'eux, la comparaiſon de deux rapports égaux, ou l'égalité de deux rapports s'appelle *une proportion arithmetique*, quand les rapports égaux ſont arithmetiques; elle ſe nomme *une proportion geometrique*, ou ſimplement *une proportion*, quand les rapports égaux ſont geometriques. Ainſi la difference de 4 à 6 qui eſt deux, étant égale à la difference de 8 à 10, les quatre nombre 4, 6, 8, 10 ſont une proportion arithmetique. Le rapport geometrique de 8 à 4 étant égal au rapport geometrique de 2 à 1, les quatre nombres 8, 4, 2, 1 ſont une proportion geometrique, ou ſimplement une proportion.

On marquera une proportion arithmetique de cette maniere 4 . 6 : 8 . 10, ce qui ſignifiera que la difference de 4 & de 6 eſt égale à la difference de 8 & de 10.

On marquera une proportion geometrique de l'une ou l'autre de ces manieres, $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$; 8 . 4 :: 2 . 1. On l'énonce de toutes ces façons : les quatre grandeurs 8, 4, 2, 1 ſont proportionnelles, ou ſont en proportion, ou ſont une proportion : le rapport de 8 à 4 eſt égal au rapport de 2 à 1; ou la raiſon de 8 à 4 eſt égale à la raiſon de 2 à 1; le premier terme 8 eſt au ſecond 4, comme le troiſiéme 2 eſt au quatriéme 1; 8 & 4 ſont entr'eux comme 2 & 1.

Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent *les extrêmes*; le ſecond & le troiſiéme, *les moyens*. Le premier & le troiſiéme ſe nomment auſſi *les antecedents*; le ſecond & le quatriéme *les conſequents*.

17ᵉ DÉFINITION.

45. UNE partie d'une grandeur qui eſt contenue dans cette grandeur pluſieurs fois exactement, s'appelle une partie *aliquote* de cette grandeur; & cette grandeur s'appelle *multiple* de ſon aliquote, & l'on nomme auſſi l'aliquote *ſous-multiple* de cette grandeur. Ainſi l'unité eſt une aliquote de tous les nombres entiers. Un pied eſt une aliquote de trois pieds, de quatre pieds, &c. trois pieds eſt multiple d'un pied, & un pied eſt ſous-multiple de trois pieds. De même une ligne de cinq pieds eſt une aliquote d'une ligne de quinze pieds.

Une grandeur étant conçue partagée dans un nombre quelconque de parties égales, ſi une autre grandeur eſt conçue partagée dans le même nombre de parties égales entr'elles, quoiqu'elles ſoient inégales aux parties égales de la premiere, on nomme ces parties égales de la premiere & de la ſeconde, *parties pareilles* ou ſemblables, ou *aliquotes pareilles* ou ſemblables de ces deux grandeurs, & ces grandeurs ſont nommées *équimultiples* de ces parties. Ainſi un pied & une toiſe ſont les parties pareilles ou aliquotes pareilles, la premiere de trois pieds, la ſeconde de trois toiſes. Une ligne de trois pieds & une ligne de trois toiſes ſont équimultiples, la premiere d'un pied, la ſeconde d'une toiſe. De même trois pieds & trois toiſes ſont les parties ſemblables de 15 pieds & de 15 toiſes.

Axiomes ſur les aliquotes.

46. TOUTE grandeur peut être conçue partagée en tel nombre de parties égales qu'on voudra.

L'aliquote d'une grandeur eſt auſſi l'aliquote de toutes les grandeurs multiples de cette grandeur. Ainſi un pied qui eſt aliquote de 3 pieds, eſt auſſi aliquote de deux fois 3 pieds, de trois fois 3 pieds, &c.

18e DEFINITION, *où l'on donne une notion diſtincte de ce qui fait une proportion geometrique, il faut ſe la rendre très familiere.*

47. QUATRE grandeurs, qu'on peut repréſenter par quatre lignes droites, dont la premiere ſera nommée *a*, la ſeconde *b*, la troiſiéme *c*, & la quatriéme *d*, ſont en proportion : lorſque les antecedents, c'eſt à dire la premiere *a* & la troiſiéme *c*, étant conçues partagées dans le même nombre d'aliquotes *ſemblables*, ou de parties égales ſemblables, chaque conſequent contient le même nombre de parties égales de ſon antecedent ; c'eſt à dire la ſeconde *b* contient autant d'aliquotes de la premiere *a*, que la quatriéme *d* contient d'aliquotes ſemblables de la troiſiéme *c*.

Ainſi une ligne *a* de 5 toiſes eſt à une ligne *b* de 3 toiſes, comme une ligne *c* de 5 pieds eſt à une ligne *d* de 3 pieds.

De même une ligne *a* de 5 toiſes eſt à une ligne *b* de 3 toiſes, comme une ligne *c* de 20 toiſes ou de 5 fois 4 toiſes eſt à une ligne *d* de 12 toiſes ou de 3 fois 4 toiſes.

COROLLAIRE.

48. IL eſt évident que ce ſeroit la même notion, ſi l'on diſoit que quatre grandeurs repréſentées par *a*, *b*, *c*, *d* ſont en proportion, lorſque les conſéquents, c'eſt à dire, la ſeconde *b* & la quatriéme *d* étant conçues partagées dans le même nombre d'aliquotes ſemblables, chaque antecedent contient le même nombre de parties égales de ſon conſequent : c'eſt à dire, que la premiere *a* contient autant d'aliquotes de ſon conſequent *b*, que la troiſiéme *c* contient d'aliquotes ſemblables de ſon conſequent *d*.

49. On exprimera ici une proportion de ces deux manieres generales, 1°, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, les quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d* pouvant repréſenter quatre grandeurs quelconques à qui convient la notion generale de proportion qu'on vient de donner. 2°. Par le moyen des aliquotes. Pour cela on ſuppoſera que *x* repréſente la partie égale ou l'aliquote qui eſt exactement contenue pluſieurs fois dans chacun des termes *a* & *b* du premier raport $\frac{a}{b}$; que *n* repréſente le nombre de fois que l'aliquote *x* eſt dans l'antecedent *a*, & *m* le nombre de fois que la même aliquote *x* eſt dans le conſequent *b*. Ainſi ſuppoſé que *a* contienne *x*, 5 fois, 10 fois, 100, &c. au lieu d'écrire 5*x*, 10*x*, 100*x*, &c.

ce qui ſeroit une expreſſion particuliere, on écrira nx, & de cette façon nx repréſente d'une maniere generale tous les nombres poſſibles d'aliquotes, dans leſquelles on peut concevoir que a eſt diviſée, & l'on a $a = nx$; & de même mx repréſente le nombre de fois que le conſequent b contient la même aliquote x, quelque nombre entier que puiſſe être m: par conſéquent $b = mx$. On ſuppoſera de même que y repréſente l'aliquote ſemblable de l'antecedent c; & comme y doit être dans c le même nombre de fois marqué par n que x eſt dans a, & dans d le même nombre de fois marqué par m que x eſt dans b, l'on aura $c = ny$, & $d = my$. Ainſi l'expreſſion generale d'une proportion par le moyen des aliquotes, ſera $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my}$.

Ainſi chaque proportion particuliere, comme $\frac{5\ pieds}{3\ pieds} = \frac{5\ toiſes}{3\ toiſes}$, ſera repréſentée, 1°, par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. 2°, par $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my}$, & n vaut ici 5; m, 3; x, un pied; y, une toiſe.

Quand on aura trois rapports égaux, on les exprimera de cette maniere $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my} = \frac{nz}{mz}$. On peut, pour fixer l'imagination, appliquer cette expreſſion à trois rapports particuliers égaux, comme à $\frac{5\ pieds}{3\ pieds} = \frac{5\ toiſes}{3\ toiſes} = \frac{5\ lieues}{3\ lieues}$.

On peut remarquer que quand $n = m$, les rapports égaux $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my} = \frac{nz}{mz}$ deviennent $\frac{nx}{nx} = \frac{ny}{ny} = \frac{nz}{nz}$ qui ſont des rapports d'égalité, dont chacun eſt égal à $\frac{1}{1}$, puiſque chaque conſequent eſt contenu une fois dans ſon antecedent.

Application de la notion de proportion, expliquée dans la définition précedente, aux grandeurs incommenſurables.

50. DEUX rapports incommenſurables * qu'on repréſentera *36. par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ſont égaux ou font une proportion, lorſqu'en concevant l'antecedent a, partagé en quelque nombre entier que ce puiſſe être de parties égales entr'elles, & qu'en concevant l'antecedent c auſſi partagé dans le même nombre d'autres parties égales entr'elles, il arrive toujours que le conſequent b contient autant de parties égales de ſon antecedent a, avec un petit reſte qu'on nommera R, que le conſequent d contient de parties ſemblables de ſon antecedent c, avec un petit reſte qu'on appellera R.

Explication. a, b, c, d repréſentent quatre lignes droites, *36. on ſuppoſe que le rapport $\frac{a}{b}$ des deux premieres eſt * incommenſurable,

menſurable, comme auſſi le rapport $\frac{c}{d}$ des deux dernieres, & que ces deux rapports ſont égaux. Voici la maniere dont on conçoit égaux ces deux rapports incommenſurables.

1°. On conçoit la premiere grandeur a partagée en tel nombre d'aliquotes qu'on voudra : par exemple, en cent aliquotes, dont chacune ſe nommera X, & que la ſeconde grandeur b contient tel nombre qu'on voudra de ces aliquotes, par exemple 50, & de plus un petit reſte R moindre qu'une de ces aliquotes. On conçoit en même temps la troiſiéme grandeur c partagée en autant d'aliquotes, dont chacune ſe nommera Y, qu'il y en a dans a, c'eſt à dire en 100 Y; & que la quatriéme grandeur d contient autant de ces aliquotes Y, que b contient d'aliquotes X, & qu'il y a de plus un petit reſte R moindre que Y : ainſi $\frac{a}{b} = \frac{100X}{50X+R}$, & $\frac{c}{d} = \frac{100Y}{50Y+R}$.

2°. On peut concevoir chaque X partagée en tel nombre qu'on voudra d'aliquotes, dont chacune ſera nommée x, plus petites chacune que R, par exemple en 1000x, & en même temps chaque Y partagée dans le même nombre d'aliquotes, dont chacune s'appellera y, c'eſt à dire en 1000y. Le conſequent b doit par la ſuppoſition contenir, 1°, cinquante fois mille x. 2°, mais comme x eſt ſuppoſée moindre que R, x doit être en R un certain nombre de fois, qu'on ſuppoſera être dix fois, avec un nouveau petit reſte qu'on nommera r. Ainſi $b = 50000x + 10x + r$. Le ſecond conſequent d doit auſſi contenir cinquante fois mille y plus dix y plus un nouveau reſte qu'on nommera r, & l'on aura après ce partage $\frac{a}{b} = \frac{1000000x}{500010x+r}$, & $\frac{c}{d} = \frac{1000000y}{500010y+r}$.

3°. On peut concevoir que le partage des aliquotes x & y eſt continué en un même nombre, tel qu'on voudra, d'aliquotes pareilles plus petites, & le partage de celles-ci en un même nombre, tel qu'on voudra, d'autres aliquotes pareilles plus petites, & ainſi à l'infini, & dans chaque partage le reſte r du partage précedent des x, & le reſte r du partage précedent des y doivent donner chacun un même nombre d'aliquotes pareilles avec un nouveau petit reſte, & toujours de même à l'infini.

Nommant n tel nombre entier qu'on voudra, tant grand qu'il puiſſe être, & prenant ce nombre pour exprimer le nombre des aliquotes de a, dont chacune ſera nommée X, on aura $a = nX$.

Nommant auſſi Y l'aliquote ſemblable de c, on aura $c = nY$.

Nommant m le nombre entier qui exprime combien de fois ces aliquotes pareilles X & Y ſont contenues dans les conſequens b & d, R le petit reſte de b, & R le petit reſte de d, on aura $b = mX + R$, & $d = mY + R$, & l'expreſſion des deux rapports incommenſurables égaux par le moyen des aliquotes, ſera $\frac{nX}{mX+R} = \frac{nY}{mY+R}$.

Cette expreſſion peut ſervir pour tous les partages qu'on peut concevoir à l'infini des aliquotes X & Y en d'autres nouvelles plus petites, & de celles-ci en d'autres nouvelles à l'infini, en ſuppoſant que X exprime l'aliquote de chaque partage pour le premier rapport, & Y l'aliquote ſemblable du même partage pour le ſecond rapport; que n repréſente le nombre des aliquotes pareilles des antecedens, m le nombre des aliquotes pareilles des conſequens, & R le petit reſte du conſequent du premier rapport, & R le petit reſte du conſequent du ſecond rapport.

Il ne peut arriver dans aucun de ces partages à l'infini, que le reſte R du premier conſequent donne un nombre d'aliquotes X, différent du nombre des aliquotes pareilles Y que donnera le reſte R du ſecond conſequent; car ſi l'un de ces deux reſtes, par exemple R, donnoit dans le partage ſuivant une ſeule aliquote de plus que l'autre, l'on auroit dans ce partage pour l'expreſſion de la proportion $\frac{nX}{mX+R}$
*39. $= \frac{nY}{mY+Y+R}$. Or il eſt évident * que le premier de ces rapports eſt plus grand que le ſecond; car en mettant dans le conſequent $mX + R$, X plus grande par la ſuppoſition que
*39. le petit reſte R; à la place de R, on auroit * $\frac{nX}{mX+R} > \frac{nX}{mX+X}$,
*47. & $\frac{nX}{mX+X}$ * $= \frac{nY}{mY+Y}$, donc $\frac{nX}{mX+R}$ ſurpaſſe * $\frac{nY}{mY+Y}$. Or $\frac{nY}{mY+Y}$ ſur-
& 49. paſſe * $\frac{nY}{mY+Y+R}$; donc $\frac{nX}{mX+R}$ ſurpaſſe $\frac{nY}{mY+Y+R}$. Ainſi dans
*39. chaque partage à l'infini, chacun des reſtes R & R doit four-
*39. nir pour le partage ſuivant un même nombre d'aliquotes pareilles, afin que les deux rapports incommenſurables $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſoient égaux.

Mais après des partages infinis on conçoit que les reſtes R & R ſont enfin épuiſez, en fourniſſant toujours un même nombre d'aliquotes pareilles dans chaque partage.

51. D'où l'on peut voir que la notion de deux rapports égaux ou d'une proportion, peut être commune aux rapports commenſurables & incommenſurables; ſçavoir, que deux rapports ſont égaux, quand les antecedens étant conçus partagez dans le même nombre entier d'aliquotes ſemblables X & Y, quel que puiſſe être ce nombre, chacun des conſequens contient le même nombre des aliquotes pareilles de ſon antecedent; mais dans les rapports commenſurables, le même nombre des aliquotes ſemblables X & Y des antecedens eſt fini, & le même nombre des mêmes aliquotes ſemblables X & Y des conſequens eſt auſſi fini: au lieu que ce qui fait deux rapports incommenſurables égaux, eſt qu'en concevant les deux antecedens partagez dans le même nombre infini d'aliquotes pareilles X & Y, chacun des conſequens contient l'aliquote pareille de ſon antecedent le même nombre infini de fois. Ainſi l'expreſſion $\frac{nX}{mX} = \frac{nY}{mY}$ peut être commune à deux rapports égaux commenſurables, & à deux rapports incommenſurables, en ſuppoſant que les nombres repréſentez par n & m ſont finis pour les deux premiers, & infinis pour les ſeconds.

Ainſi ce que l'on démontrera dans la ſuite, par le moyen de cette expreſſion de deux rapports égaux, conviendra à deux rapports égaux commenſurables, & à deux rapports égaux incommenſurables.

REMARQUE.

CE ſeroit la même notion de deux rapports incommenſurables égaux, que de dire, qu'en quelque même nombre d'aliquotes que ce puiſſe être qu'on conçoive partagez les conſequens de ces deux rapports, leurs antecedens doivent contenir chacun le même nombre d'aliquotes ſemblables de ſon conſequent avec un petit reſte.

Corollaires qu'il faut ſe rendre très familiers.

1.

52. LES rapports égaux à un même rapport, ou à des rapports égaux, ſont égaux entr'eux. Ce Corollaire eſt un axiome après ce qui précede.

2.

53. Une même grandeur A ne ſçauroit avoir le même rapport à d'autres grandeurs B & C, que ces autres là ne ſoient éga-

les ; & plusieurs grandeurs B & C ne sçauroient avoir le même rapport avec une même grandeur A, qu'elles ne soient aussi égales ; & des grandeurs égales étant comparées à des grandeurs égales, elles ont des rapports égaux ; si $a = c$, & $b = d$, les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont égaux. Ce Corollaire est très évident.

3.

54. Lorsque les trois premiers termes a, b, c d'une proportion sont donnez, la grandeur du quatriéme d est déterminée, c'est à dire, il ne peut y avoir pour le quatriéme terme plusieurs grandeurs differentes, dont les unes soient plus grandes, les autres plus petites; mais il n'y a qu'une même grandeur qui puisse être le quatriéme terme d; & toutes les grandeurs qui peuvent être le quatriéme terme, sont égales & peuvent être prises pour la même. Car le premier rapport $\frac{a}{b}$ étant déterminé, le rapport de c au quatriéme terme d est égal au rapport de a à b. Or une même grandeur c ne peut pas avoir
*53. un même rapport * à des grandeurs inégales, mais seulement à des grandeurs égales qui peuvent être prises chacune pour la même grandeur.

Il est évident par la même preuve, que pourvû que trois termes d'une proportion soient déterminez ou donnez, il n'importe pas que ce soient les trois premiers, le quatriéme, qui est celui qui reste, est toujours determiné. Ainsi la proportion étant $a . b :: c . d$. 1°. Si b, c, d sont trois grandeurs déterminées, a est aussi déterminée. 2°. Si a, c, d sont déterminées, b l'est aussi. 3°. Si a, b, d, sont déterminées, c l'est aussi. 4°. Si a, b, c sont déterminées, d l'est aussi : car dans tous ces cas il y a un des deux rapports de la proportion qui est déterminé, le second rapport doit être égal à ce premier : ainsi un des termes de ce second rapport étant déterminé, l'autre terme est nécessairement déterminé.

4.

55. Quand deux ou plusieurs rapports, soit commensurables, soit incommensurables, sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, leurs rapports inverses $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{f}{e}$, sont aussi égaux.

Il n'y a qu'à exprimer ces rapports égaux par le moyen des aliquotes, pour voir que la notion des rapports égaux convient à leurs rapports inverses ; car ces rapports égaux se-

ront * $\frac{nX}{mX} = \frac{nY}{mY} = \frac{nZ}{mZ}$, & leurs rapports inverſes ſeront $\frac{mX}{nX} = \frac{mY}{nY} = \frac{mZ}{nZ}$, auſquels convient la notion des rapports égaux. * *47. *47.

Si l'on vouloit une démonſtration particuliere pour les rapports incommenſurables, la voici.

Soient les deux rapports incommenſurables égaux repreſentés par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, il faut démontrer que leurs rapports inverſes $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ ſont auſſi égaux, & qu'on ne ſçauroit les ſuppoſer inégaux, qu'on ne tombe dans une contradiction. Car ſuppoſant que l'un des deux, lequel on voudra comme le premier $\frac{b}{a}$, eſt moindre que l'autre $\frac{d}{c}$; qu'on ajoute à b la grandeur z, qui ſoit telle que $\frac{b+z}{a} = \frac{d}{c}$; que l'on conçoive le conſequent a partagé en tel nombre n de parties égales qu'on voudra, dont chacune, qui ſera nommée X, ne ſurpaſſe pas z; que m marque le nombre de fois que l'aliquote X eſt dans b avec un reſte; & comme on ſuppoſe qu'elle ne ſurpaſſe pas z, elle ſera au moins une fois dans z exactement, ou avec un reſte; & pour abreger, on nommera R la ſomme de ces deux reſtes, s'il y en a deux; ainſi $\frac{b+z}{a} = \frac{mX+X+R}{nX}$. Que l'on conçoive c partagée dans le même nombre n de parties égales, dont chacune ſera nommée Y, ainſi $c = nY$. Il eſt évident * que Y ſera contenue dans d le nombre de fois qui eſt marqué par m, avec un reſte R. Ainſi $\frac{d}{c} = \frac{mY+R}{nY}$; mais $\frac{mX+X+R}{nX} > * \frac{mX+R}{nX}$; & $\frac{mX+R}{nX} = * \frac{mY+R}{nY}$. Donc $\frac{mX+X+R}{nX}$ (qui eſt égal par la ſuppoſition à $\frac{b+z}{a}$) eſt plus grand que $\frac{mY+R}{nY}$, ou ſon égal $\frac{d}{c}$. Or le même rapport ne peut pas être égal à un autre & en même temps plus grand que cet autre là. On tombe donc dans une contradiction, en ſuppoſant que les rapports inverſes $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ ſont inégaux. *50. *39. *48. & 50.

COROLLAIRE V.

56. LORSQUE pluſieurs rapports, ſoit commenſurables, ſoit incommenſurables, ſont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, la ſomme des antecedens $a+c+e$ eſt à la ſomme des conſequens $b+d+f$, comme un ſeul antecedent a eſt à ſon conſequent b; c'eſt à dire $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$. Il n'y a qu'à exprimer ces rapports égaux par leurs aliquotes, pour voir clairement que la notion * des rapports égaux leur convient. On aura $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ *47.

47. $= \frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ}$, & $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX}$. Or $\frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ} = \frac{nX}{mX}$ *; car il eſt évident que l'aliquote $X+Y+Z$ eſt dans $nX+nY+nZ$ le nombre de fois qui eſt repreſenté par n, & dans $mX+mY+mZ$ le nombre de fois marqué par m; & l'aliquote pareille X eſt dans nX le nombre de fois qui eſt marqué par n, & dans mX le nombre de fois qui eſt marqué par m.

Par exemple, ſi n vaut 10, & ſi m vaut 5, l'on aura $\frac{10X+10Y+10Z}{5X+5Y+5Z} = \frac{10X}{5X}$. Il eſt évident que $X+Y+Z$ eſt dix fois dans $10X+10Y+10Z$, & cinq fois dans $5X+5Y+5Z$. Ainſi $X+Y+Z$ & X ſont les aliquotes pareilles des antecedens qui ſont contenues le même nombre de fois dans les conſequens.

La démonſtration eſt generale par l'article 51, tant pour les rapports commenſurables, que pour les incommenſurables : en voici cependant une particuliere pour les rapports incommenſurables. On peut exprimer les rapports incom-

50. menſurables égaux de cette maniere * $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX+R}$, $\frac{c}{d} = \frac{nY}{mY+R}$, $\frac{e}{f} = \frac{nZ}{mZ+r}$. Il faut donc démontrer que $\frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ+R+R+r} = \frac{nX}{mX+R}$, ce qui eſt facile; car $X+Y+Z$ & X, ſont les aliquotes ſemblables des antecedens qui y ſont contenues le même nombre de fois qui eſt marqué par n, tel qu'il puiſſe être : or la premiere $X+Y+Z$ eſt contenue dans le premier conſequent le nombre de fois qui eſt marqué par m, & il y a de plus le reſte $R+R+r$; la ſeconde X eſt contenue dans le ſecond conſequent le même nombre de fois marqué par m, & il y a de

50. plus le reſte R. Par conſequent $\frac{nX+nY+nZ}{mX+mY+mZ+R+R+r}$ * $= \frac{nX}{mX+R}$.

COROLLAIRE VI.

57. LORSQUE deux rapports, ſoit commenſurables, ſoit incommenſurables, ſont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; la difference des antecedens $a-c$ eſt à la difference des conſequens $b-d$, comme un ſeul antecedent a eſt à ſon conſequent b. Il faut démontrer que $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$. *Par l'article* 49, $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX}$, & $\frac{c}{d} = \frac{nY}{mY}$. Ainſi $\frac{a-c}{b-d} = \frac{nX-nY}{mX-mY}$. Mais $X-Y$ eſt une aliquote de $nX-nY$, qui y eſt contenue le nombre de fois qui eſt repreſenté par n, & qui eſt tel qu'on voudra; & X eſt l'aliquote

ſemblable de nX, qui y eſt contenue le même nombre de fois marqué par n; & la premiere de ces aliquotes pareilles, ſçavoir $X - Y$ eſt contenue dans $mX - mY$ le nombre de fois qui eſt exprimé par m, & l'aliquote pareille X eſt contenue dans mX le même nombre de fois. Donc * $\frac{nX-nY}{mX-mY} = \frac{nX}{mX}$. * 51.

Démonſtration particuliere pour les rapports incommenſurables. $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX+R}$; $\frac{c}{d} = \frac{nY}{mY+R}$. Donc * $\frac{nX-nY}{mX-mY+R-S} = \frac{nX}{mX+R}$. * 50. Car $X - Y$, & X aliquotes pareilles des antecedens ſont contenues la premiere dans le premier conſequent, la ſeconde dans le ſecond conſequent, le même nombre de fois chacune avec un petit reſte.

REMARQUES.

1.

58. ON énonce les deux derniers Corollaires précedens de cette autre façon. Un rapport $\frac{a}{b}$ demeure toujours le même ſi l'on ajoute à l'antecedent a, du rapport $\frac{a}{b}$, une grandeur c, & qu'on ajoute en même temps au conſequent b une grandeur d; ou bien ſi l'on ôte de a la grandeur c, & de b la grandeur d, & que les grandeurs ajoutées ou rétranchées c & d ſoient entr'elles comme a eſt à b: c'eſt à dire, ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$, & encore $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$.

2.

59. MAIS un rapport $\frac{a}{b}$ ne demeurera plus le même, ſi l'on ajoute une grandeur c à un ſeul de ſes deux termes; ou ſi on l'en retranche, ſans rien ajouter à l'autre, ou ſans en rien retrancher: c'eſt à dire que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b}$ & $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+c}$; & de même $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b}$, & $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-c}$. Cela eſt évident *. * 42.

3.

60. SI l'on ajoute la grandeur e à l'antecedent a du rapport $\frac{a}{b}$, ou ſi l'on en retranche la grandeur e, & qu'on ajoute en même temps au conſequent b la grandeur f, ou qu'on l'en retranche; & que les grandeurs e & f ne ſoient pas entr'elles comme a eſt à b; le rapport n'eſt plus le même: c'eſt à dire, ſi $\frac{a}{b}$ n'eſt pas égal à $\frac{e}{f}$, neceſſairement $\frac{a}{b}$ ne ſera pas égal à $\frac{a+e}{b+f}$, ni à $\frac{a-e}{b-f}$. Car en concevant a & e partagées dans le même

nombre n d'aliquotes ſemblables qui ſoient X & Y, l'on aura $a = nX$, & $e = nY$. Or ſi m marque le nombre de fois que l'aliquote X eſt dans b, le même nombre m ne pourra pas marquer le nombre de fois que Y eſt dans f, puiſqu'il fau-
*47. droit * qu'on eût ſuppoſé les deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ égaux, afin que cela arrivât, & on les a ſuppoſé inégaux. Ainſi ce ſera neceſſairement un autre nombre, qu'on nommera p, qui marquera combien de fois Y eſt dans f, & l'on aura $b = mX$, & $f = pY$. Par conſequent l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX}$, $\frac{a+e}{b+f} = \frac{nX+nY}{mX+pY}$, $\frac{a-e}{b-f} = \frac{nX-nY}{mX-pY}$. Or il eſt évident que X, $X+Y$, $X-Y$ ſont les aliquotes pareilles des antecedens nX, $nX+nY$, $nX-nY$; & que l'aliquote X n'eſt pas dans le conſequent mX le même nombre de fois que les aliquotes pareilles $X+Y$ & $X-Y$ ſont dans les conſequens $mX+pY$, $mX-pY$. Par conſequent le rapport $\frac{nX}{mX}$ ou $\frac{a}{b}$ n'eſt pas égal au rapport $\frac{nX+nY}{mX+pY}$ ou à ſon égal $\frac{a+e}{b+f}$, ni à $\frac{nX-nY}{mX-pY}$, ou à ſon égal $\frac{a-e}{b-f}$.

COROLLAIRE VII.

61. SUPPOSE' que $\frac{X}{Y}$ repréſente un rapport quelconque: deux grandeurs, dont l'une contient exactement l'antecedent X un nombre de fois quelconque repreſenté par n, & dont l'autre contient le conſequent Y le même nombre de fois marqué par n, ont le même rapport que X à Y; comme auſſi deux grandeurs dont l'une eſt contenue autant de fois dans X, que l'autre eſt contenue dans Y; c'eſt à dire $\frac{X}{Y} = \frac{2X}{2Y} = \frac{3X}{3Y} = \frac{4X}{4Y} =$ &c.

comme auſſi $\frac{X}{Y} = \frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{\frac{1}{3}X}{\frac{1}{3}Y} = \frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y} =$ &c. ce qu'on peut ainſi marquer en general $\frac{X}{Y} = \frac{nX}{nY}$, en ſuppoſant que n repréſente un nombre quelconque entier ou rompu.

Démonſtration. Il eſt évident que tous ces rapports ſont égaux $\frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} =$ &c. donc la ſomme des antecedens de tel nombre de ces rapports qu'on voudra, par exemple $5X$, eſt à la ſomme du même nombre de conſéquens,
*56. $5Y$ * comme un ſeul antecedent X eſt à un ſeul conſequent Y. Ainſi $\frac{X}{Y} = \frac{5X}{5Y} = \frac{10X}{10Y} = \frac{nX}{nY}$.

On

On démontrera la même choſe des grandeurs contenues le même nombre de fois, l'une dans X, & l'autre dans Y.

Par exemple, que $\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y} = \frac{X}{Y}$: car $\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y} = \frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{\frac{2}{4}X}{\frac{2}{4}Y} = \frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y}$.

Donc la ſomme des antecedens qui eſt quatre quarts de X, c'eſt à dire X entiere, eſt à la ſomme des conſequens, qui eſt quatre quarts de Y, c'eſt à dire Y entiere, * comme un quart de X eſt à un quart de Y; ainſi $\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y} = \frac{X}{Y}$ * 56.

COROLLAIRE VIII.

62. QUAND deux rapports ſont égaux comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; le rapport des antecedens eſt égal à celui des conſequens, c'eſt à dire $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Démonſtration $\frac{a}{b} = * \frac{nX}{mX}$, & $\frac{c}{d} = * \frac{nY}{mY}$. Ainſi $\frac{a}{c} = \frac{nX}{nY}$, * 49 & & $\frac{b}{d} = \frac{mX}{mY}$. Mais $\frac{nX}{nY} = * \frac{X}{Y}$, & $\frac{mX}{mY} = * \frac{X}{Y}$. Donc $\frac{nX}{nY} = \frac{mX}{mY}$; * 61. c'eſt à dire $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, *ce qu'il falloit démontrer*.

18e DEFINITION.

QUAND on a une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. qu'on appellera directe, la proportion $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ qui s'en déduit néceſſairement, s'appelle *alterne*: & comme elle eſt de grand uſage, il faut ſe la rendre ſi familiere, qu'on la reconnoiſſe d'abord, ſans qu'il ſoit beſoin de marquer ce nom d'*alterne* pour en faire ſouvenir.

Démonſtration particuliere de la proportion alterne de deux rapports égaux incommenſurables qu'on repreſentera par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Il faut démontrer que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. *Par l'article* 50 $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX+R}$ & $\frac{c}{d} = \frac{nY}{mY+R}$. Ainſi il faut démontrer que $\frac{nX}{nY} = \frac{mX+R}{mY+R}$. Il eſt déja évident par la démonſtration précedente & *par l'article* 61, que $\frac{nX}{nY} = \frac{mX}{mY}$; puiſque l'un & l'autre eſt égal à $\frac{X}{Y}$. Ainſi il faut démontrer que $\frac{R}{R} = \frac{X}{Y}$; car alors la ſomme des antecedens $mX + R$ des deux rapports égaux $\frac{mX}{mY}$ & $\frac{R}{R}$, ſera à la ſomme des conſequens $mY + R$, comme * mX eſt à mY, ou comme nX eſt à nY. * 56.

Le rapport $\frac{R}{R}$ ne peut être ni plus grand ni plus petit que $\frac{X}{Y}$;

*42. ainſi il lui eſt égal. 1°, s'il étoit plus grand, qu'on le diminue * en ajoutant au conſequent R une grandeur z qui ſoit telle que $\frac{R}{R+z} = \frac{X}{Y}$. Qu'on conçoive X & Y partagées en un même nombre quelconque, qu'on nommera p, d'aliquotes pareilles x *46. & y, & que y ne ſurpaſſe pas z, ce qui eſt poſſible *; ainſi *61. $\frac{X}{Y} * = \frac{px}{py}$. Il eſt évident *par l'article* 50 que x ſera dans R tout autant de fois, avec un petit reſte r, que y ſera dans R avec un petit reſte r; & nommant ce nombre q, on aura $\frac{R}{R} = \frac{qx+r}{qy+r}$. Mais ayant ſuppoſé $y < z$ ou $y = z$, y ſera dans z au moins une fois; & s'il y a un reſte, on ne ſera de ce reſte & du petit reſte r, qu'un ſeul reſte que l'on ſuppoſera repreſenté par la même lettre r, & l'on aura $R + z = qy + y + r$. Ainſi $\frac{1R}{R+z} = \frac{qx+r}{qy+y+r}$.

On va démontrer que $\frac{R}{R+z} = \frac{qx+r}{qy+y+r}$, qu'on ſuppoſe égal à $\frac{X}{Y}$, ne peut pas lui être égal, qu'il eſt plus petit; & qu'ainſi la ſuppoſition que $\frac{R}{R}$ eſt plus grand que $\frac{X}{Y}$ conduit neceſſairement à cette contradiction que $\frac{R}{R+z}$ eſt égal à $\frac{X}{Y}$, & qu'il eſt en même temps plus petit.

*61. x & y étant les aliquotes pareilles de X & Y, l'on aura * $\frac{x}{y} = \frac{qx}{qy} = \frac{px}{py} = \frac{X}{Y} = \frac{qx+s}{qy+y}$. Or $qx + x$ ſurpaſſe $qx + r$; car on *39. ſuppoſe le reſte r moindre que x: ainſi le rapport $\frac{qx+s}{qy+y}$ * ſur-*39. paſſe le rapport $\frac{qx+r}{qy+y}$; & $\frac{qx+r}{qy+y}$ * étant plus grand que $\frac{qx+r}{qy+y+r}$; *43. $\frac{qx+x}{qy+y}$ ſurpaſſe * à plus forte raiſon le rapport $\frac{qx+r}{qy+y+r}$. Donc puiſque $\frac{X}{Y} = \frac{qx+x}{qy+y}$ il s'enſuit que $\frac{qx+x}{qy+y}$ ſurpaſſant $\frac{qx+r}{qy+y+r}$; le rapport $\frac{X}{Y}$ ſurpaſſe auſſi $\frac{qx+r}{qy+y+r}$ égal par la ſuppoſition à $\frac{R}{R+z}$. On arrive donc à une contradiction en ſuppoſant que $\frac{R}{R+z}$ étoit égal à $\frac{X}{Y}$. Cela vient de ce qu'on a ſuppoſé $\frac{R}{R}$ plus grand que $\frac{X}{Y}$; ainſi $\frac{R}{R}$ ne peut pas être plus grand que $\frac{X}{Y}$.

2°. Si $\frac{R}{R}$ étoit plus petit que $\frac{X}{Y}$, qu'on ajoute à R la grandeur z, de façon que $\frac{R+z}{R}$ ſoit égal à $\frac{X}{Y}$; qu'on conçoive, comme dans le cas précedent, X & Y partagées en aliquotes pareilles x & y, dont le nombre ſoit p, & que chaque x ne ſurpaſſe pas z, & l'on aura $\frac{X}{Y} = \frac{px}{py}$.

Comme x doit être dans R autant de fois, avec un petit reſte r, que y eſt dans R avec un petit reſte r, *par l'article* 50, nommant q le nombre qui marque combien de fois x eſt dans R, & y dans R, on aura $\frac{R}{R} = \frac{qx+r}{qy+r}$.

Mais ayant ſuppoſé $x < z$ ou $x = z$, x ſera dans z au moins une fois, & s'il y a un reſte, on ne ſera de ce reſte & du reſte r qu'un ſeul reſte qu'on repreſentera, pour abreger, par la même lettre r, & ce reſte r ſera moindre que x, puiſque s'il étoit plus grand on auroit une x de plus, dans $R+z$ avec un reſte r; ainſi $\frac{R+z}{R} = \frac{qx+x+r}{qy+r}$.

On va démontrer que $\frac{R+z}{R} = \frac{qx+x+r}{qy+r}$, qu'on ſuppoſe égal à $\frac{X}{Y}$, eſt plus grand que $\frac{X}{Y}$; & que la ſuppoſition de $\frac{R}{R}$ moindre que $\frac{X}{Y}$ conduit neceſſairement à cette contradiction que $\frac{R+z}{R}$ eſt égal à $\frac{X}{Y}$, & en même temps plus grand que $\frac{X}{Y}$.

x & y étant les aliquotes pareilles de X & de Y, tous les
*61. rapports ſuivans ſont égaux * $\frac{x}{y} = \frac{qx}{qy} = \frac{px}{py} = \frac{X}{Y} = \frac{qx+x}{qy+y}$.
Mais r étant moindre que y par la ſuppoſition, $qy+r$ eſt
*39. moindre que $qy+y$; & le rapport $\frac{qx+x}{qy+r}$ * ſurpaſſe $\frac{qx+x}{qy+y}$; or
*39. $\frac{qx+x+r}{qy+r}$ ſurpaſſe * $\frac{qx+x}{qy+r}$. Donc à plus forte raiſon $\frac{qx+x+r}{qy+r}$ ſurpaſſe $\frac{qx+x}{qy+y} = \frac{X}{Y}$. Donc $\frac{R+z}{R} = \frac{qx+x+r}{qy+r}$ ſurpaſſe $\frac{X}{Y}$. On n'a donc pas pû ſuppoſer $\frac{R+z}{R} = \frac{X}{Y}$, puiſqu'on vient de demontrer que $\frac{R+z}{R}$ ſurpaſſe $\frac{X}{Y}$. Cela vient de ce qu'on a ſuppoſé $\frac{R}{R}$ moindre que $\frac{X}{Y}$. Ainſi la ſuppoſition de $\frac{R}{R}$ inégal à $\frac{X}{Y}$ menant à une contradiction, il s'enſuit que $\frac{R}{R} = \frac{X}{Y}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE IX.

63. SUPPOSE' les deux rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, & encore les deux rapports égaux $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$, je dis que l'on aura cette proportion $\frac{a}{b+c} = \frac{d}{e+f}$.

Démonſtration. On peut exprimer les deux rapports égaux
*49. $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ * par ces deux autres $\frac{nx}{mx} = \frac{ny}{my}$; & quand les rapports
*50. $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ * ſont incommenſurables, par ceux-ci * $\frac{nx}{mx+r} = \frac{ny}{my+r}$, on peut de même exprimer les deux rapports égaux $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$

par ceux-ci $\frac{nx}{px} = \frac{ny}{py}$, & dans les incommenſurables par $\frac{nx}{px+R}$
*47. $= \frac{ny}{py+R}$. Or il eſt évident que * $\frac{nx}{mx+px} = \frac{ny}{my+py}$, & dans les
*50. incommenſurables $\frac{nx}{mx+rx+px+R} = * \frac{ny}{my+ry+py+R}$. Donc en remettant, dans ces deux rapports égaux, a au lieu de nx; d au lieu de ny; b au lieu de mx; c au lieu de px; e au lieu de my, & f au lieu de py; l'on aura $\frac{a}{b+c} = \frac{d}{e+f}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si l'on avoit tel nombre qu'on voudra de ces rapports égaux deux à deux $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$; $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$; $\frac{a}{g} = \frac{d}{h}$; $\frac{a}{i} = \frac{d}{k}$, &c. Il eſt évident, en continuant la même démonſtration, que l'on déduiroit de ces rapports égaux deux à deux, cette proportion $\frac{a}{b+c+g+i} = \frac{d}{e+f+h+k}$.

19e DÉFINITION.

64. LORSQUE dans une proportion le ſecond & le troiſiéme terme ſont égaux : c'eſt à dire que le ſecond terme ſert de conſequent au premier rapport, & d'antecedent au ſecond rapport, & que la proportion n'a par conſequent que trois termes : on l'appelle *une proportion continue*, & le terme moyen s'appelle *moyen proportionnel*. On marque ainſi cette proportion, quand c'eſt une proportion arithmetique continue. $\div$ 3. 5. 7. C'eſt à dire la difference de 3 à 5 eſt égale à la difference de 5 à 7. De même $\div a . a + d . a + 2d$. C'eſt à dire la difference de a à $a + d$, eſt égale à la difference de $a + d$ à $a + 2d$. Le terme $a + d$ eſt moyen proportionnel arithmetique entre a & $a + 2d$.

On marque ainſi une proportion geometrique continue $\dot{\div}$ 8 . 4 . 2. C'eſt à dire, 8 eſt à 4, comme 4 eſt à 2. Le terme 4 eſt un moyen proportionnel geometrique entre 8 & 2. De même $\dot{\div} a . b . c$ ſignifie que a eſt à b, comme b eſt à c.

Quand une proportion continue s'étend à plus de trois termes, on l'appelle *une progreſſion*.

Ainſi $\div$ 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17 eſt une progreſſion arithmetique. De même $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d . a + 7d$ eſt une progreſſion arithmetique.

Mais $\dot{\div}$ 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1 eſt une progreſſion geometrique.

Tous les termes qui ſont entre le premier & le dernier s'appellent *moyens proportionnels*.

Diviſion de cet Ouvrage.

ON partagera cette ſcience du calcul des grandeurs en general en quatre Livres. On expliquera dans le premier le calcul des grandeurs entieres; dans le ſecond, le calcul des fractions, tout ce qui regarde les rapports ſimples & compoſez, & les proportions; & le calcul des grandeurs incommenſurables. Dans le troiſiéme, les proprietez des progreſſions arithmetique & geometrique, avec l'uſage de leur union dans les calculs; la formule pour élever les grandeurs complexes à toutes les puiſſances poſſibles; les proprietez des nombres figurez; les logarithmes, leur uſage, & une méthode facile de les conſtruire. Dans le quatriéme, on fera voir l'uſage du calcul pour apprendre les Mathematiques en les découvrant ſoi-même; c'eſt à dire, on donnera les principales Regles de la maniere d'employer le calcul dans les découvertes, & on les appliquera à la réſolution de pluſieurs Problêmes.

SECTION II.

Où l'on explique l'addition & la ſouſtraction des grandeurs entieres.

Addition des grandeurs entieres.

DEFINITION I.

AJOUTER pluſieurs grandeurs données, c'eſt trouver la grandeur totale qui les contient toutes; cette grandeur totale s'appelle leur *ſomme*.

SUPPOSITION I.

ON ſuppoſe que l'on ſçait ajouter enſemble les nombres moindres que dix, c'eſt à dire, qui ne contiennent que des unitez ſans dixaines.

L'Addition des nombres entiers.

PROBLÊME I.

65. *AJOUTER enſemble tant de nombres entiers qu'on voudra, & en trouver la ſomme.*

Regle ou operation. 1°. Il faut écrire tous les nombres,

qu'on veut ajouter, les uns ſous les autres, obſervant exactement d'écrire toutes les unitez de ces nombres les unes ſous les autres dans un même rang, qui eſt le premier; toutes les dixaines les unes ſous les autres dans le ſecond rang; toutes les centaines dans le troiſiéme rang, & ainſi de ſuite. Cette pratique eſt abſolument neceſſaire pour ne pas ſe tromper. Il faut enſuite tirer une ligne ſous ces nombres, & ce ſera ſous cette ligne qu'on écrira la ſomme que l'on cherche.

2°. Il faut ajouter enſemble tous les chifres du premier rang, qui eſt le rang des unitez, & il peut arriver tous ces cas, 1°. Si la ſomme eſt moindre que dix, il faut l'écrire ſous la ligne qu'on a tirée, dans le rang des unitez. 2°. Si le rang des unitez ne contenoit que des zeros, il faudroit écrire o dans le rang des unitez. 3°. Si la ſomme des unitez contient exactement une ou pluſieurs dixaines ſans unitez jointes aux dixaines, il faut écrire o dans la ſomme au rang des unitez, & retenir les dixaines pour les ajouter aux dixaines du ſecond rang. 4°. Si la ſomme contient une ou pluſieurs dixaines & de plus des unitez, il faut écrire les unitez dans la ſomme au rang des unitez, & retenir les dixaines pour les ajouter avec les dixaines du ſecond rang. 5°. Enfin, ſi la ſomme contenoit des centaines, il faudroit les retenir pour les ajouter avec le rang des centaines; mais ce cas n'arrive que quand il faut ajouter beaucoup de nombres.

3°. Il faut pratiquer dans le ſecond rang ce que l'on vient de preſcrire pour le premier, en regardant ce ſecond rang comme ſi c'étoit des unitez; faire enſuite la même choſe par ordre dans le troiſiéme rang, dans le quatriéme, & dans tous les autres; & le nombre que l'on aura écrit ſous la ligne ſera la ſomme de tous les nombres qu'on vouloit ajouter. Ceci s'eclaircira par l'exemple ſuivant.

Exemple de l'Addition des nombres entiers.

POUR ajouter les trois nombres *A*, *B*, *C*, 1°. Je les écris les uns ſous les autres, de maniere que les unitez ſoient exactement dans le premier rang, les dixaines dans le ſecond, & ainſi de ſuite, & je tire une ligne au deſſous.

A	940253
B	870412
C	790274
D	2600939 ſomme.

2°. J'ajoute les unitez du premier rang, en diſant 3 + 2

ſont 5. 5 + 4 ſont 9. Ainſi la ſomme du rang des unitez eſt 9, que j'écris ſous la ligne dans le premier rang.

3°. J'ajoute de même les dixaines en diſant 5 + 1 ſont 6. 6 + 7 ſont 13. J'écris les trois unitez de 13 dans la ſomme au ſecond rang, & je retiens une dixaine pour l'ajouter avec le troiſiéme rang.

4°. J'ajoute les centaines ou les chifres du troiſiéme rang, en diſant 1 que je retenois + 2 ſont 3. 3 + 4 ſont 7. 7 + 2 ſont 9, j'écris 9 dans la ſomme au troiſiéme rang.

5°. J'ajoute les chifres du quatriéme rang, en diſant 0 + 0 + 0 = 0, j'écris 0 au quatriéme rang de la ſomme.

6°. J'ajoute les chifres du cinquiéme rang, en diſant 4 + 7 ſont 11. 11 + 9 ſont 20; j'écris 0 dans la ſomme au cinquiéme rang, & je retiens 2.

7°. Je dis 2 que je retenois + 9 ſont 11. 11 + 8 ſont 19. 19 + 7 ſont 26, j'écris 6 dans la ſomme au ſixieme rang; & n'y ayant plus de rang à ajouter, j'écris dans la ſomme les deux dixaines de 26, c'eſt à dire j'écris 2 au ſeptiéme rang, & la ſomme *D* des nombres *A* + *B* + *C*, eſt deux millions ſix cens mille neuf cens trente & neuf.

Démonſtration de l'Addition. Il eſt évident, par l'operation même, que le nombre *D*, qu'on trouve par la pratique de l'Addition, contient * la ſomme de toutes les unitez, de toutes les dixaines, de toutes les centaines, &c. des nombres qu'il falloit ajouter. Le nombre *D* eſt donc la ſomme des nombres propoſez, *qu'il falloit trouver*. * 11 & 13

REMARQUES.

1.

ON pourroit dans chaque rang, faire l'addition en allant de bas en haut : cela eſt arbitraire.

2.

Quand on a beaucoup de nombres ſéparez à ajouter, on peut partager l'addition totale en pluſieurs additions particulieres, ajoutant d'abord les dix premiers nombres, enſuite les dix ſuivans, & ainſi de ſuite. Après quoi il faut ajouter toutes les ſommes trouvées par ces additions particulieres, en une ſeule ſomme, qui ſera la ſomme de tous les nombres propoſez.

Exemple de l'addition des nombres qui contiennent des parties décimales.

L'ADDITION des nombres *A*, *B*, *C*, qui contiennent des parties décimales, * se fait comme l'addition des nombres entiers. Il faut ſeulement obſerver d'écrire dans le même rang les parties décimales qui ſe répondent, & quand quelqu'un des nombres qu'on doit ajouter, n'eſt pas reduit aux plus petites parties décimales des autres nombres, l'y reduire par le moyen des zeros, comme on le voit au nombre *C*.

* 12.

A	321, 02974^{v}
B	5273, 10852
C	62, 01000
D	5657, 04826^{v}

On commencera donc par le rang des moindres parties, & l'on dira $4 + 2 = 6$; il faut écrire 6^{v} dans la ſomme. Enſuite on dira $7 + 5 = 12$; il faut écrire 2 dans la ſomme, & ajouter la dixaine qu'on a retenue au rang ſuivant, en diſant $1 + 9 + 8 = 18$; il faut écrire 8 dans la ſomme, & dire enſuite $1 + 2 + 0 + 1 = 4$; il faut écrire 4 dans la ſomme. On dira enſuite $0 + 1 + 9 = 10$; il faut écrire 0 dans la ſomme avec un point ou une virgule qui le précede, pour diſtinguer les parties décimales des nombres entiers, & retenir 1 pour le rang des unitez entieres. Après quoi on ajoutera les unitez entieres, en diſant $1 + 1 + 3 + 2 = 7$, il faut écrire 7 dans la ſomme, & continuer l'addition comme dans l'exemple précedent.

La démonſtration eſt ſemblable à celle des nombres entiers.

Exemple de l'addition des nombres de differente eſpece.

LA grandeur que l'on prend pour ſervir de meſure dans chacune des grandeurs ſenſibles & qu'on a nommée l'unité, a été partagée par l'uſage en d'autres parties égales plus petites contenues un certain nombre de fois dans l'unité. Ces premieres parties de l'unité ont auſſi été partagées en d'autres plus petites, & celles-ci en d'autres encore plus petites, & ainſi de ſuite. Par exemple, dans le Commerce on prend la livre pour l'unité qui ſert de meſure aux monnoyes, on la partage en vingt ſous, & chaque ſou en douze deniers.

Dans la Geometrie pratique on prend la toiſe pour l'unité qui ſert de meſure aux longueurs, on la diviſe en ſix pieds, &

& chaque pied en douze pouces, & chaque pouce en douze lignes. Les meſures des autres grandeurs ſenſibles ont auſſi leurs diviſions particulieres qu'on peut apprendre de l'uſage. Les nombres qui contiennent pluſieurs fois la grandeur qui ſert d'unité & de meſure à quelque grandeur ſenſible, & qui contiennent de plus les differentes parties de cette unité, s'appellent communément *les nombres de differentes eſpeces*. Voici un exemple de l'addition de ces nombres qui ſervira de regle aux Commençans pour les autres nombres de differentes eſpeces.

Pour ajouter les nombres *A*, *B*, *C*, 1°, on les écrira les uns ſous les autres, obſervant de mettre les mêmes eſpeces dans le même rang, & l'on tirera une ligne.

A	32	*toiſ.*	5	*pieds*	11	*pouces*	9	*lig.*
B	25		4		6		10	
C	12		3		8		11	
D	71	*toiſ.*	2	*pieds*	3	*pouces*	06	*lig.*

2°. On commencera par la moindre eſpece, & l'on dira 9 lig. + 10 + 11 = 30 lignes, qui valent 2 pouces 6 lignes, on écrira dans la ſomme, 6 lignes au rang des lignes, & l'on retiendra 2 pouces pour le rang des pouces. 3°. On dira au rang des pouces, 2 pouces + 11 + 6 + 8 = 27 pouces, qui valent 2 pieds 3 pouces; on écrira 3 pouces au rang des pouces, & on retiendra 2 pieds. 4°. On dira au rang des pieds, 2 pieds + 5 + 4 + 3 = 14 pieds, qui valent 2 toiſes 2 pieds; on écrira 2 pieds au rang des pieds, & l'on retiendra 2 toiſes pour les ajouter aux toiſes dont on fera l'addition, comme celle des nombres, entiers, & l'on trouvera la ſomme *D*.

La démonſtration eſt ſemblable à celle de l'Addition des nombres entiers.

L'Addition des grandeurs entieres litterales.

DEFINITION.

PLUSIEURS grandeurs jointes enſemble par les ſignes + ou —, ou par tous les deux, ſont nommées grandeurs *complexes*, & chacune de ces grandeurs priſe ſéparement s'appelle *incomplexe*. Ainſi $a + b$, $a + b - c$ ſont des grandeurs *complexes*; & a, $+ b$, $- c$, priſes ſéparément, ſont chacune une grandeur *incomplexe*.

On nommera grandeurs *ſemblables* les grandeurs incomplexes qui ont préciſément les mêmes lettres, quoiqu'il y ait differens nombres & differens ſignes au devant de chacune. Ainſi $+ a$, $+ a$, $- a$, $+ 3a$, $- 5a$, ſont des grandeurs ſem-

blables. De même aab, $-aab$, $+3aab$, $-5aab$, ſont des grandeurs ſemblables ; mais aa, & aab, ne ſont pas ſemblables: de même aa, & aaa, ſont diſſemblables.

L'Addition des grandeurs litterales incomplexes :

PROBLÊME II.

66. FAIRE *l'Addition des grandeurs litterales incomplexes.*

POUR ajouter les grandeurs ſemblables, ſi elles ſont toutes poſitives, on écrit une ſeule fois cette grandeur avec le ſigne $+$, & l'on marque au devant de la grandeur le nombre qui exprime combien de fois elle eſt ajoutée. Ainſi $+a+a+a = 3a. + aab + aab = 2aab$.

On ajoute de même les grandeurs négatives ſemblables, en mettant au devant de la ſomme le ſigne $-$, ainſi $-a-a-a = -3a. - aab - aab = -2aab$.

Quand les grandeurs ſemblables poſitives ou négatives, ſont précedées de nombres, on ajoute auſſi ces nombres. Ainſi $+3ac+5ac = +8ac$; $-10ab-14ab = -24ab$.

Enfin, quand les grandeurs ſemblables ſont en partie poſitives, en partie négatives, on ajoute en une ſomme les poſitives, on ajoute en une autre ſomme les négatives, & l'on ôte la moindre ſomme de la plus grande, & l'on écrit le reſte avec le ſigne de la plus grande des deux ſommes. Ainſi $3ab+4ab-2ab-ab = +4ab$. De même $+3a+2a-7a = -2a$.

Pour ajouter les grandeurs diſſemblables, il faut ſimplement les écrire de ſuite avec leur ſigne.

Ainſi la ſomme de $+3aab$ & de $-4acc$, eſt $+3aab-4acc$. De même $5a+3b$ eſt la ſomme de $+5a$, & de $+3b$.

L'Addition des grandeurs litterales complexes.

PROBLÊME III.

67. POUR *ajouter les grandeurs complexes*, 1°. *Si les grandeurs à ajouter ne contiennent que pluſieurs ſortes de grandeurs ſemblables, on écrira les grandeurs ſemblables les unes ſous les autres dans les rangs correſpondans, & on en trouvera la ſomme par* 66 *& comme dans les nombres.* 2°. *S'il y a des grandeurs diſſemblables, on les joindra les unes aux autres avec leurs ſignes ; mais il eſt inutile d'y obſerver les rangs.*

PAR exemple, pour ajouter les grandeurs complexes A, B, C, qui ont toutes des grandeures ſemblables, 1°, on écrira les grandeurs ſemblables dans les mêmes rangs correſpondans, & on tirera une ligne au deſſous. 2°. On fera l'addition de chaque rang, comme dans les grandeurs incomplexes, & comme dans les nombres, & l'on écrira la ſomme de chaque rang ſous la ligne dans le rang correſpondant, avec le ſigne qui lui convient, & l'on aura la ſomme D.

$A \quad 5ab + 7ac - 3bc + cc$
$B \quad -4ab + 3ac - 7bc + 3cc$
$C \quad +3ab - 5ac + 2bc - 2cc$
$D \quad +4ab + 5ac - 8bc + 2cc$

Pour ajouter les grandeurs complexes E, F, G, qui contiennent quelques grandeurs ſemblables avec des diſſemblables, 1°, on écrira dans les rangs correſpondans les grandeurs ſemblables, & enſuite les grandeurs diſſemblables qu'on n'a miſes dans un même rang que pour garder l'uniformité. On tirera enſuite une ligne au deſſous. 2°. On écrira ſous la ligne la ſomme de chaque rang des grandeurs ſemblables dans les rangs correſpondans, & on y joindra dans la même ligne les grandeurs diſſemblables les joignant enſemble avec leurs ſignes, & l'on aura la ſomme H. L'on peut remarquer que la ſomme du ſecond rang étant zero, on peut écrire o dans la ſomme; mais d'ordinaire on ne l'écrit pas, parceque cela eſt inutile, zero dans un rang ne ſervant pas ici à faire valoir les grandeurs des autres rangs, comme dans les nombres.

$E \quad 3aa - 2ab + cd$
$F \quad -5aa + 12ab - cc$
$G \quad +7aa - 10ab - dd$
$H \quad +5aa \quad 0 \quad +cd - cc - dd$

Pour ajouter des grandeurs complexes toutes diſſemblables, il faut ſimplement les joindre les unes aux autres dans une même ligne avec leurs ſignes, & ce ſera la ſomme qu'on cherche. Ainſi M eſt la ſomme des deux grandeurs complexes K & L.

$K \quad 3a - 2b + c$
$L \quad 4d + 2e - f$
$M \quad 3a - 2b + c + 4d + 2e - f$

La démonſtration de l'addition des grandeurs litterales eſt évidente par les articles 26, 24, 28 & 29.

La Souſtraction des grandeurs entieres.

DE'FINITION.

SOUSTRAIRE une grandeur d'une autre plus grande c'eſt retrancher la primiere de la ſeconde, & marquer le reſte, qui eſt la difference de ces grandeurs.

SUPPOSITION.

ON ſuppoſe que l'on ſçait ôter un nombre au deſſous de dix de tout autre nombre plus grand, & en marquer le reſte ou la difference.

La Souſtraction des nombres entiers.

PROBLÊME IV.

68. *SOUSTRAIRE un nombre entier tel qu'on voudra d'un autre nombre entier plus grand tel qu'on voudra, & en marquer la difference.*

REGLE. 1°. Il faut écrire le moindre nombre ſous le plus grand, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, & ainſi de ſuite, & tirer une ligne au deſſous. 2°. Il faut commencer par le rang des unitez, & aller par ordre au rang des dixaines, puis au rang des centaines, & ainſi de ſuite, & ôter dans chaque rang le chiffre de deſſous celui qui eſt ſur lui, & marquer le reſte ſous la ligne dans la même rang. 3°. Quand le chifre de deſſous dans un rang ſurpaſſe celui de deſſus, il faut ajouter une dixaine au chifre de deſſus, ôter le chiffre de deſſous du chiffre de deſſus augmenté d'une dixaine, & écrire le reſte dans le même rang ſous la ligne, & il faut ajouter la même dixaine qu'on a ajoutée au chifre de deſſus de ce rang, au chifre de deſſous qui eſt immédiatement plus à gauche que celui qu'on vient de ſou-
* 13. ſtraire: cette dixaine ne l'augmentera que d'un *, & continuer la ſouſtraction. 4°. Quand dans un rang il y a zero deſſus & deſſous, comme auſſi quand le nombre à ôter ſe trouve égal à celui de deſſus, il faut écrire zero pour le reſte, afin de conſerver les rangs des chifres qui ſont vers la gauche. Ceci s'éclaircira par l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

A 840061057
B 609345043
C 230716014 Reſte ou difference.

Pour ôter le nombre B du nombre A, 1°, il faut écrire le nombre B ſous le nombre A, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, & ainſi de ſuite, & tirer une ligne au deſſous. 2°. Il faut commencer par le rang des unitez, & dire $7 - 3 = 4$, il faut écrire 4 dans la difference au rang des unitez; & dire au rang des dixaines $5 - 4 = 1$, il faut écrire 1 au ſecond rang de la difference; & dire au troiſiéme rang $0 - 0 = 0$, il faut écrire 0 au troiſiéme rang, pour marquer le rang des chifres qui ſeront vers la gauche; puis dire au quatriéme rang, on ne peut pas ôter 5 de 1, ainſi il faut ajouter 10 à 1, & dire $11 - 5 = 6$; il faut écrire 6 dans le quatriéme rang; & à cauſe de la dixaine ajoutée à 1 du quatriéme rang, il faut ajouter 1 au chifre 4 de deſſous du cinquiéme rang, qui vaudra à préſent 5 à cauſe de cette unité ajoutée, laquelle vaut une dixaine au quatriéme rang, & ſeulement un au cinquiéme rang.

Continuant la ſouſtraction, on dira au cinquiéme rang $6 - 5 = 1$, il faut écrire 1 au cinquiéme rang dans la difference, & paſſer au ſixiéme rang où 0, qui eſt le chifre de deſſus, étant moindre que 3 qui eſt au deſſous, il faut ajouter 10 à 0, & dire $10 - 3 = 7$, il faut écrire 7 dans le reſte au ſixiéme rang, & ajouter 1 au chifre de deſſous du ſeptieme qui eſt 9, ce qui le fera valoir 10: cela ſe fait à cauſe de la dixaine ajoutée au chifre de deſſus du ſixiéme rang. Il faut paſſer au ſeptiéme rang, & ajouter une dixaine à 0 qui eſt le chifre de deſſus, ce qui le fera valoir 10, & dire $10 - 10 = 0$, il faut écrire 0 dans le reſte au ſeptiéme rang, & ajouter 1 à 0 chifre de deſſous du huitiéme rang, à cauſe de la dixaine ajoutée au chifre de deſſus du ſeptiéme rang. Cette unité ajoutée à 0 le fera valoir 1. On dira après cela au huitiéme rang $4 - 1 = 3$, il faut écrire 3 dans le reſte au huitiéme rang. Enfin on paſſera au neuviéme rang, où l'on dira $8 - 6 = 2$, il faut écrire 2 dans le reſte au neuviéme rang, & ce rang étant le dernier, la ſouſtraction eſt achevée, & le nombre C eſt la difference des deux nombres A & B qu'il falloit trouver.

Démonſtration. Il eſt évident par l'operation faite par parties que le nombre *C* contient exactement les unitez, les dixaines, &c. qui reſtent après avoir retranché les unitez du nombre *B* des unitez du nombre *A*, les dixaines de *B* des dixaines de *A*, &c. & que *C* eſt par conſéquent le nombre qui reſte après avoir ôté le nombre *B* du nombre *A*.

REMARQUES.

1.

SI l'on avoit pluſieurs nombres à ôter de pluſieurs autres nombres, il faudroit ajouter les premiers dans une ſomme, & les ſeconds dans une autre ſomme, & ôter la premiere ſomme de la ſeconde, & le reſte ſeroit celui que l'on cherche.

2.

69. Il faut quelquefois ſouſtraire un nombre d'un autre plus petit; cela arrive dans le Commerce où les dettes ſe trouvent quelquefois ſurpaſſer le bien, & dans pluſieurs calculs mathematiques; dans ce cas il faut ôter le moindre nombre du plus grand, & marquer le ſigne — devant le reſte, pour faire voir que c'eſt une grandeur négative.

3.

70. Les démonſtrations de l'addition & de la ſouſtraction font voir évidemment que les Regles que l'on a données pour ces operations, font trouver les nombres que l'on cherche, porvû qu'on ait exactement ſuivi ces Regles. Mais il peut arriver dans la pratique que l'on ſe trompe, & que ſans y penſer l'on prenne un nombre pour un autre, c'eſt à dire qu'on n'obſerve pas exactement les regles. Pour s'aſſurer que dans la pratique l'on a ſuivi les Regles, l'on peut ſe ſervir des deux moyens ſuivans qu'on nommera *les preuves* de l'addition & de la ſouſtraction, pour les diſtinguer des démonſtrations.

Le premier moyen eſt de réiterer le calcul pluſieurs fois & de differentes manieres quand cela ſe peut; ſi l'on trouve toujours la même grandeur, on eſt moralement aſſuré que l'on ne s'eſt pas trompé. Ce moyen de s'aſſurer de l'exactitude d'un calcul peut ſervir pour tous les calculs qu'on enſeignera dans cet Ouvrage.

Le ſecond moyen propre à l'addition & à la ſouſtraction eſt de ſe ſervir de la ſouſtraction pour s'aſſurer qu'on a bien fait l'addition ; & de ſe ſervir de l'addition pour s'aſſurer qu'on a bien fait la ſouſtraction.

Par exemple, pour s'aſſurer que le nombre *D* eſt la ſomme des trois nombres *A*, *B*, *C*, il faut ſouſtraire les trois nombres *A*, *B*, *C*, de leur ſomme *D*; & s'il ne reſte rien, c'eſt une marque que *D* eſt la ſomme de ces trois nombres. S'il reſtoit quelque choſe, ce ſeroit une marque qu'on ſe ſeroit trompé; il faudroit dans ce cas recommencer l'addition.

A	940253
B	870412
C	790274
D	2600939

On peut ſouſtraire les trois nombres *A*, *B*, *C* de la ſomme *D*, de la maniere ſuivante, où il ne faut rien écrire. On commence par le dernier rang le plus à gauche, & l'on dit 9 + 8 + 7 = 24: or 26 de la ſomme *D*, — 24 = 2, ainſi il reſte 2 de 26. Il faut imaginer 2 au lieu de 6 dans le ſixiéme rang de la ſomme.

Il faut paſſer au cinquiéme rang, & dire 4 + 7 + 9 = 20, or 20 de la ſomme *D*, — 20 = 0; ainſi il ne reſte que 0 dans le cinquiéme rang de la ſomme. Dans le quatriéme rang il faut dire 0 + 0 + 0 = 0, or 0 de la ſomme *D*, — 0 = 0. Ainſi il ne doit reſter dans le quatriéme rang de la ſomme *D* que 0. Dans le troiſiéme rang on dira 2 + 4 + 2 = 8. Or 9 de la ſomme *D*, — 8 = 1, ainſi il faut imaginer 1 au lieu de 9 dans le troiſiéme rang de la ſomme *D*.

On dira dans le ſecond rang 5 + 1 + 7 = 13. Or 13 de la ſomme *D*, — 13 = 0; ainſi il doit reſter 0 dans le ſecond rang de la ſomme, où il faut imaginer 0 au lieu de 3.

Enfin on dira dans le premier rang 3 + 2 + 4 = 9. Or 9 de la ſomme *D*, — 9 = 0.

Les nombres *A*, *B*, *C* étant ſouſtraits de la ſomme *D*, il ne reſte rien: *D* eſt donc la ſomme de ces trois nombres.

Dans la ſouſtraction, pour s'aſſurer que (*C*) eſt ce qui reſte, aprés avoir ôté le nombre *B* du nombre *A*, il faut ajouter le reſte *C* avec le nombre *B*, & la ſomme doit être exactement le nombre *A*. Cette addition de fait de la ma-

A	840061057	
B	609345043	
C	230716014	Reſte ou difference.

niere ſuivante ſans rien écrire. On commence par le premier rang, & l'on dit $4 + 3 = 7$ du nombre *A*. On dira dans le ſecond rang $1 + 4 = 5$ du nombre *A*. Dans le troiſiéme rang $0 + 0 = 0$ du nombre *A*. Dans le quatriéme rang $6 + 5 = 11$, on prendra 1 du quatriéme rang du nombre *A* pour l'unité de 11, & on retiendra la dixaine de 11 pour l'ajouter dans le cinquiéme rang où l'on dira $1 + 1 + 4 = 6$ du cinquiéme rang de *A*. On dira dans le ſixiéme rang $7 + 3 = 10$, on prendra 0 du ſixiéme rang de *A* pour 0 de 10, & on retiendra la dixaine de 10 pour l'ajouter au ſeptiéme rang où l'on dira $1 + 0 + 9 = 10$: on prendra 0 du ſeptiéme rang de *A* pour 0 de 10, & on retiendra la dixaine de 10 pour l'ajouter au huitiéme rang, où l'on dira $1 + 3 + 0 = 4$ du huitiéme rang de *A*. Enfin on dira au dernier rang $2 + 6 = 8$ du dernier rang de *A*.

D'où l'on voit que la ſomme du reſte *C* & du nombre *B* étant égale au nombre *A*, le nombre *C* eſt la difference des nombres *A* & *B*.

Exemple de la Souſtraction des nombres qui contiennent des parties décimales.

QUAND l'un des deux nombres donnez de la Souſtraction contient des parties décimales plus petites que l'autre, il faut réduire cet autre aux moindres parties décimales du premier * en lui ajoutant des zeros, ce qui n'en change point la valeur. Il faut enſuite écrire le plus petit nombre au deſſous du plus grand, de maniere que les mêmes eſpeces décimales ſoient les unes ſous les autres dans un même rang ; & que les nombres entiers ſoient diſpoſez, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous le dixaines, &c. Enfin il faut faire la ſouſtraction de la même maniere que dans les nombres entiers, comme on le voit dans cet exemple, où l'on trouve en ôtant le nombre *E* du nombre *D*, que le nombre *F* eſt le reſte.

* 17.

D	351,034700^{vc}
E	239,142583
F	111,891117^{v}

La démonſtration eſt ſemblable à celle des nombres entiers.

Exemple

Exemple de la Souſtraction des nombres de differentes eſpeces.

A	35 *toiſ.*	3 *pieds*	4 *pouc.*	8 *lig.*
B	15	5	6	9
C	19	3	9	11

POUR ôter un nombre *B*, qui contient differentes eſpeces, d'un plus grand *A*, qui contient auſſi differentes eſpeces, il faut écrire le moindre *B* ſous le plus grand *A*, de maniere que les eſpeces correſpondantes ſoient dans le même rang les unes ſous les autres; tirer une ligne au deſſous, & commencer la Souſtraction par le rang de la moindre eſpece, en diſant 9 lignes ſurpaſſant 8 lignes, il faut ajouter 1 pouce ou 12 lignes à 8 lignes, ce qui les fera valoir 20 lignes; & l'on dira enſuite 20 lignes — 9 lignes = 11 lignes; il faut écrire 11 lignes dans le reſte *C* au rang des lignes : il faut, à cauſe des 12 lignes ajoutées à 8 lignes, ajouter 1 pouce à 6 pouces du nombre *B*, ce qui fera 7 pouces.

Mais 7 pouces ſurpaſſant 4 pouces, il faut ajouter 1 pied ou 12 pouces à 4 pouces, ce qui fera 16 pouces, & dire 16 pouces — 7 pouces = 9 pouces, il faut écrire 9 pouces dans le reſte, & ajouter 1 pied à 5 pieds du nombre *B*, ce qui fera 6 pieds, & cela à cauſe de 1 pied ajouté à 4 pouces du nombre *A*.

Mais 6 pieds ſurpaſſant 3 pieds, il faut ajouter 1 toiſe ou 6 pieds à 3 pieds, ce qui fera 9 pieds, & dire 9 pieds — 6 pieds = 3 pieds; il faut écrire 3 pieds dans le reſte, & ajouter 1 toiſe à 5 toiſes de *B*, à cauſe de la toiſe ajoutée à 3 pieds. Ainſi au lieu de 5 toiſes il faut concevoir 6 toiſes, & achever la Souſtraction des toiſes entieres, comme dans le Souſtraction des nombres entiers, & l'on trouvera le reſte *C*.

La démonſtration eſt ſemblable à celle des nombres entiers.

La Souſtraction des grandeurs entieres litterales.

PROBLÊME.

71. *OTER les grandeurs litterales données complexes ou incomplexes d'autres grandeurs litterales données complexes ou incomplexes, & marquer la difference.*

REGLE *ou operation*. Il faut changer les ſignes * des grandeurs à ſouſtraire, & enſuite les ajouter * par les regles de * 27. * 66. & 67.

l'Addition des grandeurs litterales entieres, aux grandeurs dont il faut les retrancher, & dont on n'aura point changé les ſignes, & la ſomme de cette Addition ſera la difference.

EXEMPLES.

POUR ôter $-3ab$ de $+4ab$, il faut changer le ſigne de $-3ab$ *, & l'on aura $+3ab$. Il faut enſuite ajouter $+3ab$ à $+4ab$, & l'on aura la difference $+7ab$. *27.

Pour ôter $+3ab$ de $+4ab$, il faut changer le ſigne de $+3ab$, & l'on aura $-3ab$. Il faut enſuite ajouter $-3ab$ à $+4ab$, & l'on aura la difference $+ab$.

Pour ôter $-4ac$ de $+7ab$, il faut écrire $7ab+4ac$.

Pour ſouſtraire la grandeur complexe $5xx-3ax-3aa$ de $4xx-5ax+ab$, il faut changer les ſignes de la premiere, & faire enſuite l'addition comme elle eſt ici marquée, & l'on trouvera la difference $-xx-2ax+ab+3aa$.

$$\begin{array}{r} 4xx-5ax+ab \\ -5xx+3ax+3aa \\ \hline -xx-2ax+ab+3aa \end{array}$$

Ces exemples ſuffiſent pour faire clairement concevoir la regle : les Commençans pourront en faire tant d'exemples qu'ils voudront.

La démonſtration eſt évidente par l'article 27.

SECTION III.

Où l'on explique la Multiplication des grandeurs entieres.

DE'FINITION.

DEUX nombres étant donnez comme 3 & 4; ſi l'on dit 3 fois 4, cela fait 12, c'eſt ce qu'on appelle *multiplier* 4 par 3.

Le nombre 12 qui vient de la multiplication de 4 par 3, s'appelle *le produit*; le nombre 4, *le multiplié*; le nombre 3, *le multiplicateur* ou bien *le multipliant*. Les nombres 3 & 4, qui étant multipliez l'un par l'autre ſont le produit 12, s'appellent *les côtez* du produit, & encore *les dimenſions* ou *les multiplicateurs* du produit. On ſe ſert de cette marque × pour repreſenter en abregé qu'une grandeur eſt multipliée par une autre; ainſi $4 \times 3 = 12$, ſignifie en abregé que 4 mul-

tiplié par 3 fait 12, ou que 3 fois 4 c'eſt 12. De même $b \times a$ marque que la grandeur repréſentée par b eſt multipliée par la grandeur repréſentée par a. Ainſi 4×3 marque le produit de 4 multiplié par 3. De même $b \times a$ marque le produit de la grandeur b multipliée par a.

Définition generale de la Multiplication par rapport à toutes ſortes de grandeurs. Il faut ſe la rendre très familiere.

72. MULTIPLIER une grandeur quelconque qu'on repréſentera par b, par une autre grandeur quelconque a, c'eſt trouver une grandeur qu'on nommera c, qui ſoit à la grandeur *multipliée* b, comme la grandeur *multipliante* a eſt à l'unité.

D'où l'on voit qu'il y a une proportion dans toute multiplication, dont le premier terme eſt l'unité, le ſecond terme eſt le multiplicateur, le troiſiéme terme eſt le multiplié, & le quatriéme terme eſt le produit. Cette proportion ſe peut exprimer ainſi 1. $a :: b. c$, ou $\frac{1}{a} = \frac{b}{c}$. Les trois premiers termes 1, a, b, de cette proportion ſont donnez, & la multiplication fait trouver le quatriéme c, qu'on peut repréſenter par $b \times a$.

COROLLAIRE I.

73. IL ſuit de-là qu'il eſt indifferent de prendre le multiplié pour le multiplicateur, & le multiplicateur pour le multiplié; c'eſt à dire, que le produit de b multiplié par a eſt la même grandeur que le produit de a multiplié par b; car dans le premier cas, on a la proportion 1. $a :: b. c$, & dans le ſecond cas, on a ſon alterne * 1. $b :: a. c$; & dans l'une & dans l'autre les trois premiers termes étant déterminez, le quatriéme eſt * toujours la même grandeur. Ainſi $a \times b = b \times a$. *62. *54.

COROLLAIRE II.

74. IL ſuit auſſi de la définition de la Multiplication, que quand le multiplicateur ſurpaſſe l'unité, le produit ſurpaſſe le multiplié; & que quand le multiplicateur eſt moindre que l'unité, le produit eſt moindre que le multiplié.

COROLLAIRE III.

75. QUAND deux grandeurs a & b ſont multipliées ſéparément par une même grandeur, c'eſt à dire par le même

multiplicateur qu'on nommera m, les deux produits qui en viennent qu'on peut repréſenter, le premier par $m \times a$, le ſecond par $m \times b$, ont le même rapport que les deux grandeurs a & b.

Il faut démontrer que $a . b :: m \times a . m \times b$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{m \times a}{m \times b}$.

Démonſtration. Dans la multiplication de a par m, l'unité eſt au multiplicateur m, comme le multiplié a eſt au produit $m \times a$. *Par l'article* 72, ainſi $1 . m :: a . m \times a$. Par la même raiſon dans la multiplication de b par m, l'unité eſt au multiplicateur m, comme le multiplié b eſt au produit $m \times b$. Ainſi $1 . m :: b . m \times b$.

Donc le rapport de a à $m \times a$, & celui de b à $m \times b$, *52. étant égaux au rapport de 1 à m *, ils ſont égaux entr'eux. Ainſi $a . m \times a :: b . m \times b$; donc, l'on aura auſſi la proportion *62. alterne * $a . b :: m \times a . m \times b$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{m}{m} \times \frac{a}{b}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AVERTISSEMENT.

CE troiſiéme Corollaire eſt d'un ſi grand uſage dans ce traité, & dans toutes les Mathematiques, que les Commençans ne ſçauroient ſe le rendre trop familier.

COROLLAIRE IV.

76. IL ſuit du troiſiéme Corollaire que deux grandeurs égales, comme par exemple $a \times b$, & $b \times a$, étant multipliées ſéparément par une même grandeur m, ou ce qui revient au même, par des grandeurs égales, les produits $m \times a \times b$, & *75. $m \times b \times a$ ſont égaux. Car * $\frac{a \times b}{b \times a} = \frac{m \times a \times b}{m \times b \times a}$. Mais les deux termes du premier de ces rapports ſont égaux; les deux termes du ſecond rapport ſont donc égaux.

Application de la définition generale à la multiplication des nombres entiers.

77. MULTIPLIER un nombre entier donné par un autre nombre entier donné, c'eſt trouver un troiſiéme nombre qui contienne le nombre multiplié autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Ainſi multiplier 4 par 3, c'eſt trouver 12, qui contient autant de fois 4 que 3 contient 1,

*62. & l'on a cette proportion 1. 3 :: 4. 12, & par conſéquent * ſon alterne 1. 4 :: 3. 12.

D'où l'on voit que la multiplication d'un nombre entier comme 4, par un autre nombre entier comme 3, eſt l'addition du multiplié 4 réiterée autant de fois que l'unité eſt contenue dans le multiplicateur 3, car 1. 3 :: 4. 4 + 4 + 4 = 12.

SUPPOSITION OU DEMANDE.

Table de la Multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7 *a*	14	21	28	35	42	49	56 *c*	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

78. ON ſuppoſe qu'on ſçait les produits des neuf chifres 1, 2, 3, &c. multipliez les uns par les autres. On a mis ici la table qui contient tous ces produits pour les Commençans. La maniere de s'en ſervir eſt de prendre le chifre qui ſert de multiplicateur dans la premiere colonne à gauche. Par exemple, ſi on veut multiplier 8 par 7, il faut prendre 7 dans la celule *a* de la premiere colonne. Il faut enſuite choiſir la colonne au haut de laquelle ſe trouve le multiplié qui eſt ici 8; & la cellule *c* de cette colonne, qui ſe trouve vis-à-vis du multiplicateur 7, contient le produit 56 de 8 multiplié par 7. Il en eſt de même des autres.

AVERTISSEMENT.

LES Commençans doivent apprendre par cœur cette table & ſe la rendre très familiere, s'ils veulent pratiquer facilement la Multiplication & la Diviſion des nombres entiers; car les difficultez qu'ils pourront trouver dans la pratique de l'une & de l'autre, ne viendront que de ce qu'ils n'auront pas cette table aſſez familiere.

La Multiplication des nombres entiers.

PROBLÊME.

79. *MULTIPLIER un nombre entier quelconque qu'on nommera* b, *par un autre nombre entier qu'on appellera* a, *& en trouver le produit, qu'on marquera par* c.

REGLE *ou operation*. 1°. Il faut écrire le multiplicateur *a* ſous le nombre à multiplier *b*, obſervant d'écrire les unitez de *a* ſous les unitez de *b*, les dixaines de *a* ſous le dixaines de *b*, & ainſi de ſuite. Il faut tirer une ligne au deſſous.

38063	*b*
5042	*a*
76126	*d*
152252	*e*
....0	*f*
190315	*g*
191913646	*c*

*73. Comme il eſt indifferent * de prendre le multiplié pour le multiplicateur, & le multiplicateur pour le multiplié; il faut écrire, pour la facilité du calcul, le plus grand des deux nombres donnez le premier, & le moindre nombre au deſſous, il ſera le multiplicateur : neanmoins quand le plus petit des deux nombres donnez contient les plus grands chifres comme, 9, 8, 7, 6, & que le plus grand ne contient que les moindres chifres 1, 2, 3, 4, 5, ou qu'il contient pluſieurs zeros, il faut écrire, pour la facilité du calcul, le plus petit nombre le premier, & écrire au deſſous le plus grand qu'on prendra pour le multiplicateur.

2°. Il faut multiplier les unitez, les dixaines, les centaines, &c. du nombre à multiplier *b* par les chifres des unitez du multiplicateur *a*, & en écrire le produit *d* ſous la ligne, en mettant les unitez du produit *d* au rang des unitez, les dixaines de ce produit au rang des dixaines, & ainſi de ſuite.

3°. Il faut de même multiplier le nombre *b* par le chifre des dixaines du multiplicateur *a;* mais il faut ne commencer à écrire le premier chifre à droite, du produit *e* qui en viendra, qu'au rang des dixaines.

4°. Il faut multiplier de la même maniere le nombre *b* ſucceſſivement par les chifres des centaines, des mille, des dixaines de mille, &c. du multiplicateur *a*, en commençant d'écrire le premier chifre à droite de chacun des produits *f*, *g*, &c. qui viendront de ces multiplications, au rang du chifre qui ſert de multiplicateur à chacun de ces produits; c'eſt à dire, le premier chifre du produit *f*, du nombre *b* multiplié par le chifre des centaines, ne doit s'écrire qu'au troiſiéme rang, qui eſt le rang des centaines : de même le premier chifre du produit *g* du nombre *b* multiplié par le chifre des mille du multiplicateur *a*, ne doit s'écrire qu'au quatriéme rang qui eſt celui des mille, & ainſi de ſuite.

Quand il y a un zero dans le multiplicateur *a*, il ſuffit

d'écrire un zero pour le produit particulier du nombre *b* multiplié par zero, & il faut écrire ce zero au même rang où ſe trouve le zero du multiplicateur, c'eſt à dire au troiſiéme rang, ſi le zero du multiplicateur eſt au troiſiéme rang. Et s'il y avoit pluſieurs zeros au multiplicateur, il ſuffiroit d'écrire autant de zeros aux rangs qui leur convienent pour le produit de chacun de ces zeros multipliant le nombre *b*.

5°. Enfin il faut tirer une ligne au deſſous des produits particuliers qu'on vient de trouver; ajouter tous ces produits particuliers, & en écrire la ſomme *c* au deſſous de la ligne qu'on vient de tirer. Cette ſomme *c* ſera le produit du nombre *b* multiplié par le nombre *a*.

Ce qu'on vient de preſcrire s'éclaircira par les exemples.

EXEMPLE I.

POUR multiplier 38063 par 5042, 1°, j'écris le premier nombre *b*, & au deſſous le ſecond *a*, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c. & je tire une ligne.

38063	*b*
5042	*a*
76126	*d*
152252	*e*
....0	*f*
190315	*g*
191913646	*c*

2°. Je multiplie le nombre *b* par le chifre 2 des unitez du multiplicateur *a*, en diſant 2 fois 3 font 6, j'écris 6 ſous la ligne au rang des unitez; & je dis enſuite 2 fois 6 font 12, j'écris 2 ſous la ligne au rang des dixaines, & je retiens 1 pour le rang ſuivant; puis je dis 2 fois 0 = 0; (car 0 ou rien multiplié tant de fois qu'on voudra n'eſt que zero ou rien) j'écris 1 que j'avois retenu au rang des centaines du produit *d*; & je dis 2 fois 8 = 16, j'écris 6 au quatriéme rang du produit *d*, & je retiens 1; enfin je dis 2 fois 3 font 6 & 1 que je retenois font 7, j'écris 7 au cinquiéme rang, & le nombre *d* eſt le produit particulier du nombre *b* multiplié par le chifre 2 des unitez du multiplicateur *a*.

3°. Je multiplie le nombre *b* par le chifre 4 des dixaines du multiplicateur *a*, en diſant 4 × 3 = 12, j'écris 2 au produit *e* au rang des dixaines; parceque le multiplicateur 4 vaut des dixaines, & je retiens 1 pour le rang ſuivant. Puis je dis 4 × 6 = 24, 24 & 1 que je retenois font 25, j'écris 5 au produit *e*, & je retiens 2. Et je dis 4 × 0 = 0; 0 & 2 que je retenois font 2, j'écris 2 au produit *e*. Je dis enſuite 4 × 8

$= 32$, j'écris 2 au produit e, & je retiens 3. Enfin je dis $4 \times 3 = 12$; 12 & 3 que je retenois font 15, j'écris 15 au produit e, & le nombre e eſt le produit du nombre b multiplié par le chifre 4 des dixaines du multiplicateur a.

4°. Je multiplie le nombre b par le chifre des centaines ou du troiſiéme rang du multiplicateur a; mais o ſe trouvant dans ce troiſiéme rang, & le produit d'un nombre multiplié par o ou rien, étant o ou rien, il faut écrire un zero au troiſiéme rang ſous les produits précedens pour occuper le troiſiéme rang, & pour faire ſouvenir qu'il faudra écrire le premier chifre du produit ſuivant au quatriéme rang.

Je paſſe donc à la multiplication du nombre b par le chifre 5 du quatriéme rang du multiplicateur a, & je dis $5 \times 3 = 15$; j'écris 5 au quatriéme rang du produit g, & je retiens 1; puis je dis $5 \times 6 = 30$; $30 + 1$ que je retenois $= 31$, j'écris 1 dans le produit g, & je retiens 3 pour le rang ſuivant, & je dis $5 \times 0 = 0$; $0 + 3 = 3$; j'écris 3 au produit g, & je dis $5 \times 8 = 40$; j'écris o au produit g, & je retiens 4; je dis enfin $5 \times 3 = 15$, & $15 + 4 = 19$, j'écris 19 au produit g, & le nombre g eſt le produit du nombre b multiplié par le chifre 5 du quatriéme rang du multiplicateur a.

5°. Enfin je tire une ligne ſous les produits que je viens de trouver, & je fais l'addition de tous ces produits particuliers $d + e + f + g$, & leur ſomme c eſt le produit total du nombre b multiplié par le multiplicateur a.

EXEMPLE II.

POUR multiplier les nombres a & b l'un par l'autre; & pour en trouver le produit, j'écris le nombre b le premier, quoiqu'il ſoit le plus petit, & j'écris au deſſous le nombre a que je prens pour le multiplicateur; parceque le nombre a contenant pluſieurs zeros & les moindres chifres, la multiplication en ſera plus facile à faire. Je tire une ligne, & je fais enſuite la multiplication du nombre b ſucceſſivement par les chifres des unitez, des dixaines, &c. du multiplicateur a, comme dans l'exemple précedent, & j'écris les produits de toutes ces multiplications particulieres, comme on le voit dans le ſecond exemple. Je tire une ligne au deſſous; je

```
    9687  b
   30201  a
  -------
    9687
  193740
290610
  -------
292557087  c
```

je fais l'addition de tous les produits particuliers, & j'en écris la ſomme *c* ſous la ligne que je viens de tirer, & cette ſomme *c* eſt le produit total qui vient de la multiplication du nombre *b* par le nombre *a*.

La maniere d'abreger la multiplication dans un cas qui eſt de grand uſage.

80. QUAND l'un des deux nombres donnez à multiplier l'un par l'autre, ne contient que l'unité précedée d'un ou de pluſieurs zeros, comme 10, 100, 1000, 10000, &c. il faut prendre ce nombre 10, 100, &c. pour le multiplicateur, & écrire ſimplement devant l'autre, le nombre des zeros du multiplicateur, & il deviendra par là le produit que l'on cherche. Ainſi pour multiplier 379 par 10, il faut écrire 3790 pour le produit. Pour multiplier le même nombre 379 par 100, par 1000, par 10000, &c. il faut écrire pour le produit 37900, 379000, 3790000, &c. En voici la raiſon. Multiplier un nombre par 10, par 100, par 1000, &c. c'eſt trouver le nombre qui le contient 10 fois, 100 fois, &c. ou ce qui revient au même; c'eſt trouver le nombre qui vaut 10 fois plus, 100 fois plus, 1000 fois plus, &c. que le nombre propoſé. Or * en mettant 0 devant le nombre propoſé 379, on le fait valoir 10 fois plus qu'il ne valoit; en mettant 00, on le fait valoir 100 fois plus; en mettant 000, on le fait valoir 1000 fois plus, &c. Par conſéquent en écrivant 0, 00, 000, &c. devant un nombre donné, on le multiplie par 10, par 100, &c. * 15.

COROLLAIRE I.

81. DANS la multiplication d'un chifre du multiplié *b* par un chifre du multiplicateur *a*, il y a devant leur produit autant de rangs, qu'il y en a enſemble devant le chifre multipliant, & devant le chifre multiplié.

Par exemple, quand on multiplie un chifre 3 qui eſt au quatriéme rang, & qui a trois rangs devant lui, par un chifre 2 qui eſt au troiſiéme rang, & qui a deux rangs devant lui; il y a devant leur produit 6, trois rangs plus deux rangs, c'eſt à dire cinq rangs, & ce produit eſt au ſixiéme rang.

3000
200
600000

Cela eſt évident ; car multiplier 3000 par 200, eſt la même choſe que de multiplier 3000 par 100, moitié de 200, puis de multiplier encore 3000 par 100, & d'ajouter enſuite en une ſomme les deux produits qui ſont chacun 300000; & cette ſomme eſt le produit de 3000 par 200. Or par *l'article* 80, dans chacun des produits de 3000 multiplié par 100, qui eſt 300000, il y a cinq rangs devant le produit 3 fait de 3 multiplié par 1 ; & dans la ſomme 600000 de ces deux produits, il y a le même nombre de rangs, c'eſt à dire cinq rangs devant 6, qui eſt le produit de 3 par 2. Donc, &c.

	3000	3000
	100	100
	300000	300000
	300000	
	300000	
	600000	

COROLLAIRE II.

82. LE Corollaire précedent fournit une maniere d'abreger la multiplication, quand le multiplié *b* & le multiplicateur *a* ſont des nombres qui contiennent chacun pluſieurs zeros au devant des chifres. Car pour multiplier *b* 530000 par *a* 24000, il ſuffit de multiplier 53 par 24, & d'ajouter à leur produit 1272 autant de zeros qu'il y en a devant les deux nombres 53 & 24, c'eſt à dire ſept zeros, & 12720000000 ſera le produit du nombre *b* multiplié par le nombre *a*.

Démonſtration du Problême.

*81. IL eſt évident par le premier Corollaire * & par l'operation même, qu'en ſuivant ce qui eſt preſcrit dans la regle de
*79. la multiplication *, le nombre *c* contient le multiplié *b* autant de fois que l'unité eſt contenue dans les chifres des unitez, des dizaines, des centaines, &c. du multiplicateur *a*, c'eſt à dire autant de fois que l'unité eſt contenue dans le multiplicateur *a*. Donc le nombre *c*, que fait découvrir la Regle * de la multiplication, eſt ** le produit du nombre *b* par
*79. **77. le nombre *a*. *Ce qu'il falloit démontrer*.

REMARQUE.

83. SI l'on avoit plus de deux nombres entiers à multiplier les uns par les autres, il faudroit d'abord multiplier les deux premiers l'un par l'autre, & multiplier enſuite le produit des

deux premiers par le troiſiéme, puis le produit des trois premiers par le quatriéme, & ainſi de ſuite; & le dernier produit qu'on trouveroit, ſeroit le produit de tous les nombres donnez les uns par les autres.

La multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales.

84. LA multiplication de deux nombres *b* & *a*, qui contiennent des parties décimales, ſe fait comme la multiplication de deux nombres entiers. Il faut écrire ces nombres *b* & *a* l'un ſous l'autre comme s'ils étoient entiers; il faut enſuite multiplier le nombre *b* par le nombre *a*, comme dans les nombres entiers, & en écrire le produit *c*.

I. EXEMPLE.

1.234^{III}	*b*
2.13^{II}	*a*
3702	
1234	
2468	
2.62842^{V}	*c*

La ſeule Regle particuliere à la multiplication de ces nombres, eſt que pour diſtinguer, dans le produit, les parties décimales d'avec les entiers, il faut mettre autant de rangs dans le produit *c*, pour les parties décimales, qu'il y en a dans les nombres *b* & *a* pris enſemble. Par exemple, il y a trois rangs de parties décimales dans *b*, & deux rangs dans *a*, ce qui fait enſemble cinq rangs; il faut mettre dans le produit *c* le point qui diſtingue les parties décimales avant le cinquiéme rang, de façon qu'il y ait cinq rangs de parties décimales dans le produit *c*.

Il y a pluſieurs cas de la multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales, dans leſquels le produit ne contient que des parties décimales ſans entiers, comme on le voit dans le ſecond & dans le troiſiéme exemple. Dans ce cas, la multiplication ſe fait de la même maniere que dans le premier exemple, il faut ſeulement avoir ſoin de bien diſtinguer par des zeros les rangs des parties décimales, & de mettre le point qui diſtingue les parties décimales d'avec les entiers à la gauche au devant

II. EXEMPLE.

4.0942	
0.0231	
40942	
122826	
81884	
0.094576$02^{VIII}$	

III. EXEMPLE.

0.00324	
0.0 00032	
648	
972	
0.00000 01036 8^{IX}	

de tous ces rangs, & un zero plus à gauche que n'eſt ce point, pour diſtinguer la place des entiers, & mettre ce point dans le produit de façon qu'il y ait autant de rangs vers la droite après le point, qu'il y a de rangs de parties décimales dans le multiplicateur & dans le multiplié pris enſemble; c'eſt à dire, il doit y avoir huit rangs après le point vers la droite dans le ſecond exemple, & onze rangs dans le troiſiéme exemple.

Démonſtration de la multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales.

85. ON ſe ſervira du premier exemple pour faire la démonſtration, & on va démontrer
*84. que le produit *c*, trouvé par la regle *, eſt le veritable produit de *b* multiplié par *a*. Pour rendre la démonſtration plus diſtincte, on nommera b le nombre entier 1234, & *b* le nombre décimal 1.234. On nommera a le nombre entier 213, & *a* le nombre décimal 2. 13. On appellera c le nombre entier 262842, & *c* le nombre décimal 2.62842.

I. EXEMPLE.

1.2 34^{III}	*b*
2. 1 3^{II}	*a*
3 7 0 2	
1 2 3 4	
2 4 6 8	
2.6 2 8 4 2^{V}	*c*

*79. 1°. Il eſt évident * que 262842 (c) eſt le produit des nombres entiers 1234 (b) & 213 (a) multipliez l'un par l'au-
*79. tre. Par conſequent * 262842 (c) = 213 × 1234 (a × b.)

Le produit de 1. 234 (*b*) par 213 (a) peut être repréſenté par a × *b*. Or * $\frac{b}{b} = \frac{a \times b}{a \times b}$. C'eſt à dire $\frac{1.234}{1.234} = \frac{213 \times 1.234}{213 \times 1.234}$.
*75. dans le premier rapport le ſecond terme qui eſt le nombre
*18. décimal 1. 234 (*b*) vaut * mille fois moins que le premier terme qui eſt le nombre entier 1234 (*b*.) Donc, dans le ſecond rapport le produit a × *b*, qui en eſt le ſecond terme, doit valoir mille fois moins que le produit a × b, qui eſt 262842 (c.) Or pour faire valoir 262842 mille
*18. fois moins qu'il ne vaut, il faut écrire * 262. 482. Ainſi l'on a déja démontré qu'en multipliant un nombre décimal 1. 234 (*b*) par un nombre entier 213 (a,) le produit 262. 482, qui eſt repréſenté par a × *b*, doit avoir autant de rangs de parties décimales, qu'en a le nombre décimal à multiplier, qui eſt 1. 234 (*b*.)

2°. Le produit du nombre décimal 1. 234 (*b*) multiplié par le nombre décimal 2. 13 (*a*,) peut être repréſenté par *a* × *b*.

Or * $\frac{a}{a} = \frac{a \times b}{a \times b}$: & dans le premier rapport le conſequent 2. 13 (*a*) * vaut cent fois moins que l'antecedent 213 (a.) Donc le conſequent $a \times b$ du ſecond rapport doit valoir cent fois moins que l'antecedent 262. 842 ($a \times b$.) * 75. * 18.

Mais pour faire valoir 262. 842 ($a \times b$) cent fois moins qu'il ne vaut *, il faut reculer vers la gauche le point de deux rangs, & écrire 2. 62842 ($c = a \times b$.) Par conſequent 2. 62842 (*c*) eſt le veritable produit du nombre décimal 1. 234. (*b*) multiplié par le nombre décimal 2. 13 (*a*.) Et l'on a démontré qu'il faut prendre dans le produit de deux nombres qui contiennent chacun des parties décimales, autant de rangs pour le parties décimales qu'il y en a dans les nombres multipliez l'un par l'autre pris enſemble. * 18.

Uſage de la multiplication pour les nombres de differentes eſpeces.

86. DANS les nombres de differentes eſpeces, la multiplication ſert à réduire les plus grandes eſpeces aux moindres. Cette réduction ſe fait en multipliant le nombre de l'eſpece qu'on veut réduire à une moindre par le nombre qui exprime combien de fois cette moindre eſpece eſt contenue dans la plus grande qu'on veut réduire à cette moindre eſpece, le produit ſera cette plus grande eſpece réduite à cette moindre eſpece.

Par exemple, pour réduire une longueur de 10 toiſes en pieds, il faut multiplier 10 toiſes par le nombre 6, qui exprime combien de fois un pied eſt dans une toiſe, & le produit ſera 60 pieds. Ainſi 10 toiſes valent 60 pieds.

Pour réduire 60 pieds en pouces, il faut multiplier 60 pieds par le nombre 12, qui exprime combien de fois un pouce eſt dans une toiſe, & le produit ſera 720 pouces. Ainſi 60 pieds réduits en pouces valent 720 pouces.

Pour réduire 10 toiſes immediatement en pouces, il faut multiplier 10 toiſes par le nombre 72 qui exprime combien de fois un pouce eſt dans une toiſe, & l'on aura le produit 720 pouces pour la valeur de 10 toiſes réduites en pouces.

De même dans le Commerce, pour réduire un nombre des livres comme 10 livres, en ſous; il faut multiplier 10 livres par 20, & le produit 200 ſous ſera la valeur de 10 livres ré-

duites en ſous. Pour réduire immédiatement 10 livres en deniers, il faut multiplier 10 livres par le nombre 240, qui exprime combien de fois un denier eſt dans une livre, & le produit 2400 deniers ſera la valeur de 10 livres réduites en deniers.

Cette réduction des plus grandes eſpeces aux moindres eſt évidente par elle-même.

La Multiplication des nombres de differentes eſpeces.

REGLE GENERALE.

87 POUR multiplier un nombre *b*, qui contient differentes eſpeces par un autre nombre *a*, qui contient auſſi differentes eſpeces, la regle generale eſt qu'il faut réduire l'un & l'autre chacun à ſa moindre eſpece, & multiplier enſuite les deux nombres réduits aux moindres eſpeces l'un par l'autre; le nombre qui viendra de cette multiplication ſera le produit des deux nombres *b* & *a* réduits à la moindre eſpece. On réduira enfin ce produit aux plus grandes eſpeces qu'il contient par le moyen de la Diviſion, comme on l'enſeignera dans la ſection où l'on expliquera la Diviſion.

EXEMPLE.

SUPPOSE' qu'on ait fait le prix d'une toiſe de maçonerie à 20 liv. 5 ſous 6 deniers; combien faut-il payer, pour 10 toiſes 3 pieds 6 pouces? Il eſt viſible qu'il faut multiplier les 10 toiſes 3 pieds 6 pouces par 20 liv. 5 ſols 6 deniers pour en ſçavoir le prix. Selon la regle il faut réduire 20 livres 5 ſous 6 deniers en deniers, & l'on trouvera 4866 deniers. Il faut auſſi réduire en pouces les 10 toiſes 3 pieds 6 pouces, & l'on trouvera 762 pouces. Enfin il faut multiplier 762 pouces par 4866 deniers, & l'on trouvera pour le produit 3707892 deniers; c'eſt le prix de 10 toiſes 3 pieds 6 pouces. On apprendra dans la Diviſion le moyen de trouver les livres, les ſous & les deniers que contient ce produit.

Cet exemple ſuffit pour faire concevoir clairement la multiplication des nombres de differentes eſpeces.

La Multiplication des grandeurs litterales.

DE'FINITION.

88. POUR marquer que deux grandeurs litterales *a* & *b* ſont multipliées l'une par l'autre, on les joint immédiatement. Ainſi *ab* marque le produit de *b* multipliée par *a*. De même *abc* marque le produit des trois grandeurs *a*, *b*, *c* multipliées les unes par les autres. *abcd* marque le produit des quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, multipliées les unes par les autres, & ainſi des autres.

On peut auſſi exprimer le produit de deux grandeurs *a* & *b*, en ſe ſervant de cette marque × de la multiplication, & le produit ſera $a \times b$; mais dans le calcul litteral il eſt plus court de ſe ſervir de la premiere maniere, & l'on n'employe d'ordinaire la marque × dans la multiplication des grandeurs litterales, que quand les grandeurs ſont complexes, & encore ne s'en ſert-on que quand l'on a beſoin de diſtinguer les grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, qui ſe confondroient par la multiplication; & quand on employe la marque × pour la multiplication des grandeurs complexes, on tire une ligne ſur chacune des grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, de cette façon $\overline{ab + bc} \times \overline{ac + cd}$; ce qui ſignifie que la grandeur complexe $\overline{ab + bc}$, qui eſt ſous la premiere ligne, eſt multipliée par la grandeur complexe $\overline{ac + cd}$ qui eſt ſous la ſeconde ligne.

Quand il n'y a que deux grandeurs *a* & *b* multipliées l'une par l'autre, on dit que le produit *ab* eſt *de deux dimenſions*, quelques uns le nomment auſſi produit *plan*, ou ſimplement *le plan* des grandeurs *a* & *b*; quand il y a trois grandeurs, on dit que le produit *abc* eſt *de trois dimenſions*; quelques-uns nomment auſſi le produit *abc le ſolide* des trois grandeurs *a*, *b*, *c*; quand il y a quatre grandeurs, on dit que le produit *abcd* eſt *de quatre dimenſions*; & ainſi à l'infini. On nomme auſſi les grandeurs multipliées les unes par les autres *les côtez*, & encore *les dimenſions* ou *les multiplicateurs* du produit.

89. Quand les dimenſions d'un produit ſont égales, c'eſt à dire quand c'eſt la même grandeur qui eſt multipliée par elle-même, comme *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. on nomme le produit *une*

puiſſance de la grandeur *a* qui eſt multipliée par elle-même; & la grandeur *a*, qui eſt ainſi multipliée par elle-même, s'appelle *la racine* de cette puiſſance. *aa* eſt la ſeconde puiſſance de *a*; *aaa* en eſt la troiſiéme puiſſance; *aaaa* la quatriéme puiſſance, & ainſi de ſuite; *a* eſt auſſi la racine deuxiéme de *aa*, la racine troiſiéme de *aaa*; & ainſi de ſuite.

Pour abreger, au lieu d'écrire dans chaque puiſſance d'une grandeur comme *aa*, *aaa*, *aaaa*, cette grandeur *a* autant de fois que la puiſſance a de dimenſions égales, on écrit la grandeur *a* une ſeule fois, & l'on écrit au haut de cette grandeur vers la droite, en moindre caractere, le nombre qui exprime combien de fois cette puiſſance contient la lettre *a*, de cette maniere a^2, a^3, a^4, a^5, &c. Ces nombres 2, 3, 4, 5, &c. écrits au haut de la grandeur *a*, s'appellent *les expoſans* des puiſſances de la grandeur *a*. Ainſi a^2 eſt la ſeconde puiſſance de *a*; a^3 en eſt la troiſiéme puiſſance; a^4 la quatriéme puiſſance; & ainſi à l'infini. Et la grandeur *a* eſt la racine deuxiéme de a^2, la racine troiſiéme de a^3, &c. Une grandeur litterale, qui n'eſt multipliée par aucune autre; ſe nomme *grandeur lineaire*; ainſi *a*, *b*, $a + b$, &c. ſont des grandeurs lineaires.

Neanmoins on ne laiſſe pas de nommer une grandeur lineaire *a*, la premiere puiſſance de cette grandeur, & on lui donne l'unité pour expoſant, de cette maniere a^1; ce qui ſignifie ſimplement *a*. On diſtingue auſſi les puiſſances d'une grandeur *par degrez*; & l'on dit que a^1 eſt la puiſſance de *a du premier degré*; a^2 la puiſſance *du ſecond degré*; a^3 la puiſſance de *a du troiſiéme degré*; & ainſi de ſuite.

COROLLAIRE.

90. L'UNITE' étant multipliée par elle-même, le produit eſt
*72. l'unité; * car 1. 1 :: 1. 1. D'où l'on voit que toutes les puiſſances de l'unité ſont toujours chacune l'unité.

REMARQUES.

I.

CES manieres de marquer la multiplication des grandeurs litterales en les joignant enſemble, ou en mettant entre-deux le ſigne de la multiplication; comme auſſi la maniere d'exprimer

primer les puiſſances des grandeurs par les nombres qui en ſont les expoſans, ſont des ſignes arbitraires : c'eſt pourquoi on les a fixez à cela par des définitions de nom, comme l'on a déterminé le ſigne + pour marquer l'addition des grandeurs litterales comme dans $a + b$, le ſigne — pour en marquer la ſouſtraction ou le retranchement comme dans $a - b$. C'eſt de la même maniere qu'on a déterminé les caracteres des neuf chifres à exprimer les nombres juſqu'à neuf, & qu'on a employé la diſpoſition de ces chifres en differens rangs ſucceſſivement de droite à gauche, à faire valoir ces chifres ſelon la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. 10. 100. 1000, &c. Cela eſt cauſe que ces expreſſions n'ont pas beſoin de démonſtration. Cependant ces expreſſions ſervent à apprendre facilement toutes les Mathematiques, & à découvrir la réſolution de leurs Problêmes d'une maniere aiſée, courte & generale.

2.

On doit remarquer que l'expreſſion a^3, par exemple, eſt bien differente de $3a$; car ſuppoſant $a = 3$, l'expreſſion a^3 marque le produit $3 \times 3 \times 3 = 27$, & l'expreſſion $3a$ marque la ſomme $3 + 3 + 3 = 9$.

COROLLAIRE I.

91. PUISQUE ab * eſt le produit de b par a, l'on a cette proportion * 1. $a :: b . ab$, & ſon alterne 1. $b :: a . ab$. Et generalement, en partageant un produit quelconque abc en deux parties a & bc, qui étant multipliées l'une par l'autre forment ce produit abc, l'on aura toujours cette proportion 1. $a :: bc . abc$, & ſon alterne 1. $bc :: a . abc$. * 72. * 72.

COROLLAIRE II.

92. TOUTE grandeur a peut être regardée comme étant le produit de cette grandeur a par l'unité. C'eſt à dire, on peut regarder a comme égale à $1 \times a$; de même on peut conſiderer abc comme égale à $1 \times abc$. Car * 1 . 1 :: $a . 1 \times a$. De même * 73. 1. 1 :: $abc . 1 \times abc$. Ce qu'on peut aiſément appliquer à toutes les grandeurs.

THEOREME.

93. QUAND on multiplie pluſieurs grandeurs comme *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, quelqu'ordre qu'on obſerve, le produit eſt toujours le même. C'eſt à dire les produits *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* ſont des grandeurs égales; & de même tous les produits qu'on peut former de quatre grandeurs ſont égaux; tous les produits qu'on peut faire de cinq grandeurs ſont égaux; & ainſi à l'infini.

Préparation pour la démonſtration. Une même grandeur *a* ne peut être priſe qu'une fois. Deux grandeurs *a* & *b* peuvent recevoir des arrangemens, *ab*, *ba*. Trois grandeurs *a*, *b*, *c* peuvent recevoir 2 fois 3 ou 6 arrangemens; car chacune de trois étant miſe dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangemens, ce qui fait 2 fois 3 ou 6 arrangemens que voici : *abc*, *acb*; *bac*, *bca*; *cab*, *cba*. Quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d* peuvent recevoir 4 fois 6 ou 24 arrangemens : car chacune étant miſe au premier rang, les trois autres peuvent recevoir ſix arrangemens, ce qui en fait 4 foi 6 ou 24 que voici : *abcd*, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*. *bacd*, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*. *cabd*, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*. *dabc*, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*. D'où l'on voit clairement que cinq grandeurs pourront recevoir 5 fois 24 ou 120 arrangemens; ſix en pourront recevoir 6 fois 120, ou 720; ſept, 7 fois 720, &c. & que pour trouver le nombre de ces arrangemens, il n'y a qu'à prendre ſucceſſivement les produits des nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, &c. Par exemple, pour avoir le nombre des arrangemens de ſept gandeurs, il faut prendre le produit de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$. Et pourvû qu'on aille de ſuite, on marquera facilement tous ces arrangemens.

Il faut, pour démontrer le Theorême, faire voir que les produits qui naiſſent de tous les arrangemens de deux grandeurs litterales *a* & *b*, ſont égaux; que tous ceux qui viennent de trois *a*, *b*, *c* ſont égaux, & de même ceux qui viennent de quatre *a*, *b*, *c*, *d* &c.

L'on a déja démontré (*dans l'article* 73) que les produits *ab*, *ba* ſont égaux; on va démontrer l'égalité des ſix produits qui peuvent ſe former de trois grandeurs *a*, *b*, *c*, l'égalité des produits qui peuvent ſe former de quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*; & ainſi à l'infini.

Démonſtration du Théorême.

IL eſt évident que $a \times bc = a \times cb$ *; & de même * $b \times ac$ * 73. & $= b \times ca$; & $c \times ab = c \times ba$. 76. *73.

Ainſi en démontrant que $abc = bca$, & $acb = cba$; on démontrera que les ſix produits ſont égaux. En voici les démonſtrations. 1re. $a \times bc =$ * $bc \times a$, & $a \times cb =$ * $cb \times a$. *73.

2e. 1. a:: bc. $a \times bc$ *; donc l'on aura l'alterne 1. bc:: a. bc * 72. $\times a$. Or les trois premiers termes de ces deux proportions ſont les mêmes, les quatriémes ſont donc auſſi les mêmes *. Ainſi * 54. $abc = bca$.

De même * 1. a:: cb. $a \times cb$; par conſequent l'on aura * 72. la proportion alterne 1. cb:: a. $cb \times a$. Les trois premiers termes ſont les mêmes dans ces deux proportions: donc $acb = cba$. *Cette 2e démonſtration n'eſt que la premiere plus étendue.*

On a donc démontré que les ſix produits qu'on peut former des trois grandeurs a, b, c, ſont égaux: voici la démonſtration pour les produits qui peuvent être formez de quatre grandeurs, enſuite de cinq grandeurs, &c.

Parmi les 24 produits qu'on peut former des 4 grandeurs a, b, c, d, il eſt évident, par la démonſtration précedente pour les produits des trois grandeurs, & *par l'article* 76, où l'on a démontré que les grandeurs égales étant multipliées par la même grandeur, les produits ſont égaux; il eſt, dis-je, évident que les ſix produits dans leſquels chacune des lettres a, b, c, d occupe le premier rang, ſont égaux entr'eux. Et il eſt facile de prouver, comme dans les démonſtrations qui précedent pour les produit des trois grandeurs, qu'il y a un produit dans les ſix, dont a occupe la premiere place, égal à un des ſix produits, où chacune des trois autres grandeurs b, c, d occupe la premiere place.

1re *Démonſtration.* $a \times bcd$ * $= bcd \times a$; $abd \times c =$ * $c \times$ * 73. abd; $acb \times d =$ * $d \times acb$. *73.

2e. *Pour les deux premiers produits.* On a cette proportion 1. a:: bcd. $a \times bcd$. Et ſon alterne 1. bcd:: a. $bcd \times a$. Par conſequent $abcd = bcda$. Ce qu'on peut ſi facilement étendre aux autres produits, qu'il eſt inutile de s'y arrêter.

Il eſt clair que les mêmes démonſtrations peuvent s'appliquer de la même maniere à prouver l'égalité de tous les produits qui peuvent ſe former de cinq grandeurs a, b, c, d, e,

& enſuite à tous ceux qui peuvent être formez de ſix grandeurs a, b, c, d, e, f; & ainſi de ſuite à l'infini.

REMARQUE.

QUOIQU'IL ſoit indifferent d'avoir égard à l'ordre des grandeurs litterales dans les produits qui en ſont formez, il eſt bon neanmoins de s'accoutumer à mettre dans les produits les lettres ſuivant le rang qu'elles occupent dans l'alphabet; ainſi il eſt bon d'écrire $abcd$, plûtôt que $bdca$; & ainſi des autres. Cet ordre auquel on eſt accoutumé par l'alphabet ſoulage la mémoire, & peut prévenir beaucoup d'erreurs dans les calculs.

La Multiplication des grandeurs litterales incomplexes,

PROBLÊME II.

94. QUAND on veut multiplier une grandeur incomplexe, comme $+3a$ par une autre grandeur incomplexe $-4bc$; il y a trois choſes à faire pour en former le produit; 1°. Il faut trouver le produit des lettres, & cela n'a aucune difficulté; car il n'y a qu'à joindre les lettres, & le produit en ſera abc. 2°. Il faut multiplier, par la regle de la multiplication des nombres entiers, les nombres qui précedent les grandeurs litterales dans le multiplié $3a$, & dans le multiplicateur $4bc$, & en écrire le produit devant celui des lettres & l'on aura $12abc$. 3°. Il faut trouver quel doit être le ſigne qui doit préceder le produit, en voici la regle.

Regle pour le ſigne du produit dans la Multiplication.

95. QUAND les ſignes du multiplicateur & du multiplié ſont tous deux $+$, ou tous deux $-$, le ſigne du produit doit être $+$. Ainſi $+3a \times +4bc = +12abc$, & $-3a \times -4bc = +12abc$.

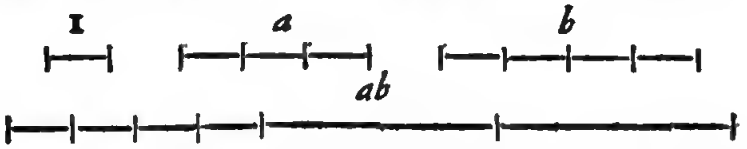
Quand les ſignes du multiplicateur & du multiplié ſont differens, & que l'un eſt $+$ & l'autre $-$, le ſigne du produit doit être $-$. Ainſi $+3a \times -4bc = -12abc$, & $-a \times +4bc = -12abc$.

Suppoſition pour la démonſtration.

L'UNITE' poſitive eſt toujours le premier terme de la proportion, dont les deux grandeurs multipliées l'une par l'autre ſont le ſecond & le troiſiéme terme, & dont le produit eſt le quatriéme terme.

Démonſtration de la Regle ſur les ſignes des produits.

QU'ON conçoive que l'unité 1, la grandeur *a* qui eſt le multiplicateur, la grandeur *b* qui eſt le multiplié, & la grandeur *ab* qui eſt le produit, ſont quatre lignes droites, & pour une plus grande facilité que *a* contient trois fois la ligne 1; que *b* contient quatre fois la ligne 1 : la ligne qui eſt le produit *ab* doit contenir trois fois le multiplié *b*. Ainſi $a = 3$, $b = 4$, $ab = 12$.



I. CAS.

Quand l'unité poſitive eſt par addition dans le multiplicateur.

L'UNITE' eſt ſuppoſée toujours poſitive dans la multiplication Quand le multiplicateur a +, 1°. Si le multiplié a auſſi +, le produit aura +; 2°. Si le multiplié a —, le produit aura —.

Le multiplié *b* (4) doit être dans le produit *ab* (12) autant de fois & de la même maniere que l'unité poſitive + 1 eſt dans le multiplicateur *a* (3.) Or + 1 peut être dans le multiplicateur *a* (3) par addition ou par retranchement. C'eſt par addition quand le multiplicateur *a* (3) eſt poſitif, c'eſt à dire quand c'eſt + *a* (+ 3.) Ainſi quand le multiplié + *b* (+ 4) eſt auſſi poſitif, devant être auſſi par addition dans le produit; ce produit eſt par conſequent poſitif, c'eſt à dire + *ab* (+ 12.) D'où l'on voit que *quand le multiplié* + b, & *le multiplicateur* + a *ont tous deux* +, *le produit doit avoir* +. De même quand le multiplié — *b* (— 4) eſt negatif, il doit être par addition dans le produit. Et l'addition de trois fois — *b* (— 4) eſt * — 12, & en lettres — *ab*. D'où l'on * 26.

voit que *quand le multiplicateur a le ſigne + & le multiplié le ſigne —, le produit doit avoir le ſigne —.*

II. CAS.

Quand l'unité poſitive eſt retranchée du multiplicateur.

QUAND le multiplicateur a —; 1°. Si le multiplié a —, le produit aura +: 2°. Si le multiplié a +, le produit aura —.

L'unité poſitive + 1 peut être, pour ainſi dire, par retranchement dans le multiplicateur, ou plûtôt elle peut être retranchée du multiplicateur, & elle en eſt toujours retranchée quand le multiplicateur — *a* (— 3) eſt négatif. Donc ſi le multiplié — *b* (— 4) eſt auſſi negatif, il doit être autant retranché du produit que l'unité poſitive + 1 eſt retranchée du multiplicateur — *a* (— 3.) Or pour retrancher une grandeur
*27. qui a le ſigne —, il faut *l'écrire avec le ſigne +. Donc pour retrancher — 4 trois fois, il faut écrire + 12; ainſi *le produit* + ab (+ 12) *doit avoir le ſigne + quand le multiplicateur & le multiplié ont tous deux le ſigne —.* De même quand le multiplicateur — *a* (— 3) a le ſigne —, & le multiplié + *b* (+ 4) a le ſigne +, le multiplié doit être autant retranché du produit, que l'unité poſitive + 1 eſt retranchée du multiplicateur négatif — *b* (— 3.) Or pour retrancher une
*27. grandeur qui a le ſigne +, il faut l'écrire *avec le ſigne —; donc pour avoir le produit de + *b* (+ 4) par — *a* (— 3,) il faut retrancher trois fois + 4; c'eſt à dire, il faut écrire le produit — 12, & en lettres — *ab*. Donc *quand le multiplicateur a le ſigne —, & le multiplié le ſigne +, le produit doit avoir le ſigne —.*

La multiplication des grandeurs litterales doit être generale, & convenir non-ſeulement aux nombres entiers, mais encore à toutes ſortes de grandeurs, c'eſt à dire aux nombres rompus, & aux grandeurs incommenſurables: c'eſt pourquoi après avoir fait la démonſtration de la regle pour le ſigne du produit, par rapport aux nombres entiers, comme étant la plus facile, on va la rendre generale pour toutes ſortes de grandeurs.

On peut concevoir que les quatre lignes droites 1, *a*, *b*, *ab*, dont la premiere eſt toujours priſe pour l'unité poſitive, repréſentent deux rapports égaux quelconques; c'eſt à dire que $\frac{1}{a} = \frac{b}{ab}$. Et l'unité étant le premier terme de la pro-

portion, le quatriéme terme, c'eſt à dire la ligne ab * eſt le produit du ſecond & du troiſiéme termes multipliez l'un par l'autre. *72.

Par conſequent ſi l'on conçoit le premier terme 1 & le troiſiéme b partagé en un même nombre n de parties égales, quel que ſoit ce nombre, (nommant x chaque partie égale de 1, & y chaque partie égale de b) le premier conſequent a *doit contenir autant de x que le ſecond ab contient de y; (on nommera ce nombre m) & s'il y a un petit reſte de plus dans a *, il doit y avoir de même un petit reſte dans ab de plus que les parties égales y. Et quand ces reſtes s'y trouvent, la proportion $\frac{1}{a} = \frac{b}{ab}$ convient aux grandeurs incommenſurables: & ab eſt * le produit des grandeurs incommenſurables a & b. Ou bien (pour comprendre les grandeurs incommenſurables avec les commenſurables *) quand le nombre n des x compriſes dans l'unité, & des y compriſes dans b, eſt le même nombre fini pour les grandeurs commenſurables, & infini pour les incommenſurables; a doit contenir x un certain nombre de fois qu'on nommera m, & ab doit contenir y le même nombre de fois m, & ce nombre m eſt fini quand les grandeurs ſont commenſurables, & infini quand elles ſont incommenſurables. *47. *50. *72. *51.

I. CAS.

OR quand le multiplicateur a eſt poſitif, x (aliquote poſitive de l'unité) eſt contenue par addition dans le multiplicateur; donc, 1°, ſi le multiplié $+b$ eſt poſitif, & par conſequent les y de b poſitives, ces y doivent être contenues par addition dans le produit ab; par conſequent le produit ab doit avoir $+$. Donc, 2°, ſi le multiplié $-b$ eſt négatif, & par conſequent, les parties égales y qui le compoſent, négatives, ces y negatives doivent être contenues par addition dans le produit ab, qui aura par conſequent * le ſigne $-$. *16 & 27.

II. CAS.

MAIS quand le multiplicateur $-a$ eſt négatif; x (aliquote poſitive de l'unité) eſt retranchée du multiplicateur $-a$ autant de fois que l'exprime le nombre n. Donc, 1°, ſi le multiplié $-b$ eſt auſſi négatif, & par conſequent les y de $-b$ négatives, ces $-y$ négatives dans $-b$ doivent être retranchées dans le produit ab; & par conſequent le pro-

duit ab * doit avoir le ſigne +. Donc, 2°, ſi le multiplié + b eſt poſitif, & par conſequent les y, que contient + b, poſitives; ces y poſitives dans + b, doivent être retranchées dans le produit ab; & par conſequent le produit ab * doit avoir le ſigne —.

* 26 & 27.

COROLLAIRES *ſur les ſignes des produits.*

1.

96. LORSQUE le multiplicateur a le ſigne —, le produit a toujours un ſigne different du ſigne du multiplié.

2.

97. Quand le multiplicateur a le ſigne +, le produit a le même ſigne que le multiplié.

3.

98. Quand il y a pluſieurs grandeurs multipliées les unes par les autres, ſi elles ont chacune le ſigne —, & qu'elles ſoient en nombre pair comme deux, quatre, ſix, &c. le produit aura toujours le ſigne +; & ſi elles ſont en nombre impair, comme trois, cinq, ſept, &c. il aura le ſigne —. Si parmi ces grandeurs multipliées les unes par les autres quelques-unes ont le ſigne —, & d'autres le ſigne +, quand le nombre de celles qui ont le ſigne — eſt pair, le produit aura le ſigne +; quand le nombre de celles qui ont le ſigne — eſt impair, le produit aura le ſigne —.

4.

99. Toute puiſſance paire poſitive d'une grandeur comme + a^2, + a^4, + a^6, + a^8, &c. peut avoir pour racine la grandeur + a poſitive, & la même grandeur — a négative. Car par exemple, + a × + a × + a × + a = + a^4, & — a × — a × — a × — a = + a^4. Mais une puiſſance impaire négative d'une grandeur a comme — a^3, — a^5, &c. a toujours pour racine cette grandeur — a négative; & une puiſſance impaire poſitive a toujours pour racine la grandeur a poſitive.

5.

100. On ne ſçauroit ſuppoſer aucune grandeur réelle qui puiſſe être

être la racine de la puiſſance paire d'une grandeur, quand cette puiſſance a le ſigne —; par exemple, on ne ſçauroit ſuppoſer de racine réelle à aucune des puiſſances $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$, $-a^8$, &c. Car cette racine réelle qu'on ſuppoſeroit, auroit neceſſairement l'un des ſignes + ou —; or en ſuppoſant que cette grandeur ait +, ſa puiſſance paire aura +; en ſuppoſant que cette grandeur ait —, ſa puiſſance paire aura toujours le ſigne +. Donc, &c.

Suppoſé qu'on imagine la racine 2e de $-a^2$, la racine 4e de $-a^4$, la racine 6e de $-a^6$, &c. cette racine eſt *une grandeur impoſſible*, & on l'appelle à cauſe de cela *une racine imaginaire*.

Exemples de la Multiplication des grandeurs incomplexes.

POUR multiplier $+15a^2b$ par $-10abc$, 1°, je dis + par — donne le ſigne — pour le produit. 2°. $10 \times 15 = 150$. 3°. $a^2b \times abc = a^3b^2c$. J'écris donc le produit $-150a^3b^2c$. On fera de même les autres multiplications qu'on voit ici.

EXEMPLE I.	EXEMPLE II.	EXEMPLE III.
$+ 15a^2b$	$-a^3x^2$	$-abc$
$- 10abc$	$-ax$	$+5a^2c$
$-150a^3b^2c$	$+a^4x^3$	$-5a^3bc^2$

La Multiplication des grandeurs litterales complexes.

PROBLÊME

MULTIPLIER une grandeur litterale complexe par une autre grandeur litterale complexe.

101. REGLE *ou operation*. 1°. Il faut écrire la premiere grandeur complexe à multiplier, écrire au deſſous le multiplicateur, & tirer une ligne au deſſous. 2°. Il faut, comme dans la multiplication des nombres, multiplier toute la grandeur à multiplier par la premiere grandeur incomplexe du multiplicateur, par la ſeconde grandeur incomplexe du multiplicateur, par la troiſiéme, & ainſi de ſuite, & en écrire les produits ſous la ligne les uns ſous les autres, & tirer une ligne au deſſous de ces produits. 3°. Il faut faire l'addition de tous ces produits particuliers, & la ſomme qu'on trouvera ſera le produit des deux grandeurs complexes données, mul-

tipliées l'une par l'autre. Quoiqu'il ne ſoit pas néceſſaire de mettre de l'ordre dans les grandeurs qui forment le produit ; il eſt neanmoins très utile d'arranger les grandeurs d'un produit de la maniere qu'on l'expliquera, après avoir appliqué la Regle à des Exemples.

EXEMPLE I.

Pour multiplier $2a^2 - 3ab$ par $3a - 2b$, 1°, j'écris $2a^2 - 3ab$, & au deſſous $3a - 2b$, & je tire une ligne.

2°. Je multiplie $2a^2 - 3ab$ par $-2b$, premiere partie du multiplicateur, & j'en écris le produit $-4a^2b + 6ab^2$ ſous la ligne. Je multiplie enſuite $2a^2 - 3ab$ par $3a$, ſeconde partie du multiplicateur, & j'en écris le produit $+6a^3 - 9a^2b$ ſous le precedent ; & je tire une ligne au deſſous.

$$\begin{array}{r} 2a^2 - 3ab \\ 3a - 2b \\ \hline -4a^2b + 6ab^2 \\ +6a^3 - 9a^2b \\ \hline 6a^3 - 13a^2b + 6ab^2 \end{array}$$

3°. J'ajoute tous les produits particuliers, & j'en écris la ſomme $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$ ſous la ligne ; c'eſt le produit.

On peut remarquer qu'il auroit été indifferent de multiplier $2a^2 - 3ab$ d'abord par $+3a$, & enſuite par $-2b$; il eſt évident qu'on auroit trouvé le même produit.

EXEMPLE II.

Pour multiplier $aa + ab + bb$ par $a - b$, 1°, j'écris le multiplicateur ſous le multiplié, & je tire une ligne.

2°. Je multiplie $aa + ab + bb$ par $-b$, & enſuite par $+a$, & après en avoir écrit les produits, je tire une ligne.

3°. J'ajoute tous les produits particuliers, & je trouve la ſomme $a^3 - b^3$ pour le produit que je cherchois.

$$\begin{array}{r} aa + ab + bb \\ a - b \\ \hline -aab - abb - b^3 \\ +a^3 + aab + abb \\ \hline a^3 \quad * \quad * - b^3 \end{array}$$

On peut remarquer dans cet Exemple de multiplication qu'il y a quelquefois des grandeurs dans les produits particuliers, qui dans l'addition qu'on en fait, pour avoir le produit total, ſont égales à zero, à cauſe de leurs ſignes oppoſez ; c'eſt à dire ces grandeurs ſe détruiſent par leurs ſignes oppoſez + & −, comme $-aab + aab = 0$, & $-abb + abb = 0$; on a marqué cette deſtruction dans le produit total par des étoiles.

EXEMPLE III.

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline -a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ +a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

En multipliant de la même maniere $a^2 - 2ab + b^2$ par $a - b$, on trouvera le produit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2fx + f^2 \\ - g^2 \\ x - 2f \\ \hline -2fx^2 - 4f^2x - 2f^3 \\ + 2fg^2 \\ +x^3 + 2fx^2 + f^2x \\ - g^2x \\ \hline x^3 \quad * - 3f^2x - 2f^3 \\ - g^2x + 2fg^2 \end{array}$$

Enfin en multipliant, ſuivant la même regle, $x^2 + 2fx + f^2 - g^2$ par $x - 2f$, on trouvera le produit $x^3 - 3f^2x - g^2x - 2f^3 + 2fg^2$.

Démonſtration de la multiplication des grandeurs litterales complexes.

IL paroît évident qu'en ſuppoſant une grandeur A diviſée en tant de parties qu'on voudra, comme $b + c + d$; & une autre grandeur B diviſée en tant d'autres qu'on voudra, comme $e + f + g$; le produit, qui doit venir de la multiplication de la grandeur A par B, doit être le même que la ſomme des produits qui viennent de la multiplication de toutes les parties $b + c + d$ de A par chacune des parties $e + f + g$ de B. Par conſequent le produit total d'une grandeur complexe, qui peut être repréſentée par A, multipliée par une autre grandeur complexe, qui peut être repréſentée par B, eſt égal à la ſomme des produits de toutes les parties de la grandeur complexe A multipliées par chacune des parties du multiplicateur complexe B. Or la regle que l'on a donnée fait découvrir la ſomme de ces produits; elle fait donc trouver le produit de la grandeur complexe A multipliée par le multiplicateur complexe B.

La démonſtration précedente paroît evidente pour tous les cas de la multiplication des grandeurs litterales complexes, ſoit que les grandeurs litterales multipliées l'une par l'autre expriment des nombres entiers, ſoit qu'elles expriment ou des grandeurs rompues, ou des grandeurs incommenſurables : ſi cependant quelques Lecteurs trouvoient de la difficulté, par rapport aux deux derniers cas, voici une autre démonſtration.

On prendra pour exemple, afin de rendre la choſe plus ſimple, la multiplication de $a + b$ par $c + d$, dont le produit, ſuivant la Regle, eſt $ac + bc + ad + bd$. Il faut

$$\begin{array}{r} a + b \\ c + d \\ \hline + ac + bc + ad + bd \end{array}$$

démontrer que $\frac{1}{c+d} = * \frac{a+b}{ac+bc+ad+bd}$.

*72. En voici la démonſtration. $\frac{1}{c} = * \frac{a}{ac}$

*72. *56. $= * \frac{b}{bc}$. D'où l'on aura $* \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ac+bc}$.

*72. *56. De même $\frac{1}{d} = * \frac{a}{ad} = * \frac{b}{bd}$. D'où l'on aura $* \frac{1}{d} = \frac{a+b}{ad+bd}$.

*53. *63. Donc $* \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} :: \frac{a+b}{ac+bc} \cdot \frac{a+b}{ad+bd}$. Par conſequent $* \frac{1}{c+d} =$

*72. $\frac{a+b}{ac+bc+ad+bd}$. Ainſi * le produit de $a + b$ multiplié par $c + d$ eſt $ac + bc + ad + bd$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonſtration peut facilement s'appliquer à toutes les multiplications des grandeurs complexes litterales.

REMARQUES.

I.

102. L'ORDRE des grandeurs eſt indifferent dans le produit de deux grandeurs complexes multipliées l'une par l'autre : neanmoins il eſt bon d'ordonner les grandeurs d'un produit de maniere que la grandeur incomplexe, qui contient la puiſſance la plus élevée de l'une des lettres du produit comme a dans les trois premiers exemples, ſoit la premiere grandeur incomplexe du produit la plus à gauche ; que la grandeur qui contient la puiſſance de la même grandeur, dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui de la plus élevée, ſoit la ſeconde grandeur du produit ; que la grandeur qui contient la puiſſance, dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que la précedente, ſoit la troiſiéme grandeur du produit, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere grandeur qui eſt la plus à droite, qui doit contenir la moindre puiſſance de la lettre a, quand la lettre a eſt dans toutes les grandeurs du

produit ; mais quand il y a quelque grandeur, qui ne contient point du tout cette lettre a, cette grandeur doit être la derniere du produit.

On voit dans le troiſiéme exemple que la grandeur du produit vers la gauche eſt a^3 ; la ſeconde $3a^2b$, dans laquelle a^2 eſt une puiſſance de a d'un degré moindre que a^3 ; la troiſiéme eſt $+ 3ab^2$ dans laquelle a eſt, pour ainſi dire, une puiſſance de a moindre d'un degré que a^2 ; enfin $- b^3$, où a ne ſe trouve point, eſt la derniere grandeur du produit.

Quand les grandeurs d'un produit ſont diſpoſées comme on vient de l'expliquer, par rapport aux puiſſances d'une des lettres du produit, on dit que le produit eſt *ordonné par rapport à cette lettre*. Cette lettre eſt ordinairement arbitraire dans les produits; cependant dans les produits qui ſervent à la réſolution des Problêmes, les grandeurs inconnues qu'on marque par les lettres x, y, z, &c. & qui ſont les grandeurs que l'on cherche dans ces Problêmes, ſont les lettres qui ſervent à ordonner les produits, comme on le voit dans le quatriéme exemple.

Toutes les grandeurs d'un produit qui contiennent la même puiſſance de la lettre, par rapport à laquelle le produit eſt ordonné, s'appellent *un terme* du produit; & quand il y en a pluſieurs qui ne ſont qu'un même terme, on les écrit ordinairement les unes ſous les autres, comme dans le quatriéme exemple, où les deux grandeurs $- 3f^2x - g^2x$ ne ſont qu'un même terme. La lettre, par rapport à laquelle un produit eſt ordonné, ſe nomme auſſi *la lettre qui diſtingue les termes du produit*. *Le premier terme* contient la plus haute puiſſance de cette lettre; *le ſecond*, celle qui eſt moindre d'un degré que la plus haute; *le troiſiéme terme*, celle qui eſt moindre que la précedente, & ainſi de ſuite juſqu'au *dernier*, qui contient la moindre puiſſance de cette lettre, quand elle eſt dans toutes les grandeurs du produit ; & quand elle n'eſt pas dans toutes, *le dernier terme* eſt celui qui eſt compoſé de toutes les grandeurs où cette lettre n'eſt pas.

Il arrive quelquefois que les puiſſances de la lettre qui diſtingue les termes d'un produit, ne vont pas en diminuant d'un degré d'un terme à l'autre qui le ſuit ; comme dans ce produit $a^6 + b^2a^4 + b^4a^2 - b^6$

Dans ces cas, pourvû que les expoſans des puiſſances de

cette lettre ſoient en progreſſion arithmetique, comme dans cet exemple, les termes ſe diſtinguent par les puiſſances de cette lettre, dont les expoſans ſont en progreſſion arithmetique Ainſi le premier terme eſt a^6, le ſecond terme eſt $b\,a^4$, & ainſi de ſuite.

2.

103. Quand chacune des grandeurs du produit a le même nombre de dimenſions, on dit que ces grandeurs ſont *homogenes*. Quand un nombre précede une grandeur, il n'eſt pas compté pour une des dimenſions du produit. Ainſi la grandeur $-3a^2b$ n'eſt que de trois dimenſions.

On obſerve ordinairement de faire toutes les grandeurs d'un produit *homogenes*, & cela s'appelle *obſerver la loi des homogenes*.

Si les grandeurs d'un produit n'étoient pas homogenes, on pourroit les rendre homogenes par le moyen de l'unité, ſans en changer la valeur; ainſi pour rendre les grandeurs $abc + cc$ homogenes, on peut multiplier cc par 1, & l'on aura $abc + 1 \times cc$, où les grandeurs ſont homogenes; & il eſt évident * que le produit d'une grandeur par l'unité, n'en change pas la valeur.

* 92.

3.

104. La multiplication des grandeurs litterales eſt generale, & peut convenir à toutes les grandeurs qu'on peut imaginer; car on peut ſuppoſer telles grandeurs qu'on voudra; par exemple, telles lignes droites qu'on voudra repréſentées par les lettres qui ſont multipliées les unes par les autres dans un produit litteral. Or comme on peut ſuppoſer telles grandeurs qu'on voudra repréſentées par les lettres, on peut de même ſuppoſer l'unité, à laquelle ces grandeurs auront rapport, telle qu'on voudra. Ce qui fait voir que l'unité eſt arbitraire dans les grandeurs litterales; & on peut la repréſenter par une lettre. Ainſi l'on peut ſuppoſer que a repréſente la ligne priſe pour l'unité par rapport à deux autres lignes b & c; & la multiplication de ces lignes * renfermera cette proportion $a.\,b :: c.\,bc$.

* 72.

On peut même prendre parmi les grandeurs litterales d'un produit qui ſert à réſoudre une queſtion, celle qu'on voudra pour l'unité, pourvû que dans toute la queſtion on rapporte

toutes les grandeurs litterales à cette ſeule grandeur, comme à l'unité, & qu'on n'en prenne pas d'autres pour l'unité. Cela ſert à faciliter la réſolution de pluſieurs queſtions. Cela ſert auſſi à rendre les grandeurs d'un même produit complexe, homogenes, en ſuppléant par le moyen de la lettre priſe pour l'unité au défaut des dimenſions des grandeurs qui n'en ont pas aſſez pour être homogenes aux autres. Par exemple, ſuppoſant que *a* eſt priſe pour l'unité dans $abc + cc$, on rendra ces deux grandeurs homogenes en écrivant $abc + acc$.

SECTION IV.

Où l'on explique la Diviſion des grandeurs entieres.

DE'FINITIONS.

DEUX nombres étant donnez, comme 12 & 4, ſi l'on cherche combien de fois 4 eſt contenu dans 12, en diſant combien de fois 4 eſt-il en 12? Il y eſt 3 fois; c'eſt ce qu'on nomme *diviſer* 12 par 4.

Le nombre 12 eſt celui que l'on diviſe, & on l'appelle *le dividende* ou *le nombre à diviſer*; le nombre 4, par lequel on diviſe 12, s'appelle *le diviſeur*; le nombre 3 que l'on trouve par la diviſion, & qui exprime combien de fois 4 eſt dans 12, ſe nomme *le quotient*; & c'eſt le quotient que l'on cherche par la diviſion.

Puiſque le diviſeur 4 eſt contenu dans le dividende 12 autant de fois que l'exprime le quotient 3; il eſt évident qu'en prenant le diviſeur 4 autant de fois que le marque le quotient 3, c'eſt à dire 3 fois, on aura le dividende 12 pour le produit de 4 par 3. D'où l'on voit que le dividende 12 eſt le produit du diviſeur 4 multiplié par le quotient 3; ainſi le dividende 12 peut être regardé comme *un produit*, dont *les côtez* ou les dimenſions ſont le diviſeur & le quotient; & dans une diviſion où le produit 12 eſt donné avec un de ſes côtez 4, la diviſion fait trouver l'autre côté 3 du produit.

105. Pour marquer la diviſion d'un nombre par un autre, on écrit le dividende le premier, on tire une ligne au deſſous, & l'on écrit le diviſeur ſous la ligne. Par exemple $\frac{12}{4} = 3$.

ſignifie que 12 diviſé par 4 eſt égal à 3. De même $\frac{c}{b}$ marque que la grandeur c eſt diviſée par la grandeur b; ainſi $\frac{12}{4}$ exprime le quotient de la diviſion de 12 par 4; $\frac{c}{b}$ exprime le quotient de c diviſée par b.

Définition generale de la Diviſion qui convient à toutes ſortes de grandeurs: il faut ſe la rendre très familiere.

106. DIVISER une grandeur quelconque c par une autre grandeur quelconque b, c'eſt trouver une grandeur qu'on nommera a, qui ſoit à l'unité comme le dividende c eſt au diviſeur b.

D'où l'on voit qu'il y a une proportion dans toute diviſion, dont le premier terme eſt le dividende c; le ſecond terme eſt le diviſeur b; le troiſiéme terme eſt le quotient $a = *\frac{c}{b}$, le quatrieme terme eſt l'unité. Le premier, le ſecond & le quatriéme terme de cette proportion ſont donnez, & la diviſion fait trouver le troiſiéme terme qui eſt le quotient. Voici l'expreſſion de cette proportion $c.b :: a\ (\frac{c}{b}).\ 1$. Ou bien $\frac{c}{b} = \frac{a}{1}$.

*105.

COROLLAIRES *qu'il faut ſe rendre très familiers.*

I.

107. LE dividende c eſt le produit du diviſeur b multiplié par le quotient $a = \frac{c}{b}$. Car puiſque les rapports $\frac{c}{b}$ & $\frac{a}{1}$ ſont égaux, leurs rapports inverſes * ſont auſſi égaux $1.a\ (\frac{c}{b}) :: b.c$. Donc * c eſt le produit de b multiplié par a, ou de b multiplié par $\frac{c}{b} = *a$.

*72. *55. *105.

COROLLAIRE II.

108. L'UNITE' étant diviſée par l'unité, le quotient eſt l'unité. $\frac{1}{1} = 1$; car l'unité eſt contenue une fois dans elle-même. Ainſi le quotient qui vient de 1 diviſé par 1 eſt 1; & comme toute grandeur eſt auſſi contenue une fois dans elle-même tous les rapports d'égalité $\frac{a}{a}$, $\frac{b}{b}$, &c. ont auſſi pour quotient l'unité; ainſi ils ſont égaux entr'eux, & ils ſont égaux à l'unité, & ils peuvent être pris pour l'unité.

COROLLAIRE III.

109. DEUX grandeurs quelconques c & e, étant diviſées par une même grandeur d; les deux quotiens $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{d}$ ont le même rapport que les deux grandeurs c & e. Il faut démontrer que $c.e :: \frac{c}{d}.\frac{e}{d}$.

Démonſtration.

Démonſtration. * $c.d :: \frac{c}{d}.1$. Donc * $c.\frac{c}{d} :: d.1$. De même * $e.d :: \frac{e}{d}.1$. Donc * $e.\frac{e}{d} :: d.1$. Par conſequent * $c.\frac{c}{d} :: e.\frac{e}{d}$. D'où l'on déduit * $c.e :: \frac{c}{d}.\frac{e}{d}$. *Ce qu'il falloit démontrer*. * 106. * 62. * 106. * 62. * 52. * 62.

REMARQUE.

CE troiſiéme Corollaire & la propoſition *de l'article* 75, font voir clairement qu'un même rapport peut avoir une infinité d'expreſſions équivalentes. Car, en multipliant ou en diviſant les deux termes d'un rapport par les mêmes grandeurs, ou par des grandeurs égales, (ce qu'on peut diverſifier à l'infini,) les produits ou les quotiens conſerveront toujours le même rapport. Ainſi $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a^3}{a^2b} = \frac{ab}{bb} = \frac{ab^2}{b^3} = \frac{ac}{bc} = \frac{ac^2}{bc^2} = \frac{abc}{b^2c} = \frac{acd}{bcd}$, & ainſi à l'infini. De même $a.b :: \frac{a}{a}.\frac{b}{a} :: \frac{a}{c}.\frac{b}{c} :: \frac{a^2}{ac}.\frac{ab}{ac}$, &c.

D'où l'on voit que quand les deux termes d'un rapport ſont multipliez chacun par les mêmes multiplicateurs, ou diviſez chacun par les mêmes diviſeurs, on peut abreger l'expreſſion de ce rapport, & la rendre plus ſimple ſans changer le rapport; en effaçant les communs multiplicateurs ou les communs diviſeurs. Ainſi $\frac{a^2bc}{a^2b^2c} = \frac{a}{b}$. De même $\frac{a^3}{ab}.\frac{a^2b}{ab} :: a^3.a^2b :: a.b$.

Il faut ſe rendre cette remarque & les articles 75 & 109 très familiers, à cauſe de leur grand uſage.

COROLLAIRE IV.

110. IL ſuit du Corollaire précedent que deux grandeurs égales étant diviſées par la même grandeur, ou, ce qui revient au même, par des grandeurs égales, les quotiens ſont égaux. Car les rapports des deux grandeurs diviſées, à leurs diviſeurs, étant les mêmes * que ceux des quotiens à l'unité; les deux grandeurs ne peuvent pas être égales, & leurs diviſeurs auſſi égaux, que les quotiens n'ayent le même rapport à l'unité. Ces quotiens ſont donc * égaux. * 106. * 53.

COROLLAIRE V.

111. DANS tout rapport & dans toute fraction, le premier terme eſt au ſecond, c'eſt à dire le numerateur eſt au dénominateur, comme le rapport ou la fraction eſt à l'unité. Car * * 109.

* 19. $a.b :: \frac{a}{b}.\frac{b}{b} = 1$. On le peut auſſi déduire des définitions * 47. & de fraction, & * de rapport, comme on le va voir.

8. Cela eſt évident dans toute fraction; car dans toute fraction, (on prendra la fraction $\frac{2}{3}$ pour rendre la choſe plus * 19. claire) * l'unité eſt conçue partagée en autant de parties égales que le dénominateur contient d'unitez, & le numerateur marque combien la fraction contient de ces parties de l'uni- * 48. té; ainſi l'on a cette proportion $2.3 :: \frac{2}{3}.1 (\frac{1}{3})$. * Puiſque les conſequens 3 & 1 ou $\frac{1}{3}$, étant partagez chacun en trois parties égales, chacun des antecedens contient deux aliquotes ſemblables de ſon conſequent.

C'eſt la même choſe dans tout rapport; car, par exemple, dans le rapport de 2 à 3 conſideré comme rapport, on fait attention que l'antecedent 2 eſt les deux tiers de ſon conſequent 3, ou qu'il contient deux des parties, dont le conſequent en contient 3. Et en faiſant comparaiſon du rapport $\frac{2}{3}$ à l'unité, on voit que $\frac{2}{3}$ contient auſſi deux des parties dont l'unité en contient trois; & par conſequent le rapporte de 2 à 3 eſt égal au rapport de $\frac{2}{3}$ à 1 ou à $\frac{1}{3}$. Et l'on voit aſſez que cela convient à tout rapport, & qu'on n'a pris le rapport $\frac{2}{3}$ que pour s'expliquer plus clairement. Si le rapport eſt incommenſurable comme $\frac{2+r}{3}$, & en general $\frac{nx+r}{mx}$, où l'on ſuppoſe qu'en quelque nombre d'aliquotes que le conſequent puiſſe être partagé, l'antecedent en contient un certain nombre avec un reſte r plus petit que chaque aliquote; il eſt évident qu'en concevant l'unité partagée dans le même nombre d'aliquotes que le conſequent, l'on aura toujours la proportion $2+r.3 :: \frac{2+r}{3}.1 = \frac{1}{3}$. Et en general $nx+r.mx :: \frac{nx+r}{mx}.1 = \frac{m}{m}\frac{x}{x}$. Car $\frac{1}{3}$ qui eſt trois fois dans l'unité $= \frac{3}{3}$, ſera deux fois dans le rapport $\frac{2+r}{3}$ avec un petit reſte, comme le tiers de 3 eſt deux fois dans $2+r$ avec un petit reſte; & en general $\frac{1}{mx}$, qui eſt dans $1 = \frac{mx}{mx}$ autant de fois que le nombre m contient d'unitez, eſt dans le rapport $\frac{nx+r}{mx}$ autant de fois que le nombre entier n contient d'unitez avec un petit reſte; comme l'aliquote ſemblable x de mx eſt dans $nx+r$ autant de fois que le nombre entier n contient d'unitez avec un petit reſte r.

D'où l'on voit que quand le premier terme d'un rapport

ou d'une fraction eſt égal au ſecond ; le rapport, ou la fraction, eſt égale à l'unité ; quand le premier terme ſurpaſſe le ſecond ; le rapport ou la fraction ſurpaſſe l'unité ; quand le premier terme eſt moindre que le ſecond, le rapport ou la fraction eſt moindre que l'unité.

COROLLAIRE VI.

112. TOUT rapport & toute fraction * eſt le quotient du premier terme de ce rapport, ou du premier terme de cette fraction diviſé par le ſecond terme : puiſque $a . b :: \frac{a}{b} . 1$. * 106.

COROLLAIRE VII.

113. LES rapports inverſes des rapports égaux du précedent Corollaire * ſont égaux. Ainſi en toute fraction & en tout rapport, l'unité eſt à la fraction ou au rapport, comme le ſecond terme du rapport eſt au premier terme. $1 . \frac{a}{b} :: b . a$. De même $1 . \frac{3}{1} :: 3 . 2$. * 55.

COROLLAIRE VIII.

114. DOù il ſuit * que le premier terme d'un rapport & d'une fraction eſt le produit du ſecond terme de ce rapport multiplié par le rapport même, ou par la fraction même. * 77.

COROLLAIRE IX.

115. IL eſt évident, par le ſixiéme Corollaire, qu'un rapport, une fraction, & le quotient d'une diviſion, ſont la même choſe, c'eſt pourquoi on les marque de la même maniere. L'expreſſion d'un rapport $\frac{a}{b}$ peut donc s'énoncer de ces manieres, 1°, en le nommant le rapport de a à b. 2°, en diſant que c'eſt a diviſé par b, ou le quotient de a diviſé par b.

COROLLAIRE X.

116. DOù il ſuit que deux rapports ou deux fractions, qui ont un même ſecond terme ou un même conſequent, ſont entr'elles comme les antecedens, * $\frac{a}{b} . \frac{c}{b} :: a . c$. Car les rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$, ſont les deux grandeurs a & c diviſées par le même diviſeur b. * 109.

REMARQUE.

ON peut voir à préſent dans la derniere évidence cette propoſition, aſſez évidente d'elle-même ; que tous les rapports égaux ſont des grandeurs égales. Par exemple, $\frac{2}{7}, \frac{4}{8}, \frac{3}{12}, \frac{10}{15}$,

&c. ſont des grandeurs égales. Car ce ſont des grandeurs qui ont un même rapport avec une même grandeur qui eſt l'unité, puiſque * chacun de ces rapports eſt à l'unité comme ſon premier terme eſt à ſon ſecond terme. D'où l'on voit que tous les rapports d'égalité ſont égaux chacun à l'unité $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{1}{1} = 1$. Ainſi l'on peut prendre, ſi l'on en a beſoin pour une démonſtration, un rapport d'égalité pour l'unité, & l'unité pour un rapport d'égalité.

*111.

COROLLAIRE XI.

117. UNE grandeur quelconque étant diviſée par l'unité, comme $\frac{b}{1}$, a la même valeur que ſi elle n'étoit point diviſée, c'eſt à dire $\frac{b}{1} = b$; car * $\frac{b}{1}. 1 :: b. 1$. D'où l'on voit que toute grandeur entiere a peut être regardée comme une fraction, ou comme un rapport $\frac{a}{1}$, dont le premier terme eſt cette grandeur a, & le ſecond terme eſt l'unité.

*111.

COROLLAIRE XII.

qui eſt une propoſition fondamentale.

118. DEUX rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſont entr'eux, comme le produit des extrêmes ad eſt au produit des moyens bc. C'eſt à dire $\frac{a}{b}. \frac{c}{d} :: ad. bc$.

Démonſtration. Qu'on diviſe ad & bc par la même grandeur bd, l'on aura cette proportion * $\frac{ad}{bd}. \frac{bc}{bd} :: ad. bc$. Mais *75. *75. $\frac{ad}{bd} = * \frac{a}{b}$, & $\frac{bc}{bd} = * \frac{c}{d}$. Par conſequent * $\frac{a}{b}. \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bd}$. *53. *109. $\frac{bc}{bd} :: * ad. bc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*109.

COROLLAIRE XIII.

qui eſt une propoſition fondamentale.

119. D'OÙ il ſuit que quand deux rapports ſont égaux, (c'eſt à dire que dans toute proportion) le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ il ſuit neceſſairement que $ad = bc$; car puiſque les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſont égaux, il faut * que les produits ad & bc ſoient égaux.

*118.

120. Et quand deux produits ſont égaux, comme $ad = bc$, on peut toujours en faire une proportion, en prenant les deux côtez de l'un des produits pour les deux extrêmes, & les deux côtez de l'autre pour les deux moyens de la proportion. Par exemple, ſi $ad = bc$, l'on aura $a. b :: c. d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; car

$\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ :: * ad. bc. Donc, puiſque l'on ſuppoſe $ad = bc$, il ſuit neceſſairement que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *118.

COROLLAIRE XIV.

121. DEUX rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$, qui ont le même antecedent, ont entr'eux un rapport inverſe de celui des conſequens, ou ſont entr'eux comme les conſequens dans un ordre renverſé. C'eſt à dire $\frac{b}{a}$. $\frac{b}{c}$ :: c. a. Car $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$ :: * bc. ab :: * c. a. *118. *75.

COROLLAIRE XV.

122. L'ON voit, par le Corollaire onziéme, * & *par l'article* 75, que tout nombre entier pouvant être conſideré comme une fraction, dont le nombre entier eſt le numerateur, & l'unité le dénominateur; ſi l'on ajoute un même nombre de zeros au numerateur & au dénominateur, le nombre entier, conſideré comme une fraction, ſera changé en nombre décimal ſans changer de valeur. Ainſi $345 = \frac{345}{1} = \frac{345000000}{1000000}$VI. Car par cette operation on multiplie le numerateur & le dénominateur par un même nombre, dans notre exemple, par 1000000, * ce qui ne change point la valeur de la fraction. *117. *75.

Mais au lieu d'écrire le dénominateur, on a trouvé plus court pour le calcul d'exprimer ces fractions décimales, en ſupprimant le dénominateur, & en marquant * ſimplement un point entre les entiers & les parties décimales. Ainſi $\frac{345000000}{1000000} = 345.000000$VI. *17.

COROLLAIRE XVI.

123. ON déduit aiſément des Corollaires précedens, qu'ayant deux fractions quelconques $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$, ſi l'on veut les multiplier l'une par l'autre, il faut former la fraction $\frac{ac}{bd}$, qui a pour premier terme le produit des antecedens, & pour ſecond terme le produit des conſequens, elle ſera le produit des deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ multipliées l'une par l'autre. Car 1. $\frac{a}{b}$ :: * b. a :: * bc. ac :: * $\frac{bc}{bd}$. $\frac{ac}{bd}$. Par conſequent * 1. $\frac{a}{b}$ :: $\frac{bc}{bd}$. $\frac{ac}{bd}$. Mais $\frac{bc}{bd} =$ * $\frac{c}{d}$. Donc 1. $\frac{a}{b}$ :: $\frac{c}{d}$. $\frac{ac}{bd}$. D'où il ſuit que * $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit qui vient de $\frac{c}{d}$ multipliée par $\frac{a}{b}$. *113. *75. *109. *52. *75. *72.

COROLLAIRE XVII.

124. SI l'on veut diviſer $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$; il faut former la fraction $\frac{ad}{bc}$, qui a pour premier terme le produit des extremes *ad*, & pour ſecond terme le produit des moyens *bc*; elle ſera le quotient.
*118. *111. Car $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} ::$ * $ad . bc ::$ * $\frac{ad}{bc} . 1$. Ainſi $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} ::$ * $\frac{ad}{bc} . 1$.
*52. *106. Par conſequent * $\frac{ad}{bc}$ eſt le quotient de $\frac{a}{b}$ diviſée par $\frac{c}{d}$.

Application de la définition generale de la Diviſion à la diviſion des nombres entiers.

DE'FINITION.

125. DIVISER un nombre entier donné par un autre nombre entier auſſi donné, c'eſt trouver un troiſiéme nombre qui contienne l'unité autant de fois que le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Par exemple, diviſer 12 par 4, c'eſt trouver le quotient 3 qui contient l'unité autant de fois que 4 eſt contenu en 12. Et l'on a cette proportion 12. 4 :: 3. 1.

D'où l'on voit que la diviſion d'un nombre entier comme 12 par un autre nombre entier comme 4, eſt une ſouſtraction du diviſeur 4, du dividende 12, réiterée autant de fois que le quotient 3 contient l'unité.

SUPPOSITION OU DEMANDE.

ON ſuppoſe qu'on ſçait trouver combien de fois chacun des neuf chifres eſt contenu dans un nombre qui le contient
*78. moins de dix fois, c'eſt à dire que l'on ſçait * la table de la Multiplication.

La diviſion des nombres entiers.

PROBLÊME.

126. *DIVISER un nombre entier donné* c *par un autre nombre entier donné* b *; c'eſt à dire trouver le nombre entier* a *qui exprime combien de fois le diviſeur* b *eſt contenu dans le dividende* c, *& qui eſt* le quotient.

dividende. diviſeur.
c 83106 (342 b
... a quotient.

AVERTISSEMENT.

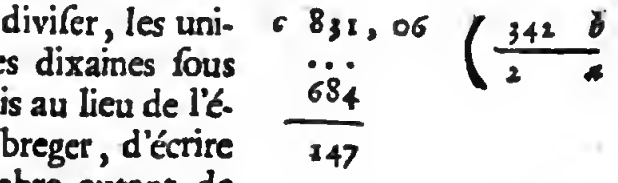
POUR faire concevoir clairement la Diviſion aux Commençans, on appliquera à un exemple les articles de l'operation à meſure qu'on les énoncera.

Regle ou operation. 1°. Il faut écrire le dividende *c*, & tirer au devant vers la droite un arc ou une petite ligne droite. Il faut écrire le diviſeur *b* au haut de cet arc ou de cette ligne droite, & tirer une ligne ſous le diviſeur. Ce ſera ſous cette ligne qu'il faudra écrire les chifres du quotient *a* à meſure qu'on les découvrira par la diviſion; car ces chifres du quotient ne ſe trouvent que l'un après l'autre. Pour les trouver, on partage le dividende en parties, dont chacune fait trouver un de ces chifres, & on appelle ces parties *les membres* de la Diviſion: les operations, qu'il faut faire ſur un de ces membres, pour trouver le quotient qui lui convient, c'eſt à dire, pour diviſer ce membre, ſont les mêmes qu'il faut faire ſur chacun des autres membres. Voici comme on diſtingue le premier membre.

2°. Il faut diſtinguer dans le dividende, en commençant par le dernier chifre à la gauche, & allant de la gauche à la droite, autant de rangs de chifres qu'en contient le diviſeur *b*. *Dans cet exemple il faut prendre les trois rangs* 831, *le diviſeur ayant trois rangs.*

Et ſi le nombre que l'on a pris ſurpaſſe le diviſeur, ou s'il lui eſt au moins égal, ce nombre ſera le premier membre à diviſer: mais s'il étoit plus petit que le diviſeur, c'eſt à dire, ſi le diviſeur n'y étoit pas contenu au moins une fois, (*comme s'il y avoit* 231 *au lieu de* 831,) il faudroit encore prendre un chifre du dividende vers la droite pour faire le premier membre de la Diviſion.

3°. Le premier membre à diviſer étant ainſi diſtingué; voici ce qu'il faut faire pour trouver le quotient de ce membre, & pour faire la diviſion de ce premier membre. 1°. Il faut concevoir le diviſeur *b* écrit ſous le premier membre à diviſer, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c. Mais au lieu de l'écrire, il ſuffit, pour abreger, d'écrire ſous le premier membre autant de



points que le diviſeur contient de rangs, en écrivant le premier point ſous le rang des unitez du premier membre, le ſecond ſous les dixaines, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier point. 2°. Voici comment on trouve le chifre du quotient de ce membre. On dit combien de fois le dernier chifre à gauche du diviſeur *b* eſt il contenu dans le nombre qui eſt au deſſus du dernier point, ou au deſſus du dernier chifre du diviſeur, qui eſt cenſé écrit à la place du dernier point ? Ayant trouvé combien il y eſt contenu, on écrit au quotient le chifre qui exprime combien de fois le dernier chifre du diviſeur eſt contenu dans le nombre qui eſt au deſſus du dernier point, & c'eſt le quotient du premier membre. 3°. Il faut multiplier tout le diviſeur par le quotient qu'on vient de trouver, & les Lecteurs qui commencent, doivent en écrire le produit ſous le premier membre à diviſer, les unitez ſous les unitez du premier membre, les dixaines ſous les dixaines, &c. 4°. Il faut retrancher le produit, qu'on vient de trouver, du premier membre, & écrire le reſte au deſſous, & la diviſion du premier membre ſera achevée.

Par exemple, on dira combien de fois 3 *eſt-il en* 8 *qui eſt le nombre du premier membre qui eſt au deſſus du dernier point ? Il y eſt contenu* 2 *fois ; ainſi il faut écrire* 2 *au quotient. Il faut enſuite multiplier le diviſeur* b *par le quotient* 2, *& les Commençans en écriront le produit* 684 *ſous le premier membre à diviſer* 831. *Enfin il faut retrancher ce produit, du premier membre, & en écrire le reſte* 147 : *& la diviſion du premier membre eſt achevée.*

4°. Pour avoir le membre ſuivant de la Diviſion, il faut ſimplement écrire le chifre, qui précede, vers la droite dans le dividende, le membre qu'on vient de diviſer, au devant du reſte qu'on vient de trouver, & ce reſte avec ce chifre, tranſporté du dividende au devant de ce reſte, ſera le membre ſuivant de la Diviſion. Il faut écrire un point ſous ce chifre du dividende qu'on vient de tranſporter devant le reſte, pour ſe ſouvenir que ce chifre du dividende a été employé.

	c 83106	($\frac{342\ b}{24}$
	...	
	684	
2. membre.	1470	
	...	
	1368	
	102	

Après cela il faut faire ſur ce membre les mêmes operations (marquées

(marquées dans le 3e article) qu'on a faites ſur le premier. C'eſt à dire, 1° il faut écrire autant de points ſous ce membre, que le diviſeur contient de rangs, & mettre le premier point ſous les unitez de ce membre, le ſecond point ſous les dixaines, & ainſi de ſuite. 2°. Il faut voir combien de fois le dernier chifre du diviſeur eſt contenu dans le nombre qui eſt ſur le dernier point, & écrire au quotient le chifre qui exprime combien de fois il y eſt contenu. 3°. Il faut multiplier le diviſeur *b* par ce nouveau quotient, & en écrire le produit ſous le membre que l'on diviſe, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c. 4°. Il faut retrancher ce produit du membre à diviſer, & écrire le reſte au deſſous, & la diviſion de ce membre ſera faite.

	b 83106	(342 *b*
	....	(24 *a*
	684	
2. membre.	1470	
	...	
	1368	
	102	

Dans notre exemple, il faut tranſporter 0, *qui précede dans le dividende le membre qu'on vient de diviſer, au devant du reſte* 147 *de la diviſion du membre précedent; marquer un point ſous* 0 *dans le dividende pour ſe ſouvenir qu'on l'a employé; & le nouveau membre à diviſer ſera* 1470. *Pour le diviſer,* 1°, *il faut écrire trois points; le premier, ſous le chifre qu'on vient de tranſporter, qui eſt le rang des unitez de ce membre; le ſecond point ſous* 7, *& le troiſiéme ſous* 4; *&* 14 *eſt le nombre de ce membre à diviſer qui ſe trouve ſur le dernier point;* (parceque tant le chifre 4 qui eſt ſur le dernier point que les chifres qui peuvent ſe trouver vers la gauche comme ici 1, ſont cenſez être le nombre qui ſe trouve ſur le dernier point) 2°. *Il faut dire combien de fois* 3, *dernier chifre du diviſeur, eſt-il contenu dans* 14? *On trouve qu'il y eſt* 4 *fois; il faut écrire* 4 *au quotient.* 3°. *Il faut multiplier le diviſeur* b *par ce nouveau quotient, & en écrire le produit* 1368 *ſous le membre à diviſer.* 4°. *Il faut ôter ce produit du membre à diviſer, & écrire le reſte* 102 *au deſſous; & la diviſion de ce membre ſera achevée.*

5°. Pour avoir le membre ſuivant de la Diviſion, il faut, comme dans l'article quatriéme, tranſporter le chifre du dividende qui précede le dernier dont on s'eſt ſervi, le tranſporter, dis-je, devant le reſte de la diviſion du membre précedent, & ce ſera le nouveau membre à diviſer; marquer

ſous ce membre autant de points qu'il y a de rang de chifres dans le diviſeur : trouver le quotient de ce membre, qui doit être le chifre qui exprime combien de fois le dernier chifre du diviſeur eſt contenu dans le nombre qui eſt ſur le dernier point : multiplier le diviſeur par ce nouveau quotient, & en écrire le produit ſous le membre qu'on diviſe. Enfin ôter ce produit du membre que l'on diviſe, & en écrire le reſte au deſſous.

	c 83106	(342 b
	.....	(243 a
	684	
2. membre.	1470	
	...	
	1368	
3. membre.	1026	
	...	
	1026	
	0000	

Dans notre exemple il faut tranſporter le chifre 6 *du dividende qui précede le dernier chifre dont on s'eſt ſervi, qui eſt* 0 ; *tranſporter, dis-je,* 6 *devant le reſte* 102 *de la diviſion du membre précedent, & marquer un point ſous* 6 *du dividende, pour ſe ſouvenir qu'on s'en eſt ſervi : & l'on aura* 1026 *pour le nouveau membre à diviſer.* 1°. *On marquera au deſſous les trois points qui occupent les trois places où il faut imaginer que le diviſeur* 342 *eſt écrit.* 2°. *On trouvera le quotient de ce membre, en diſant combien de fois* 3, *dernier chifre du diviſeur, eſt-il contenu en* 10, *qui eſt le nombre du membre à diviſer, qui eſt au deſſus du dernier point, ou qui eſt cenſé ſur le dernier chifre du diviſeur ; on trouve que* 3 *eſt contenu* 3 *fois en* 10 ; *ainſi on écrira* 3 *au quotient.* 3°. *On multipliera le diviſeur* b *par ce quotient* 3, *& l'on écrira le produit* 1026 *ſous le membre* 1026 *que l'on diviſe.* 4°. *Enfin on retranchera le produit, qu'on vient de trouver, du membre que l'on diviſe, & l'on en écrira le reſte au deſſous ; ce reſte eſt ici* 0.

6°. On continuera de tranſporter de ſuite, l'un aprés l'autre, les chifres du dividende qui précedent ceux ſur leſquels on a déja operé, au devant des reſtes qu'on trouvera en diviſant ſucceſſivement les membres de la diviſion, & de former ainſi par ordre, l'un après l'autre, tous les membres de la diviſion : & on fera ſur chacun les operations marquées dans le troiſiéme article ; on continuera, dis-je, cette ſuite d'operations juſqu'à ce qu'on ait tranſporté tous les chifres du dividende ; le dernier membre de la diviſion ſera celui où l'on aura tranſporté le premier chifre du dividende le plus à droite ; & après avoir operé ſur ce dernier membre, la di-

viſion ſera achevée : & les chifres qu'on aura marquez de ſuite dans la place du quotient *a*, ſeront le quotient *qu'il falloit trouver*.

REMARQUES.

1.

127. QUAND la diviſion eſt achevée, ſi le dernier membre ne laiſſe aucun reſte ; c'eſt à dire, ſi l'on trouve o pour le reſte du dernier membre ; le diviſeur eſt exactement contenu dans le dividende autant de fois que le quotient contient l'unité. Mais ſi après la diviſion du dernier membre on trouve un reſte, alors le dividende contient le diviſeur autant de fois que le quotient contient l'unité, & le dividende contient de plus ce reſte ; de maniere que ſi l'on retranchoit ce reſte du dividende, il contiendroit, après ce retranchement, le diviſeur exactement autant de fois que le quotient contient l'unité.

Si l'on trouve un reſte après la diviſion, on écrit ce reſte au devant du quotient un peu plus haut, & en moindres caracteres pour le diſtinguer, on tire une ligne au deſſous, & l'on écrit le diviſeur ſous cette ligne ; ce qui fait une fraction dont le reſte eſt le numerateur, & le diviſeur en eſt le dénominateur ; & cela marque que le quotient contient encore cette fraction, outre les nombres entiers dont il eſt compoſé.

2.

128. Le quotient doit avoir autant de rangs de chifres qu'il y a de membres à diviſer, chaque membre à diviſer devant fournir un chifre au quotient ; & l'on voit par l'operation qu'il doit y avoir autant de membres dans la diviſion, qu'il y a de rangs de chifres dans le dividende au devant du premier membre, & de plus ce premier membre.

3.

129. Le diviſeur doit toujours être contenu dans le premier membre de la diviſion ; ainſi le premier membre fournit toujours un chifre au quotient. Mais quand le diviſeur n'eſt pas contenu au moins une fois dans un des membres qui ſuivent le premier, on écrit zero pour le quotient de ce membre-là,

& dans ce cas la diviſion de ce membre eſt achevée, & il faut tranſporter devant ce membre-là le chifre du dividende qui précede le dernier tranſporté; & le membre précedent qui n'a fourni que o au quotient, avec ce nouveau chifre tranſporté, ſera le membre ſuivant de la diviſion.

4.

130. Le chifre du quotient qui convient à chaque membre, ne peut pas être plus grand que 9; ainſi on n'écrit que 9 pour le quotient d'un membre, quand même on trouveroit en operant un quotient plus grand que 9.

5.

131. Il arrive aſſez ordinairement, en diviſant un membre de la diviſion, que le produit du diviſeur par le quotient qu'on trouve d'abord pour ce membre, eſt plus grand que ce membre-là, & qu'il n'en peut pas être retranché. Quand cela arrive, c'eſt une marque certaine que ce quotient eſt trop grand; il faut le diminuer d'une unité, ou de deux unitez, ou de trois unitez, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que le produit du diviſeur par le chifre du quotient de ce membre-là, puiſſe être retranché de ce membre; & ce dernier quotient ſera celui qui convient à ce membre de la diviſion.

6.

132. S'il arrivoit auſſi qu'après avoir diviſé un membre de la diviſion, on trouvât un reſte plus grand que le diviſeur, de façon que le diviſeur fût contenu dans ce reſte; ce ſeroit une marque certaine que le chifre du quotient du membre ſur lequel on opere, ou celui du membre précedent ſeroit trop petit: il faudroit dans ce cas recommencer la diviſion de ces deux membres juſqu'à ce qu'on trouvât un reſte du dernier de ces deux membres moindre que le diviſeur.

Application des Regles de la Diviſion aux exemples.

ON a déja mis un premier exemple pour faire mieux concevoir aux Commençans les Regles de la Diviſion à meſure qu'on les énonçoit; voici d'autres exemples.

II. EXEMPLE.

Pour diviſer 7377416 par 3201; 1°. J'écris le dividende, je tire un arc au devant, je mets le diviſeur 3201 au haut de l'arc; je tire une ligne au deſſous, & j'écrirai par ordre les chifres du quotient ſous cette ligne à meſure que je les découvrirai.

7377416	(3201
.....	2304 $\frac{2112}{3201}$
6402	
9754	2. membre.
....	
9603.	
15116	3. & 4. membre.
....	
12804	
2312	reſte.

2°. Pour avoir le premier chifre à gauche du quotient, je diſtingue le premier membre de la diviſion, en prenant autant de rangs de chifres à la gauche du dividende qu'en contient le diviſeur. Ces chifres du dividende ſont 7377; & voyant que le diviſeur eſt contenu dans le nombre que j'ai pris, ce nombre 7377 eſt le premier membre de ma diviſion.

Je marque quatre points ſous ce premier membre, dont le premier eſt ſous 7 à droite, qui eſt le chifre des unitez du premier membre, & le dernier ſous 7 à gauche qui eſt le dernier chifre du premier membre. Et je m'imagine que le diviſeur eſt écrit à la place de ces points; que le chifre 3 le plus à gauche du diviſeur eſt ſous le dernier chifre 7 à gauche du premier membre.

Pour trouver le quotient de ce premier membre, je dis combien de fois 3, dernier chifre du diviſeur, eſt-il en 7 qui eſt le nombre du premier membre qui eſt ſur le dernier point, ou qui eſt cenſé ſur 3? il y eſt deux fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviſeur 3201 par le quotient 2, & j'en écris le produit 6402 ſous le premier membre. Enfin je retranche ce produit du premier membre, & j'écris au deſſous le reſte 975.

La diviſion du premier membre eſt achevée; & s'il étoit ſeul, le quotient 2 fait voir que le diviſeur 3201 eſt contenu 2 fois dans le premier membre 7377, & qu'il y a de plus 975.

3°. Pour avoir le ſecond membre, je mets un point ſous 4, qui précede, dans le dividende, le premier membre; & je tranſ-

porte 4 au devant du reſte 975, & j'ai 9754 pour le ſecond membre de ma diviſion. J'écris quatre points ſous le ſecond membre, le premier ſous 4, & les autres en allant à gauche juſqu'au dernier qui ſe trouve ſous 9. Et je dis 3, dernier chifre du diviſeur, eſt contenu 3 fois dans 9, qui eſt le nombre du ſecond membre qui ſe trouve ſur le dernier point; ainſi j'écris au quotient 3 pour le quotient du ſecond membre. Je multiplie le diviſeur par le quotient 3, j'en écris le produit 9603 ſous le ſecond membre. Enfin j'ôte ce produit du ſecond membre, & j'écris le reſte 151 au deſſous; & le ſecond membre eſt diviſé.

4°. J'écris un point ſous 1 qui précede dans le dividende le dernier chifre 4 dont je me ſuis ſervi, & j'écris 1 au devant du reſte 151 de la diviſion du membre précedent, & j'ai 1511 pour le troiſiéme membre de la diviſion. Mais voyant que le diviſeur 3201 n'eſt pas contenu dans ce membre, j'écris au quotient 0 pour le quotient de ce membre, & la diviſion du troiſiéme membre eſt achevée.

5°. Je mets un point ſous 6, qui précede dans le dividende le dernier chifre 1 dont je me ſuis ſervi, & j'écris 6 au devant de 1511, & j'ai 15116 pour le dernier membre de ma diviſion. J'écris quatre points ſous ce membre, le premier ſous 6 qui eſt le chifre des unitez, & le dernier ſe trouve ſous 5. Je dis enſuite 3, dernier chifre du diviſeur, eſt contenu 5 fois dans 15 qui eſt le nombre qui ſe trouve au deſſus du dernier point; mais trouvant que le produit de 5 par le diviſeur 3201 eſt plus grande que le membre 15116 que je diviſe; je n'écris pas 5 pour le quotient de ce dernier membre, j'écris ſeulement 4 au quotient. Je multiplie le diviſeur 3201 par ce quotient 4. Je retranche le produit 12804, du dernier membre, & j'écris au deſſous le reſte 2312. J'ecris encore en fraction, à la droite du quotient, ce reſte ſur une ligne, & le diviſeur au deſſous. Et le quotient de ma diviſion eſt $2304\frac{2312}{3201}$ Ce qui me fait connoître que 3201 eſt contenu 2304 fois dans le dividende 7377416, mais que le dividende contient de plus 2312.

I. AVERTISEMENT *important pour la pratique*.

LES Lecteurs qui commencent ne ſçauroient trop ſe perſuader que s'ils veulent tirer du profit de cet Ouvrage, & ſe

mettre en état d'apprendre facilement les Mathematiques, ils doivent ſe rompre aux calculs, & acquerir l'habitude de les faire promptement & avec facilité. Et que le ſeul moyen de former en eux cette facilité, eſt de faire eux-mêmes beaucoup d'exemples de la diviſion qui contient les operations précedentes, & de faire de même beaucoup d'exemples des autres opetions qu'on doit expliquer dans la ſuite.

II. AVERTISEMENT.

QUAND les Commençans ſe ſeront rendu familiere, par beaucoup d'exemples, la pratique de la diviſion; il ne ſera plus neceſſaire d'écrire les produits du diviſeur par le quotient de chaque membre: il faudra faire mentalement la multiplication du diviſeur par le quotient de chaque membre, & en même temps la ſouſtraction de ce produit, du membre qu'on diviſe, ſans rien écrire que le reſte de la ſouſtraction. C'eſt un abregé auquel ils doivent s'accoutumer, en voici un exemple.

III. EXEMPLE.

POUR diviſer 305852 par 378, 1°, j'écris le dividende 305852, je tire un arc au devant; j'écris le diviſeur au haut de l'arc; je tire une ligne ſous le diviſeur; la place du quotient ſera ſous cette ligne.

305852	(378
.....	(809 $\frac{50}{378}$
3452	
...	
50	

2°. Le diviſeur ayant trois rangs, je prens les trois rangs de chifres 305 du dividende vers la gauche pour le premier membre; mais voyant que le diviſeur ſurpaſſe 305, je prens encore le chifre 8, & j'ai 3058 pour mon premier membre à diviſer. J'écris au deſſous les 3 points qui y doivent occuper les places où j'imagine le diviſeur; je mets le premier ſous 8 qui eſt le chifre des unitez du membre à diviſer, & le troiſiéme point tombe ſous 0; ainſi 30 eſt le nombre ſous lequel eſt le dernier point. Je dis enſuite 3, dernier chifre du diviſeur, eſt contenu 10 fois en 30; mais je ne puis mettre que 9 pour le quotient d'un membre: & trouvant encore en multipliant le diviſeur 378 par 9, que le produit ſurpaſſe le membre que je diviſe, je n'écris que 8 pour le quotient du premier membre.

Je fais enſuite la multiplication du diviſeur par le quotient, & en même temps la ſouſtraction du produit qui en vient, du

membre que je diviſe, ſans écrire le produit, de cette maniere. $8 \times 8 = 64$; j'ôte 64 de 68, en ajoutant 6 dixaines à 8 pour le rendre égal à 64, ou plus grand que 64; & il reſte 4 que j'écris ſous 8, & je retiens les 6 dixaines que j'ai ajoutées à 8. Puis je dis $8 \times 7 = 56$, $56 + 6$ que je retenois, $= 62$. Je retranche 62 de 65, en ajoutant à 5 ſix dixaines pour en pouvoir ſouſtraire 62, & il reſte 3 que j'écris ſous 5, & je retiens les 6 dixaines que j'ai ajoutées à 5. Enfin je dis $8 \times 3 = 24$, $24 + 6$ que je retenois, $= 30$. Je retranche 30 de 30, & il reſte 0, qu'il eſt inutile d'écrire, n'y ayant pas de chifres dans les rangs qu'il devroit préceder.

La diviſion de ce premier membre eſt achevée, & j'ai pour reſte 34.

3° Je mets un point ſous 5 qui précede dans le dividende le premier membre que je viens de diviſer, & j'écris 5 au devant du reſte 34, & j'ai 345 pour le ſecond membre de ma diviſion. Mais le diviſeur 378 n'étant pas contenu dans ce ſecond membre, j'écris au quotient 0 pour le quotient du ſecond membre, & la diviſion de ce membre eſt achevée.

4°. Je mets un point ſous le chifre 2 du dividende qui précede le dernier chifre tranſporté, & j'écris 2 au devant de 345, & j'ai 3452 pour le troiſiéme & dernier membre de ma diviſion. J'écris au deſſous les trois points qui marquent les places des chifres du diviſeur ſous ce membre, & 34 eſt le nombre qui ſe trouve ſur le dernier point. Je dis enſuite 3, dernier chifre du diviſeur, eſt contenu 11 fois dans 34 qui eſt ſur le dernier point: mais je ne puis écrire que 9 pour le quotient d'un membre, ainſi j'écris 9 au quotient; & je dis $9 \times 8 = 72$; j'ôte 72 de 72, ajoutant 7 dixaines à 2 pour en pouvoir ſouſtraire 72, & j'écris le reſte qui eſt 0 ſous 2, & je retiens 7 dixaines que j'ai ajoutées à 2. Puis je dis $9 \times 7 = 63$; $63 + 7$ dixaines que je retenois $= 70$. J'ôte 70 de 75, en ajoutant 7 dixaines à 5, j'écris le reſte 5 ſous 5, & je retiens 7 dixaines que j'ai ajoutées à 5 pour en pouvoir ſouſtraire 70. Enfin je dis $9 \times 3 = 27$; $27 + 7$ que je retenois $= 34$. Je retranche 34 de 34, & le reſte eſt 0, qu'il eſt inutile d'écrire. La diviſion eſt achevée, puiſqu'il n'y a plus de chifre du dividende à tranſporter, & le quotient eſt $809\frac{50}{378}$.

REMARQUES.

REMARQUES.

1.

ON connoît que le chifre qu'on a pris pour le quotient d'un membre eſt trop grand, lorſque le produit de ce quotient par le dernier chifre du diviſeur, augmenté des dixaines qu'on eſt obligé de lui ajouter dans l'operation, ſurpaſſe le nombre qui eſt ſur le dernier point. Par exemple, dans le dernier membre de l'exemple precedent, l'on a trouvé que le produit 27 de 9 × 3 augmenté de 7 dixaines qu'on retenoit, faiſoit 34; ſi le nombre qui eſt ſur le dernier point eût été moindre que 34, l'on eût reconnu par là que le quotient 9 du dernier membre eût été trop grand.

2.

Voici la pratique dont il faut ſe ſervir pour connoître, en diviſant un membre, quel eſt le vrai quotient de ce membre, avant de l'écrire au quotient. Suppoſé que 9345 ſoit un membre à diviſer, & que le diviſeur ſoit 1987. L'on dira le dernier chifre 1 du diviſeur eſt contenu 9 fois dans le chifre 9 qui eſt ſur le dernier point. Or pour examiner ſi le quotient 9 eſt trop grand, je n'écris point 9 au quotient; je m'imagine ſeulement qu'il y eſt écrit, & je fais la multiplication & la ſouſtraction, l'une & l'autre de gauche à droite, en commençant par les chifres les plus à la gauche, & je dis le quotient 9 multipliant le dernier chifre 1 du diviſeur, le produit eſt 9. Je retranche par l'eſprit ce produit 9, du nombre 9 qui eſt ſur le dernier point dans le membre à diviſer, & il ne reſte rien. Ainſi il n'y a ſur le pénultiéme point que 3 dans le membre à diviſer. Je dis enſuite le quotient 9 multipliant le pénultiéme chifre 9 du diviſeur, le produit eſt 81. Or 81 ſurpaſſe le nombre 3, qui eſt dans le dividende ſur le pénultiéme point; ainſi 81 ne ſçauroit ſe retrancher de 3. Je ſuis ſûr par là, que le quotient 9 eſt trop grand pour ce membre à diviſer. Il faut voir ſi 8 ne ſeroit point auſſi trop grand pour le quotient de ce membre.

9345 (1987
....

9345 (1987
....

J'imagine 8 pour le quotient de ce membre, & je dis 8 × 1

= 8. J'ôte par l'eſprit le produit 8 du nombre 9 qui eſt dans le dividende ſur le dernier point, & il reſte 1, qui étant joint à 3, qui eſt ſur le point précedent, fait 13. Ainſi je retiens en mon eſprit qu'il n'y a que 13 ſur le point qui précede le dernier. Je dis enſuite 8 × 9 = 72. J'ôte par l'eſprit 72 de 13, ce qui ne ſe peut pas faire; ainſi le quotient 8 eſt trop grand.

Je conçois 7 pour le quotient, & je dis 7 × 1 = 7. J'ôte 7 de 9, & il reſte 2 qui fait 23 avec 3 qui précede 9. Ainſi je retiens qu'il y a 23 ſur le point qui précede le dernier, & je dis 7 × 9 = 63. Or 63 ne peut pas être ôté de 23. Ainſi le quotient 7 eſt trop grand.

Je ſuppoſe 6 pour le quotient, & je dis 6 × 1 = 6. J'ôte 6 de 9, & il reſte 3 qui fait 33 avec 3 qui précede 9 dans le dividende; ainſi il me faut concevoir 33 ſur le point qui précede le dernier. Je dis enſuite 6 × 9 = 54. Or 54 ſurpaſſe 33 dont il faudroit le retrancher. Ainſi le quotient 6 eſt encore trop grand.

Je prens donc 5 pour le quotient, & je dis 5 × 1 = 5. J'ôte 5 de 9 & il reſte 4 qui fait 43 avec 3, & je dis 5 × 9 = 45. Or 45 ne peut pas être retranché de 43. Ainſi le quotient 5 eſt encore trop grand.

Cela me fait ſuppoſer 4 pour le quotient, & je dis 4 × 1 = 4. J'ôte 4 de 9 & il reſte 5, qui fait 53 avec 3 du dividende. Ainſi il y a 53 ſur le point qui précede le dernier. Je dis enſuite 4 × 9 = 36. J'ôte 36 de 53, & il reſte 17. Comme je vois que ce reſte, qui a deux rangs, me ſuffira pour la diviſion du membre que je diviſe, j'écris 4 au quotient; & je fais la diviſion de ce membre à l'ordinaire,

en diſant 4 × 7 = 28. J'ôte 28 de 35, en ajoutant 3 dixaines à 5 pour en pouvoir ſouſtraire 28, & j'écris le reſte 7, & je retiens 3 dixaines. Puis je dis 4 × 8 = 32. 32 + 3 que je retenois = 35. J'ôte 35 de 44, en ajoutant 4 dixaines à 4 pour en pouvoir ôter 35, & il reſte 9 que j'écris. Puis je dis 4 × 9 = 36. 36 + 4 que je retenois = 40. J'ôte 40 de 43, en ajoutant 4 dixaines à 3 pour en pouvoir ôter 40, & il reſte 3 que j'écris, & je retiens les 4 dixaines que j'ai ajoutées; & je dis enfin, 4 × 1 = 4. 4 + 4 que je retenois = 8. Jôte 8 de 9, & j'écris le reſte 1; & la diviſion de ce membre eſt achevée.

9345 (1987
.... 4
1397

Si je n'euſſe pas trouvé un reſte 17, qui eût eu deux rangs de chifres, en ôtant le produit 36, fait du quotient ſuppoſé 4 par 9, de 53; c'eſt à dire, ſi je n'euſſe eu un reſte que d'un chifre; j'aurois continué par l'eſprit de prendre le produit du quotient ſuppoſé 4 par les chifres reſtans 8 & 7 du diviſeur, pour m'aſſurer ſi ces produits euſſent pû ſe retrancher du membre à diviſer; & je n'aurois écrit au quotient le chifre 4, pour le quotient de ce membre, qu'après m'être aſſuré, (en faiſant la multiplication de gauche à droite de tous les chifres du diviſeur les uns aprés les autres par ce quotient ſupoſé 4, & en ôtant par l'eſprit tous les produits particuliers, du membre à diviſer,) que le produit du quotient ſuppoſé 4 par le diviſeur, eſt contenu dans le membre à diviſer.

Démonſtration du Problême.

133. IL eſt évident qu'on trouve, par les Regles qu'on a données pour la diviſion, le nombre qui exprime combien d'unitez de fois, de dixaines de fois, de centaines de fois, &c. le diviſeur eſt contenu dans le dividende; puiſqu'en retranchant par l'operation même tout autant de fois le diviſeur du dividende, il ne reſte rien, quand la diviſion eſt exacte; c'eſt à dire ſans reſte. Ces Regles ſont donc trouver le nombre qui contient l'unité autant de fois que le diviſeur eſt contenu dans le dividende; c'eſt à dire qu'elles ſont découvrir * le veritable quotient que l'on cherchoit. * 125.

Dans le premier exemple, il eſt évident que le diviſeur 342 eſt contenu dans le dividende de 83106, 200 fois + 40 fois + 3 fois; puiſqu'en retranchant le diviſeur du dividende 200 fois + 40 fois + 3 fois, il ne reſte rien.

Quand il y a un reſte après la diviſion, il eſt évident que ſi l'on ôtoit du dividende le reſte, qui eſt toujours moindre que le diviſeur, avant de faire la diviſion, le quotient qu'on trouveroit par les Regles, exprimeroit exactement le nombre de fois que le diviſeur eſt contenu dans le dividende diminué de ce reſte. Ainſi elles ſont trouver le quotient qui exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu exactement dans le dividende, & ce que le dividende contient de ſurplus. Voici même la démonſtration qui fait voir comment le quotient qu'on trouve par la diviſion & la fraction qui ſe forme du reſte, en écrivant le reſte au numerateur, & le diviſeur au dénominateur; comment,

dis-je, ce quotient & cette fraction, joints enſemble, ſont le quotient total de la diviſion; on ſe ſervira ici du troiſiéme exemple. On nommera le dividende 305852, D; le diviſeur 378, d; le reſte qu'on trouve par la diviſion, qui eſt 50, ſera nommé r; le quotient 809, q, Il faut démon-

D 305852. (378 d / 809 q — $\frac{50}{378}$ r

trer que $D.\ d :: q + \frac{r}{d}.\ 1$; & il s'enſuivra * que $q + \frac{r}{d}$ eſt
*106. *107. le quotient total. 1°. $D - r$, qui eſt le dividende D, dimi-
*111. *75. & 109. nué du reſte r eſt égal à * qd. Ainſi $D = qd + r$. 2°. $\frac{qd+r}{d} . 1 :: * qd + r.\ d :: D.\ d$. Or $\frac{qd+r}{d} = \frac{qd}{d} + \frac{r}{d}$. Et $\frac{qd}{d} = * \frac{q}{1}$
*117. $= * q$; ainſi $q + \frac{r}{d}.\ 1 :: D.\ d$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Enfin, pour ne rien laiſſer ſans démonſtration de tout ce que l'on a dit qui étoit néceſſaire pour la pratique de la diviſion, on va démontrer que le quotient de chaque membre de la diviſion ne peut pas ſurpaſſer 9, comme
*130. on l'a dit dans la * quatriéme Remarque. 1°. Ou le premier membre de la diviſion n'a que le même nombre de rangs de chifres que le diviſeur, comme dans le premier exemple; & dans ce cas le diviſeur ne peut pas être contenu dans ce premier membre plus de neuf fois. Car en ajoutant un 0 au diviſeur 342, on aura le nombre 3420, qui ſurpaſſe le premier membre 831, celui-ci ayant un rang de chifres de moins. Or 3420 * contient exactement 10 fois le diviſeur 342: donc le premier membre 831 contient le diviſeur 342 moins de 10 fois.

831 (342 ...

*15.

2°. Ou bien le premier membre de la diviſion contient un rang de plus que le diviſeur, comme dans le troiſiéme exemple: il ne peut contenir qu'un rang de plus que le diviſeur; puiſque, s'il contient un rang de plus, le diviſeur y eſt toujours contenu. Dans ce cas le dernier chifre 3 du premier membre ne peut pas ſurpaſſer le dernier chifre 3 du diviſeur; & il faut, ou qu'ils ſoient égaux, comme dans le troiſiéme exemple; & dans ce cas les chifres 78 du diviſeur, qui precedent le dernier 3, doivent ſurpaſſer les chifres 05 qui précedent le dernier chifre du premier membre; car autrement le diviſeur 378 ſeroit contenu dans les trois premiers chifres du dividende, & il ne faudroit pas prendre un qua-

3058 (378 ....

triéme chifre du dividende pour faire le premier membre. Or dans ce cas ſi l'on écrit un 0 devant le diviſeur 378, il eſt évident * que le nombre 3780 contiendra exactement 10 fois le diviſeur 378; il eſt auſſi évident que 3780 ſurpaſſe le membre à diviſer 3058, à cauſe des chifres 78 du diviſeur plus grands que les chifres 05 du membre à diviſer. Donc le premier membre 3058 ne contient pas 10 fois le diviſeur. Ou bien enfin il faut que le dernier chifre du premier membre à diviſer ſoit moindre que le dernier chifre du diviſeur, ce qui arrive le plus ordinairement, comme dans cet exemple où le diviſeur eſt 952, & le membre à diviſer 2345 eſt 2345. Dans ce dernier cas de ce ſecond article, il eſt évident qu'en ajoutant un 0 au devant du diviſeur, on aura 9520 * qui contient exactement 10 fois le diviſeur 952. Il eſt auſſi évident que le membre à diviſer 2345 eſt moindre que 9520, à cauſe du dernier chifre 9 du diviſeur plus grand que le dernier chifre 2 du membre à diviſer. Donc le diviſeur 952 eſt contenu moins de 10 fois dans le membre à diviſer. * 15. (952 ... * 15.

Il ſuit, de ce que l'on vient de démontrer, que le quotient du premier membre ne peut ſurpaſſer 9. Mais l'on peut appliquer de ſuite aux membres ſuivans de la diviſion, ce que l'on vient de démontrer du premier membre; parceque le reſte qui vient de la diviſion du premier membre, & de même le reſte de chacun des autres, doit toujours être moindre que le diviſeur; ce qui eſt cauſe qu'en ajoutant à chacun de ces reſtes le chifre du dividende que preſcrit la Regle de la diviſion, pour faire chacun des membres ſuivans; chacun de ces membres ne peut avoir qu'un rang de chifres de plus que le diviſeur, ou un même nombre de rangs. Par conſequent, ſuivant la démonſtration qu'on vient de donner pour le premier membre, le quotient de chacun des autres ne peut ſurpaſſer 9.

La maniere de s'aſſurer que l'on a ſuivi exactement les Regles de la Diviſion en faiſant une Diviſion, & celles de la Multiplication en faiſant une Multiplication.

LES démonſtrations des Problêmes de la Diviſion & de la Multiplication font voir clairement que les Regles que l'on a données, font découvrir infailliblement le quotient que l'on

cherchoit par la diviſion, & le produit que l'on cherchoit par la multiplication. Mais pour s'aſſurer que l'on a ſuivi ces regles dans la pratique, il faut, après avoir fait une diviſion, multiplier le diviſeur & le quotient l'un par l'autre; & s'il n'y a point eu de reſte dans la diviſion, & que l'on trouve pour produit le dividende même; c'eſt une marque que la diviſion eſt bien faite; & s'il s'eſt trouvé un reſte à la fin de la diviſion, il faut ajouter ce reſte au produit du diviſeur multiplié par le quotient; & ſi l'on trouve que la ſomme de ce produit & du reſte ſoit égale au dividende, on eſt aſſuré par-là que la diviſion eſt bonne.

Pour s'aſſurer de même qu'une multiplication eſt bien faite, il faut diviſer le produit que l'on a trouvé par la multiplication, il faut, dis-je, diviſer ce produit par l'un des deux côtez du produit, & ſi l'autre côté eſt le quotient exact de la diviſion, & qu'il n'y ait aucun reſte; c'eſt une marque que la multiplication eſt bonne.

Ces preuves, pour s'aſſurer de la bonté d'une diviſion & d'une multiplication, ſont fondées ſur ce que le diviſeur doit être contenu autant de fois dans le dividende
*77. que le quotient contient de fois l'unité. Ainſi, * en multipliant le diviſeur par le quotient, on doit trouver le dividende pour produit. Par la même raiſon, en diviſant un produit par l'un de ſes côtez, on doit trouver l'autre côté pour le quotient exact de la diviſion.

La Diviſion des nombres qui contiennent des parties décimales.

134. POUR faire la diviſion des nombres qui contiennent des parties décimales, 1°, il faut que les parties décimales du dividende ſoient plus petites que les parties décimales du diviſeur, ou du moins qu'elles leur ſoient égales. C'eſt pourquoi s'il falloit diviſer un nombre entier ou un nombre qui ne contient que des dixiémes par un diviſeur qui eût des milliémes, il faudroit réduire le nombre entier ou le nombre qui ne contient que des dixiémes, & qui eſt le dividende, au moins en milliémes, & même il eſt bon de la réduire en parties décimales beaucoup moindres que celles du diviſeur, comme en
*17. millionniémes, ou encore en plus petites. Cela ſe fait * ſans

changer la valeur du dividende, en lui ajoutant autant de zero qu'il en faut pour cette réduction, & en marquant le point qui diſtingue les parties décimales d'avec les entiers.

2°. Il faut enſuite faire la diviſion préciſement * de la même maniere que ſi le dividende & le diviſeur étoient des nombres entiers. * 126.

3°. Pour diſtinguer les parties décimales dans le quotient d'avec les entiers, il faut mettre autant de rangs pour les parties décimales qu'en contient le dividende de ſurplus après en avoir ôté les rangs des parties décimales du diviſeur; c'eſt à dire, ſi le diviſeur contient trois rangs de parties décimales, & le dividende cinq rangs, le quotient doit ne contenir que deux rangs de parties décimales, parceque deux eſt ce qui reſte de cinq, après en avoir ôté trois. D'où l'on voit que ſi le diviſeur & le dividende avoient le même nombre de rangs de parties décimales, le quotient ne contiendroit que des entiers ſans parties décimales; & que ſi le diviſeur étoit un nombre entier ſans parties décimales, le quotient contiendroit autant de rangs de parties décimales qu'en contient le dividende.

EXEMPLE.

POUR diviſer 2.62842^{v} par 1.234^{iii}. 1°. Le dividende *c* ayant cinq rangs de parties décimales, & le diviſeur *b* trois rangs; le dividende eſt tout préparé, & il n'eſt point néceſſaire de le réduire à des parties décimales plus petites. 2°. Il faut faire la diviſion comme dans les nombres entiers. 3°. Il faut marquer deux rangs de parties décimales au quotient, parceque le dividende ayant cinq rangs de parties décimales & le diviſeur trois rangs, deux eſt le ſurplus de cinq ſur trois.

c	2.62842^{v}	1.234	*b*
	.....	2.13	*a*
	1604		
	....		
	3702		
	....		
	0000		

Démonſtration de la Diviſion des nombres qui contiennent des parties décimales.

ON nommera *C* le nombre entier 262842; le nombre décimal 2.62842 ſera nommé *c*; le nombre entier 1234, *B*; le nombre décimal 1. 234, *b*; le nombre entier 213, *A*; le nombre décimal 2. 13, *a*.

*126. 1°. Il eſt évident * que A eſt le quotient de C diviſé par B.
*105. Ainſi $A = \frac{c}{B}$. Le quotient de c diviſé par B * peut s'exprimer
*109. ainſi $\frac{c}{B}$. Mais * $\frac{c}{B}$. $\frac{c}{B}$ :: C. c. Et c (2. 62842) * vaut préci-
*18. ſément cent mille fois moins que C (262842.) Donc $\frac{c}{B}$ doit valoir cent mille fois moins que $\frac{c}{B}$. Pour faire valoir $\frac{c}{B} = 213$
*18. cent mille fois moins qu'il ne vaut, il faut écrire * 0. 00213^{v}. Ainſi $\frac{c}{B} =$ 0. 00213. L'on a donc déja démontré que quand le dividende c contient des parties décimales, & que le diviſeur B ne contient que des entiers, le quotient $\frac{c}{B}$ doit contenir autant de rangs de parties décimales qu'en contient le dividende.

2°. Le quotient de $c = 2.62842$ diviſé par $b = 1.234$ peut
*105. s'exprimer ainſi * $\frac{c}{t}$. Mais $\frac{c}{B}$. $\frac{c}{t}$ :: * b. B. Et $B = 1234$ *
*121. vaut mille fois plus que $b = 1.234$. Donc le quotient $\frac{c}{t}$ doit
*18. valoir mille fois plus que $\frac{c}{B} =$ 0. 00213 : & pour faire valoir
*18. $\frac{c}{B} =$ 0. 00213 mille fois plus qu'il ne vaut * il faut avancer le point qui diſtingue les parties décimales de trois rangs vers la droite de cette maniere 0002. 13. Ainſi $\frac{c}{t} =$ 0002. 13. L'on a donc démontré que pour avoir le nombre des rangs des parties décimales du quotient venu de la diviſion d'un nombre décimal qui a plus de rangs de parties décimales que le diviſeur, il falloit ôter le nombre des rangs des parties décimales du diviſeur du nombre des rangs des parties décimales du dividende, & que le ſurplus étoit le nombre des rangs des parties décimales du quotient.

D'où il ſuit qu'en diviſant 0. 080850 par 0. 35 ; le quotient ſera 0. 2310. Si le diviſeur étoit 0. 035, le quotient ſeroit 2. 310. Si le diviſeur étoit 0. 000035 ; le quotient ſeroit l'entier 2310 ſans parties décimales.

Uſage de la Diviſion des nombres qui contiennent des parties décimales dans les Diviſions qui ne ſont pas exactes, c'eſt à dire, dans leſquelles on trouve une fraction outre le quotient qui eſt un nombre entier.

135. L'on a démontré * que quand il y avoit un reſte après la
*133. diviſion, le quotient que l'on trouvoit en nombres entiers joint à la fraction qui a le reſte pour numerateur, & le diviſeur pour dénominateur, étoit le quotient total de la diviſion.

Or

Or le calcul des parties décimales ſe faiſant comme celui des nombres entiers, l'on a trouvé qu'il étoit très commode dans les Sciences Mathematiques-Pratiques de réduire la fraction, qui eſt une partie du quotient, en parties décimales; parcequ'après être arrivé, en continuant la diviſion, à des parties décimales très petites, par exemple, à des millioniémes, on peut négliger ce qui reſte, comme étant inſenſible dans la pratique, & comme ne pouvant cauſer d'erreur ſenſible. Voici comment cela ſe fait.

305852 { 378 / 809. 132275ᵉˢ

.....

2. & 3. membre. 3452

...

500 Reſte qu'on continue de diviſer.

...

1220

...

860

...

1040

...

2840

...

1940

...

50

On prendra pour exemple le troiſiéme, où après avoir diviſé 305852 par 378, l'on a trouvé pour quotient le nombre entier 809, & pour reſte de la diviſion le nombre 50. Il faut mettre après le quotient 809 un point pour diſtinguer les parties décimales que l'on découvrira, d'avec les entiers 809 déja découverts; ajouter un o au reſte 50, ce qui donnera le nouveau membre de la diviſion 500. Il faut diviſer ce membre par le diviſeur 378, & écrire au quotient le chifre 1 qu'on trouvera pour le quotient de ce membre qui ſera une dixiéme; & après avoir diviſé ce membre, il faudra ajouter un o devant le reſte 122, ce qui donnera un nouveau membre 1220, dont on écrira le quotient 3 au devant du quotient déja trouvé; & après en avoir diviſé ce membre, on ajoutera un o devant le reſte 86, & l'on continuera de diviſer le nouveau membre 860 toujours par le même diviſeur 378, d'en écrire le quotient 2 au devant du quotient déja decouvert, & après avoir diviſé ce membre, on continuera d'ajouter un o devant le reſte 104: on continuera, dis-je, ainſi la diviſion tant qu'on voudra. On l'a continuée ici juſqu'aux millioniémes, & l'on a trouvé qu'en diviſant 305852 par 378, le quotient étoit

809. 132275^{VI}. On peut négliger le reſte qui eſt moindre qu'une millioniéme.

Voici la raiſon de cette operation. C'eſt la même choſe d'ajouter o après le reſte 50 de la diviſion, qui a donné pour quotient le nombre entier 809, que d'ajouter ce o au dividende 305852, * ce qui le réduiroit en dixiémes, car l'on auroit 305852. o. Ainſi le quotient 1 qu'on trouve, après le quotient en entiers 809, * vaut des dixiémes. C'eſt auſſi la même choſe d'ajouter ſucceſſivement o à chacun des reſtes des diviſions des membres ſuivans, que d'ajouter ces zeros en même temps au dividende 305852. Or en ajoutant, par exemple 6 zeros à ce dividende, * on le réduiroit en millioniémes, & le quotient que l'on trouveroit enſuite * contiendroit outre le nombre entier 809, le nombre décimal o. 132275^{VI} qui vaut des millioniémes.

*17. *134. *17. *134.

Uſage de la Diviſion dans les nombres de differentes eſpeces pour réduire les moindres eſpeces aux plus grandes.

136. DANS les nombres de differentes eſpeces, la diviſion ſert à réduire les moindres eſpeces aux plus grandes. Pour cela il faut diviſer le nombre qui contient celle des moindres eſpeces, qu'on veut réduire à une plus grande, par le nombre qui exprime combien de fois cette moindre eſpece eſt contenue dans la plus grande à laquelle on veut la réduire, & le quotient ſera la valeur de cette moindre eſpece réduite à la plus grande. Ainſi pour réduire 120 pouces en pieds, il faut diviſer 120 par 12, qui eſt le nombre qui exprime combien de fois un pouce eſt dans un pied, & le quotient 10 pieds ſera la valeur de 120 pouces reduits en pieds. Pour réduire 100 pieds en toiſes, il faut diviſer 100 pieds par 6, qui eſt le nombre qui exprime combien de fois un pied eſt dans une toiſe, & le quotient 16 toiſes + $\frac{4}{6}$ de toiſe ſera la valeur de 100 pieds réduits en toiſes; c'eſt à dire que 100 pieds valent 16 toiſes plus 4 ſixiémes d'une toiſe, c'eſt à dire plus 4 pieds. Pour réduire des pouces immediatement à des toiſes, il faut diviſer le nombre qui exprime les pouces par 72, parcequ'un pouce eſt 72 fois dans une toiſe.

Il n'eſt pas neceſſaire, pour réduire une moindre eſpece à une plus grande, que le nombre qui exprime la moindre

ſurpaſſe le nombre qui exprime combien de fois cette moindre eſpece eſt contenue dans la plus grande. Ainſi pour réduire 5 pouces en pieds, il faut écrire $\frac{5}{12}$, & cette fraction marque que 5 pouces valent cinq douziémes d'un pied. De même pour réduire 5 pouces en toiſes, on écrira $\frac{5}{72}$, ce qui ſignifie cinq ſeptante deuxiémes de pieds. Car $\frac{5}{6}$ * eſt le quotient de 5 diviſé par 6, & $\frac{5}{72}$ * eſt le quotient de 5 diviſé par 72. * 112. * 112.

Ce qu'on vient de dire des nombres de differentes eſpeces, par rapport aux toiſes, doit s'appliquer aux nombres de differentes eſpeces, par rapport aux autres grandeurs.

REMARQUE.

ON peut remarquer que c'eſt par le moyen de la diviſion qu'on partage à un nombre déterminé de perſonnes, ce que chacune doit avoir d'une ſomme déterminée; par exemple, pour partager 300000 livres à 30 perſonnes, il faut diviſer 300000 par 30, & le quotient 10000 liv. ſera la part de chacun. Que c'eſt de même par la diviſion qu'on trouve combien une ſomme déterminée doit produire d'intereſt au denier 20, au denier 18, au denier 15, ou à un autre denier. Car on entend par le denier 20 d'intereſt d'une ſomme, par exemple, de 40000 livres, la vingtiéme partie de cette ſomme, par le denier 15, la quinziéme partie, & ainſi des autres. D'où l'on voit que pour trouver cet intereſt il faut diviſer la ſomme propoſée par 20, ou par 15, &c. & le quotient ſera ce que l'on cherche.

La diviſion ſert de même à réſoudre beaucoup de queſtions de pratique dans le Commerce; & il ſuffit de les entendre pour trouver leur réſolution, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en parler dans cet Ouvrage des calculs, qui eſt principalement pour réſoudre les queſtions des Mathematiques.

La Diviſion des nombres de differentes eſpeces.

137. POUR diviſer un nombre qui contient differentes eſpeces par un autre nombre qui contient auſſi differentes eſpeces, la Regle generale eſt * de réduire l'un & l'autre à la plus petite eſpece; de diviſer enſuite le dividende réduit à la moindre eſpece par le diviſeur auſſi réduit à la moindre eſpece; & quand on aura trouvé le quotient (ce quotient * 86.

* 136. n'exprime que la moindre eſpece) on le réduira * aux plus grandes eſpeces par la diviſion.

LA DIVISION DES GRANDEURS LITTERALES.

La Diviſion des grandeurs litterales incomplexes.

PROBLÊME

138. *DIVISER une grandeur litterale incomplexe donnée par une autre grandeur litterale incomplexe auſſi donnée, & en trouver le quotient.*

REGLE *ou operation*. Il y a trois choſes à faire dans la diviſion des grandeurs litterales incomplexes pour en trouver le quotient. 1°. Quand le dividende & le diviſeur ſont précedez de nombres entiers qui marquent combien chacun eſt pris de fois, il faut diviſer, par la diviſion des nombres entiers, le nombre qui précede le dividende par le nombre qui précede le diviſeur, & le quotient ſera le nombre qui doit préceder le quotient litteral qu'on cherche. Ainſi pour diviſer $12ab$ par $3a$; il faut diviſer 12 par 3, & le quotient 4 devra préceder le quotient litteral quand on l'aura trouvé. Quand même la diviſion des nombres, qui précedent le dividende & le diviſeur, donneroit une fraction pour quotient, il ne faudroit pas moins marquer cette fraction au devant du quotient litteral. Par exemple, ſi l'on diviſoit $3ab$ par $2a$, le quotient du nombre 3, diviſé par 2, ſeroit $\frac{1}{2}$, & il faudroit écrire $\frac{1}{2}$ au devant du quotient litteral qu'on trouveroit. Mais pour ne pas multiplier les difficultez, on évitera dans la diviſion des grandeurs complexes celles qui viendroient de ces fractions numeriques que l'on expliquera à fond dans le Livre ſuivant, & on ſuppoſera dans la diviſion des grandeurs complexes que le nombre qui précede chaque dividende, peut ſe diviſer exactement par le nombre qui précede le diviſeur.

2°. Il faut trouver le quotient du dividende litteral par le diviſeur litteral, & cela renferme trois cas. Le premier eſt quand le dividende & le diviſeur n'ont aucune lettre commune. Dans ce cas le quotient * eſt la fraction dont le dividende eſt le numerateur, & dont le diviſeur eſt le dénominateur. Par exemple, pour diviſer $12ab$ par $2c$, il faut

* 105.

écrire la fraction $\frac{6ab}{c}$ pour le quotient. Car * $12ab.2c$ *111: :: $\frac{12ab}{2c}.1$ :: * $\frac{6ab}{c}.1$. De même $\frac{b}{a}$ eſt le quotient de b diviſé par a. *109.

Le ſecond cas eſt quand le diviſeur a quelques lettres communes avec le dividende, & non pas toutes, comme s'il falloit diviſer abc par ad. Dans ce cas le quotient eſt encore une fraction, il faut écrire pour le numerateur les lettres du dividende qui ne ſont pas dans le diviſeur, & pour dénominateur les lettres du diviſeur qui ne ſont pas communes avec le dividende. Ainſi pour diviſer abc par ad, on écrira pour quotient $\frac{bc}{d}$. Car $abc.ad$:: * $bc.d$:: * $\frac{bc}{d}.1$. Ainſi * $\frac{bc}{d}$ eſt le quotient de abc diviſé par ad. De même pour diviſer a^3b^2 par a^2bc, il faut écrire $\frac{ab}{c}$ pour quotient. *109. *111. *106.

Le troiſiéme cas eſt quand toutes les lettres du diviſeur ſe trouvent dans le dividende, comme s'il falloit diviſer ab par b, ou a^3b^2 par a^2b; dans ce cas les lettres du dividende qui reſtent, après en avoir effacé les lettres du diviſeur, ſont le quotient. Ainſi a eſt le quotient de ab diviſé par b; ab eſt le quotient de a^3b^2 diviſé par a^2b. La raiſon en eſt évidente, car ab * étant le produit de b multiplié par a, l'on a cette proportion * $1.a::b.ab$. D'où l'on tire la proportion inverſe * $ab.b::a.1$. Ainſi * a eſt le quotient de ab diviſé par b. *88. *72. *55. *106.

Dans ce troiſiéme cas le quotient litteral eſt une grandeur entiere, & l'on ne ſe ſervira que de cette diviſion des grandeurs incomplexes, où le quotient eſt une grandeur entiere, dans la diviſion des grandeurs complexes, juſqu'à ce qu'on ait expliqué dans le Livre ſuivant le calcul des fractions.

3°. Il faut diviſer le ſigne + ou — qui précede le dividende par le ſigne + ou — qui précede le diviſeur; voici la Regle qu'il faut ſuivre, pour trouver le ſigne du quotient.

Regle des ſignes + & — dans la Diviſion.

139. QUAND le ſigne du dividende & celui du diviſeur ſont tous deux +, ou tous deux —; le ſigne du quotient eſt toujours +.

Quand les ſignes du dividende & du diviſeur ſont differens, c'eſt à dire, que l'un eſt + & l'autre —; le ſigne du quotient eſt toujours —.

Démonſtration. Il y a dans la diviſion une proportion inverſe de celle qui eſt dans la multiplication. Dans la multiplication de b par a, il y a cette proportion * $1.a::b.ab$, *72.

*106. Et la proportion inverſe $ab. b :: a. 1$ * ſe trouve dans la diviſion. Ainſi dans la diviſion le dividende ab eſt le produit de la multiplication. Le diviſeur b eſt le multiplié; le quotient a eſt le multiplicateur, & l'unité poſitive eſt le quatriéme terme. D'où l'on voit qu'en multipliant le diviſeur b par le quotient a, le produit eſt le dividende ab.

Il ſuit de-là évidemment, par rapport aux ſignes + & —, que le quotient dans la diviſion doit avoir le même ſigne, que le multiplicateur dans la multiplication.

Or, 1°. Quand le produit + ab a le ſigne +, & le multiplié
*95. + b le ſigne +; cela vient de ce que * le multiplicateur + a a neceſſairement le ſigne +, & la proportion eſt + 1. + a :: + b. + ab. 2°. Quand le produit — ab a le ſigne —, &
*95. le multiplié b le ſigne —; cela vient de ce que * le multiplicateur + a a le ſigne +. Et la proportion eſt + 1. + a :: — b. — ab. 3°. Lorſque le produit + ab a +, & le multiplié — b a —;
*95. cela vient * de ce que le multiplicateur — a a —. Et la proportion eſt + 1. — a :: — b. + ab. 4°. Enfin ſi le produit — ab a —, & le multiplié + b a +; le multiplicateur — a a —, & la proportion eſt + 1. — a :: + b. — ab.

Donc, 1°, dans la diviſion qui contient la proportion inverſe de celle de la multiplication, ſi le produit, c'eſt à dire le dividende + ab a le ſigne +, & le diviſeur + b, qui eſt le multiplié dans la multiplication, a auſſi le ſigne +, le quo-
*95. tient + a, qui eſt le multiplicateur dans la multiplication, * doit avoir +, & la proportion ſera + ab. + b :: + a. + 1.

Donc, 2°, ſi le dividende — ab a —, & ſi le diviſeur — b a auſſi —; le quotient + a doit avoir +, & la proportion ſera — ab. — b :: + a. + 1.

Donc, 3°, ſi le dividende + ab a +, & le diviſeur — b a —; le quotient — a doit avoir —, & la proportion ſera + ab. — b :: — a. + 1.

Donc, 4°, ſi le dividende — ab a —, & le diviſeur + b a +; le quotient — a doit avoir —, & la proportion ſera — ab. + b :: — a. + 1. Ce ſont-là tous les cas *qu'il falloit démontrer*.

Cette démonſtration de la Regle des ſignes pour la diviſion eſt une ſuite évidente & neceſſaire de celle qu'on a donnée dans l'art. 95 pour les ſignes de la multiplication; & il

eſt inutile de prolonger ce Traité d'une démonſtration ſemblable à celle de cet article. Ceux qui en voudront une ſemblable, ne trouveront aucune difficulté à la faire eux-mêmes.

Exemples de diviſion pour les grandeurs litterales incomplexes.

POUR diviſer $+15a^3bcc$ par $-3abc$, 1°, j'écris le dividende, je tire un arc au devant, j'écris le diviſeur au haut de cet arc, & je tire une ligne au deſſous. La place du quotient ſera ſous cette ligne. Enſuite je dis + diviſé par — donne — pour le quotient, j'écris — au quotient. 2°. Je dis 15 diviſé par 3, le quotient eſt 5, j'écris 5 au quotient. 3°. Enfin je dis a^3bcc diviſé par abc, le quotient eſt a^2c. J'écris a^2c au quotient, & le quotient de ma diviſion eſt $-5a^2c$

I. EXEMPLE.

$+15a^3bcc \left\{\begin{matrix} -3abc \\ \hline -5a^2c \end{matrix}\right.$

II. EXEMPLE.

De même le quotient de $-7a^3b$ diviſé par $-ab$ eſt $+7a^2$.

$-7a^3b \left\{\begin{matrix} -ab \\ \hline +7a^2 \end{matrix}\right.$

III. EXEMPLE.

Le quotient de $-12abc$ diviſé par $+3a$ eſt $-4bc$.

$-12abc \left\{\begin{matrix} +3a \\ \hline -4bc \end{matrix}\right.$

REMARQUE.

DANS toute fraction & dans tout rapport, la fraction eſt * le quotient du numerateur diviſé par le dénominateur. *112. Ainſi il eſt bon de remarquer, par rapport aux ſignes * que *139. $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$, & de même $\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}$; que $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$; que $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$. Enfin que $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$.

COROLLAIRE.

140. LA diviſion des grandeurs litterales incomplexes ſuffit pour faire la diviſion d'une grandeur litterale complexe par un diviſeur litteral incomplexe. Par exemple, pour diviſer $abxx + acxx - b^2xx$ par xx, il faut écrire au quotient $ab + ac - b^2$, c'eſt

$abxx + acxx - b^2xx \left\{\begin{matrix} xx \\ \hline ab + ac - b^2 \end{matrix}\right.$

à dire, le quotient contient la ſomme des lettres des grandeurs litterales incomplexes qui reſtent au dividende après en avoir effacé toutes les lettres du diviſeur, avec leurs mêmes ſi-
*139. gnes * quand le diviſeur a +, & avec des ſignes oppoſez quand le diviſeur a —.

La Diviſion des grandeurs litterales complexes.

PROBLÊME.

141 *DIVISER une grandeur litterale complexe donnée par une autre grandeur litterale complexe auſſi donnée, & en trouver le quotient.*

*102. REGLE *ou operation*. 1°. Il faut ordonner * le dividende & le diviſeur, par rapport à une même lettre qu'on peut choiſir telle qu'on voudra, ſi ce n'eſt dans les diviſions dont le dividende & le diviſeur contiennent les lettres qui marquent les inconnues qu'on cherche dans les Problêmes ; dans ces diviſions l'on ordonne le dividende & le diviſeur par rapport à ces lettres des inconnues. Quand le dividende & le diviſeur ſont déja ordonnez, on n'a pas beſoin de cette préparation.

Il faut enſuite écrire le dividende ; tracer un arc au devant ; écrire le diviſeur au haut de cet arc, & tirer une ligne au deſſous. La place du quotient ſera ſous cette ligne.

Par exemple, pour diviſer $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$ *par* $2a^2 - 3ab$, *dont les termes ſont ordonnez par rapport à la lettre* a, *on commence par écrire le dividende & le diviſeur comme on le voit ici.*

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{l} 6a^3 - 13a^2b + 6ab^2 \\ \quad 0 \qquad\quad 0 \\ \qquad\quad -4a^2b \end{array} \left(\begin{array}{l} 2a^2 - 3ab \\ \hline 3a \end{array} \right.$$

2°. Il faut diviſer le premier terme du dividende par le premier terme du diviſeur, comme dans la diviſion des grandeurs incomplexes ; en écrire le quotient ſous la ligne qui eſt ſous le diviſeur ; multiplier tous les termes du diviſeur par ce quotient, & en même temps qu'on en trouve les produits, les retrancher du dividende, & en écrire le reſte au deſſous, quand il y en a un, s'il n'y a pas de reſte, on écrit 0.

Quand on ôte du dividende les produits du quotient multiplié

multiplié par les termes du diviſeur, on tranche par une ligne les grandeurs du dividende ſur leſquelles on a operé, & qui ne doivent plus ſervir; mais pour la commodité de l'impreſſion, on mettra un zero ſous chaque grandeur du dividende qui ne doit plus ſervir.

Dans cet exemple je dis, $+6a^3$ *diviſé par* $+2a^2$ *donne pour quotient* $+3a$, *j'écris* $+3a$ *au quotient; enſuite je multiplie tous les termes du diviſeur par ce quotient, & j'en ôte en même temps les produits du dividende, en diſant* $+3a \times 2a^2 = +6a^3$; *pour ôter* $+6a^3$ *il faut ſuppoſer* * *que c'eſt* $-6a^3$, *& dire* $+6a^3$ *du dividende* $-6a^3$ *qui en eſt retranché, il reſte* 0, *j'écris* 0 *ſous* $6a^3$ *du dividende, pour me faire ſouvenir que je me ſuis ſervi de* $6a^3$. * 71.
Enſuite je dis $+3a \times -3ab = -9a^2b$, *mais pour ôter* $-9a^2b$, *il faut m'imaginer que c'eſt* $+9a^2b$, *& dire* $-13a^2b$ *du dividende* $+9a^2b$ *qui en eſt retranché, le reſte eſt* $-4a^2b$, *j'écris* 0 *ſous* $-13a^2b$, *& j'écris au deſſous le reſte* $-4a^2b$. *Le reſte du dividende après cette premiere operation eſt* $-4a^2b + 6ab^2$. *Il faut continuer la diviſion ſur ce reſte.* * 71.

3°. Le reſte qu'on a trouvé par l'operation précedente, & les grandeurs du dividende qui n'ont pas encore ſervi, ſont le nouveau dividende qu'il faut continuer de diviſer par le même diviſeur, de la maniere qu'on vient d'expliquer dans le ſecond article. C'eſt à dire il faut diviſer le premier terme de ce nouveau dividende par le premier terme du diviſeur; en écrire le quotient devant celui qu'on a déja trouvé; multiplier tous les termes du diviſeur par ce nouveau quotient; & à meſure qu'on en trouve les produits, retrancher ces produits du dividende, & en écrire le reſte au deſſous, & s'il n'y a pas de reſte, écrire 0 pour le reſte.

Dans cet exemple le nouveau dividende eſt le reſte $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$ *qu'on a trouvé par l'operation précedente* $-4a^2b$ *joint aux grandeurs du dividende dont on ne s'eſt pas encore ſervi,* 0 0 0 — $-4a^2b$ — 0 — $\left\{\begin{array}{l} 2a^2 - 3ab \\ \hline 3a - 2b \end{array}\right.$

c'eſt à dire le nouveau dividende eſt $-4a^2b + 6ab^2$. *Pour continuer la diviſion je dis le quotient de* $-4a^2b$ *par* $+2a^2$ *eſt* $-2b$; *j'écris* $-2b$ *au quotient. Je multiplie tous les termes du diviſeur par ce nouveau quotient, & à meſure que j'en trouve les produits, je les ôte du dividende, & j'en écris*

le reſte s'il s'en trouve, en diſant $-2bx+2a^2=-4a^2b$; *mais pour ôter* $-4a^2b$ *il faut ſuppoſer que c'eſt* $+4a^2b$; *& dire* $-4a^2b$ *du dividende* $+4a^2b$ *qui en eſt retranché, le reſte eſt* o; *j'écris* o *ſous* $-4a^2b$; *& je dis* $-2bx-3ab=+6ab^2$; *mais pour ôter* $+6ab^2$ *il faut que je ſuppoſe* $-6ab^2$, *& je dis* $+6ab^2$ *du dividende* $-6ab^2$ *qui en eſt retranché, le reſte eſt* o; *j'écris* o *ſous* $+6ab^2$. *Et comme il n'y a plus de grandeur dans le dividende, & que le reſte eſt* o, *la diviſion eſt achevée, & elle eſt exacte. Le quotient eſt* $3a-2b$.

4°. Si l'operation précedente donne un reſte, ce reſte joint avec les grandeurs du dividende, dont on ne s'eſt pas encore ſervi, s'il y en a, fait un nouveau dividende qu'il faut diviſer de la maniere qu'on a expliquée dans le ſecond & le troiſiéme articles. L'on continue toujours la diviſion juſqu'à ce qu'on trouve o pour le dernier reſte, & alors la diviſion eſt exacte, & le quotient qu'on a trouvé eſt exact; ou bien juſqu'à ce qu'on trouve un reſte qui ne peut plus ſe diviſer par le diviſeur, & alors on écrit le dernier reſte pour numerateur d'une fraction, & le diviſeur pour dénominateur, & le quotient en grandeurs entieres joint avec cette fraction faite du dernier reſte & du diviſeur, eſt le quotient total de la diviſion. D'où l'on voit que ſi l'on ôtoit du dividende le dernier reſte avant que de faire la diviſion, le dividende diminué de ce reſte ſe diviſeroit exactement par le diviſeur, & le quotient, qu'on a trouvé en grandeurs entieres, ſeroit le quotient exact.

Exemples de la Diviſion des grandeurs litterales complexes.

EXEMPLE II.

POUR diviſer a^3-b^3 par $a-b$, $a^3 * * - b^3 \left(\frac{a-b}{\quad}\right.$ 1°, j'écris le dividende a^3-b^3 en marquant par des étoiles les places des deux termes qui manquent, dans leſquelles devroient être les puiſſances a^2 & a; je tire un arc au devant; j'écris le diviſeur $a-b$ au haut de cet arc; je tire une ligne au deſſous, la place du quotient eſt ſous cette ligne.

2°. Je dis a^3 diviſé par a le quotient eſt a^2; j'écris a^2 au quotient. Je dis enſuite $a^2 \times a = +a^3$; mais pour ôter $+a^3$ il faut que je ſuppoſe $-a^3$. Et je dis $+a^3$ du dividende $-a^3$

qui en eſt retranché, le reſte eſt o. J'écris o ſous a^3, & je dis $+a^2 \times -b = -a^2b$; mais pour ôter $-a^2b$, il faut que je ſuppoſe $+a^2b$; & comme il n'y a point de grandeur dans le dividende qui contienne a^2b, j'écris le reſte $+a^2b$.

$$\begin{array}{llllll} a^3 & * & * & -b^3 & \left\{\begin{array}{l} a-b \\ \overline{a^2+ab+b^2} \end{array}\right. \\ o & & & o & \\ +a^2b & +ab^2 & & & \\ o & o & & & \end{array}$$

3°. Le reſte $+a^2b$ joint à $-b^3$ du dividende fait le dividende nouveau $+a^2b-b^3$, ſur lequel je continue la diviſion, en diſant $+a^2b$ diviſé par $+a$, le quotient eſt $+ab$; j'écris $+ab$ au quotient: je dis enſuite $+ab \times +a = +a^2b$; mais pour ôter $+a^2b$, il faut que je ſuppoſe $-a^2b$, & que je diſe $+a^2b$ du dividende $-a^2b$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o; j'écris o ſous $+a^2b$: & je dis $+ab \times -b = -ab^2$, pour retrancher $-ab^2$, il faut écrire $+ab^2$ pour le reſte, n'y ayant aucune grandeur dans le dividende qui contienne ab^2 dont on puiſſe retrancher ab^2. Ainſi j'écris $+ab^2$ pour le reſte.

4°. Ce reſte $+ab^2$ joint à $-b^3$ fait le dividende nouveau $+ab^2-b^3$. Je le diviſe en diſant $+ab^2$ diviſé par $+a$, le quotient eſt $+b^2$. J'écris $+b^2$ au quotient. Je dis enſuite $+b^2 \times a = +ab^2$, pour retrancher $+ab^2$ du dividende, il faut que je ſuppoſe $-ab^2$, & que je diſe enſuite $+ab^2$ du dividende $-ab^2$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o. J'écris o ſous $+ab^2$. Et je dis $+b^2 \times -b = -b^3$. Mais pour retrancher $-b^3$, il faut que je ſuppoſe $+b^3$, & que je diſe $-b^3$ du dividende $+b^3$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o; j'écris o ſous $-b^3$.

Comme il n'y a plus de grandeur dans le dividende ſur laquelle on n'ait operé, & que le dernier reſte eſt o, la diviſion eſt exacte, & le quotient a^2+ab+b^2 eſt exact.

On peut remarquer que les produits qui ſe détruiſent dans la multiplication en multipliant a^2+ab+b^2 par $a-b$, viennent ſe repréſenter en diviſant le produit de ces deux grandeurs qui eſt a^3-b^3 par l'une des deux.

EXEMPLE III.

POUR diviſer $c^2fx^3 - a^2cfx^2 - b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2 + a^2b^2cx + 3a^2b^2fx + 3b^4cx - 3a^2b^4$ par $cx - a^2$; après avoir or-

donné le dividende & le diviſeur par rapport à la lettre x, & après avoir mis toutes les parties du dividende qui ne ſont qu'un même terme les unes ſous les autres, & écrit le dividende & le diviſeur dans les places qui leur conviennent ; Je dis le quotient de $+ c^2fx^3$, diviſé par $+ cx$, eſt cfx^2 ; j'écris au quotient cfx^2 : puis je dis $cfx^2 \times cx = c^2fx^3$, mais c^2fx^3 devant être retranché du dividende, je dois ſuppoſer $- c^2fx^3$, & dire $+ c^2fx^3$ du dividende $- c^2fx^3$ qui en eſt re-

$$\begin{array}{llll} c^2fx^3 - a^2cfx^2 + a^2b^2cx - 3a^2b^4 & & & \left\{\begin{array}{l} cx - a^2 \\ \hline cfx^2 - b^2cx + 3b^4 \\ \quad - 3b^2fx \end{array}\right. \\ \quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 & & & \\ \quad - b^2c^2x^2 + 3a^2b^2fx & & & \\ \quad\quad 0 \quad\quad 0 & & & \\ \quad - 3b^2cfx^2 + 3b^4cx & & & \\ \quad\quad 0 \quad\quad 0 & & & \end{array}$$

tranché, le reſte eſt o ; j'écris o ſous c^2fx^3 ; puis je dis $+ cfx^2 \times - a^2 = - a^2cfx^2$; mais comme il faut ôter $- a^2cfx^2$, je dois ſuppoſer $+ a^2cfx^2$, & dire $- a^2cfx^2$ du dividende $+ a^2cfx^2$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, j'écris o ſous $- a^2cfx^2$. Je diviſe enſuite les grandeurs ſur leſquelles je n'ai pas encore operé, & je dis le quotient de $- b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2$ par $+ cx$, eſt $- b^2cx - 3b^2fx$, je l'écris au quotient, puis je dis $\overline{- b^2cx - 3b^2fx} \times + cx = - b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2$, & ce produit devant être retranché, je dois ſuppoſer $+ b^2c^2x^2 + 3b^2cfx^2$, & dire $- b^2c^2x^2 - 3b^2cfx^2$ du dividende $+ b^2c^2x^2 + 3b^2cfx^2$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o ; j'écris o ſous $- b^2c^2x^2$, & ſous $- 3b^2cfx^2$: Je dis enſuite $\overline{- b^2cx - 3b^2fx} \times - a^2 = + a^2b^2cx + 3a^2b^2fx$. Et ce produit devant être retranché, je ſuppoſe $- a^2b^2cx - 3a^2b^2fx$, & je dis $+ a^2b^2cx + 3a^2b^2fx$ du dividende $- a^2b^2cx - 3a^2b^2fx$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o ; j'écris o ſous $+ a^2b^2cx$, & ſous $+ 3a^2b^2fx$.

Enfin je diviſe les grandeurs $+ 3b^4cx - 3a^2b^4$ qui reſtent dans le dividende par le diviſeur $cx - a^2$, en diſant le quotient de $+ 3b^4cx$ par $+ cx$ eſt $+ 3b^4$, je l'écris au quotient ; & je dis $+ 3b^4 \times cx = + 3b^4cx$; mais ce produit devant être retranché, je ſuppoſe $- 3b^4cx$, & je dis $+ 3b^4cx$ du divi-

dende $-3b^4cx$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, j'écris o ſous $+3b^4cx$, & je dis $+3b^4 \times -a^2 = -3a^2b^4$. Or $-3a^2b^4$ devant être retranché, je ſuppoſe $+3a^2b^4$, & je dis $-3a^2b^4$ du dividende $+3a^2b^4$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, j'écris o ſous $-3a^2b^4$. N'y ayant plus de grandeur au dividende ſur laquelle je n'aye operé, & le dernier reſte étant o, la diviſion eſt exacte, & le quotient exact eſt $cfx^3 - b^2cx - 3b^2fx + 3b^4$.

EXEMPLE IV.

$$
\begin{array}{l}
x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r \\
\quad o \quad o \quad o \\
\quad -fx^3 - gx^2 - gnx - gp \\
\qquad o \quad o \\
\qquad\quad -fnx^2 + fgx + g^2 \\
\qquad\qquad o \\
\qquad\quad +f^2x^2 - fpx + fgn \\
\qquad\qquad o \\
\qquad\qquad\quad +fgx - f^2g \\
\qquad\qquad\quad +f^2nx \\
\qquad\qquad\quad -f^3x
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
x^2 + fx + g \\
\hline
x^2 + nx + p \\
\quad -fx - g \\
\qquad\quad -fn \\
\qquad\quad +f^2
\end{array}
\right.
$$

On diviſera de la même maniere $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ par $x^2 + fx + g$, en diſant le quotient de x^4 diviſé par x^2, eſt x^2. On écrira x^2 au quotient, & l'on dira $+x^2 \times +x^2 = +x^4$, pour ôter $+x^4$, il faut ſuppoſer $-x^4$, & dire $+x^4$ du dividende $-x^4$ qui en eſt retranché, le reſte eſt o, il faut écrire o ſous x^4, & dire $+x^2 \times +fx = +fx^3$; mais pour ôter $+fx^3$ il faut écrire $-fx^3$; & comme il n'y a point de grandeur dans le dividende ſemblable à fx^3, il faut écrire le reſte $-fx^3$ ſous $+nx^3$, & dire enſuite $+x^2 \times +g = +gx^2$, pour ôter $+gx^2$ il faut écrire $-gx^2$ ſous $+px^2$, parcequ'il n'y a pas dans le dividende de grandeur ſemblable à gx^2.

Pour continuer la diviſion il faut dire $+nx^3 - fx^3$ diviſé par x^2 le quotient eſt $+nx - fx$; il faut écrire au quotient $+nx - fx$ l'une ſous l'autre, parceque ces deux grandeurs ne ſont qu'un même terme; puis il faut dire $+nx - fx \times +x^2 + fx + g = +nx^3 - fx^3 + fnx^2 - f^2x^2 + gnx - fgx$;

mais pour ôter ce produit il faut en changer les ſignes, & l'on aura $— nx^3 + fx^2 — fnx^2 + f^2x^2 — gnx + fgx$. Comme dans le dividende les grandeurs $+ nx^3 — fx^2$ ſont ſemblables à $— nx^3 + fx^2$, & qu'elles ſe détruiſent par des ſignes oppoſez, il faut écrire o ſous $+ nx^3$ & ſous $— fx^2$. Mais il n'y a pas de grandeurs dans le dividende qui ſoient ſemblables à $— fnx^2 + f^2x^2 — gnx + fgx$; ainſi il faut écrire ces grandeurs, qui ſont des reſtes de la diviſion qu'on vient de faire, ſous le dividende aux termes qui leur conviennent.

Pour pourſuivre la diviſion il faut dire $+ px^2 — gx^2 — fnx^2 + f^2x^2$ diviſé par $+ x^2$, le quotient eſt $+ p — g — fn + f^2$; ainſi il faut écrire au quotient les grandeurs $+ p — g — fn + f^2$ les unes ſous les autres, parceque ces grandeurs ſont un même terme. Enſuite il faut dire $+ p — g — fn + f^2 \times x^2 + fx + g = + px^2 — gx^2 — fnx^2 + f^2x^2 + fpx — fgx — f^2nx + f^3x + pg — g^2 — fgn + f^2g$; mais pour ôter ces produits du dividende, il faut changer leurs ſignes, & l'on aura $— px^2 + gx^2 + fnx^2 — f^2x^2 — fpx + fgx + f^2nx — f^3x — gp + g^2 + fgn — f^2g$. Parmi ces produits $— px^2 + gx^2 + fnx^2 — f^2x^2$ en ont d'égaux dans le dividende avec des ſignes contraires, ainſi ces grandeurs dans le dividende, & ces produits qui en ſont retranchez, donnent o pour reſte, & il faut écrire o ſous les grandeurs du dividende $+ px^2 — gx^2 — fnx^2 + f^2x^2$. Les autres produits $— fpx + fgx + f^2nx — f^3x — gp + g^2 + fgn — f^2g$ n'ont pas de grandeurs ſemblables dans le dividende; ainſi il faut écrire ces reſtes de la diviſion qu'on vient de faire, ſous le dividende, aux termes qui leur conviennent.

Le reſte qui doit ſervir de dividende contient deux termes, dont le premier eſt $+ q — gn + fg — fp + fg + f^2n — f^3 \times x$; & le ſecond terme eſt $+ r — gp + g^2 + fgn — f^2g$. Mais x n'étant que lineaire dans le premier terme du dividende, & x ayant deux dimenſions dans le premier terme $+ x^2$ du diviſeur, la diviſion ne ſçauroit ſe faire ſans fraction, c'eſt à dire le quotient du premier terme du dividende par le premier du diviſeur, ſeroit une fraction dont le dénominateur ſeroit x, & non pas une grandeur entiere; ainſi la

diviſion ne peut plus être continuée en grandeurs entieres, & elle eſt achevée. Le quotient en grandeurs entieres eſt celui qu'on a trouvé; il y a de plus un reſte qu'on peut écrire ſi l'on veut au devant du quotient en fraction, dont le numerateur ſera le dernier reſte qu'on a trouvé, & le dénominateur ſera le diviſeur, & le quotient total de la diviſion ſera le quotient en grandeurs entieres joint à cette fraction.

Démonſtration de la Diviſion des grandeurs litterales complexes.

142. ON ſe ſervira du premier exemple afin de rendre la démonſtration plus claire.

Pour démontrer qu'en diviſant une grandeur complexe, comme $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$, qu'on nommera D, par une autre grandeur complexe comme $2a^2 - 3ab$, qu'on nommera d, la Regle fait découvrir une grandeur, comme $3a - 2b$, qu'on nommera q, qui eſt le veritable quotient; il faut faire voir clairement que le dividende D eſt au diviſeur d, comme le quotient q eſt à l'unité, c'eſt à dire, il faut démontrer * que $\frac{D}{d} = \frac{q}{1}$. En voici la démonſtration. Il eſt évident par l'operation que le produit $q \times d$ du diviſeur d multiplié par q (qui eſt le quotient que fait découvrir l'operation) eſt égal au dividende D; puſqu'en ôtant ce produit $q \times d$ du dividende D, il ne reſte rien quand la diviſion eſt exacte. Donc * 1. $q :: d . D$. Par conſequent l'on aura la proportion inverſe * $\frac{D}{d} = \frac{q}{1}$. *Ce qu'il falloit démontrer.* *106. *72. *55.

Quand la diviſion n'eſt pas exacte, & qu'il y a un reſte, on démontrera en nommant ce reſte r, comme dans *l'article* 133, que le quotient en grandeurs entieres joint avec la fraction qui a le reſte r pour numerateur, & le diviſeur pour dénominateur, eſt le quotient total de la diviſion, c'eſt à dire que $\frac{D}{d} = \frac{q + \frac{r}{d}}{1}$.

REMARQUES.

1.

LES Lecteurs qui commencent & qui veulent apprendre à fond les Mathematiques, doivent ſe rendre la Diviſion très familiere; pour cela il faut qu'ils faſſent beaucoup

d'exemples. Voici la maniere dont ils pourront former ces exemples. Ils prendront deux grandeurs complexes telles qu'il leur plaira; ils feront homogenes toutes les grandeurs qui ſont les parties des deux grandeurs complexes qu'ils auront choiſies; c'eſt à dire ils donneront à chacune des grandeurs incomplexes, qui compoſent une des grandeurs complexes qu'ils auront priſe, le même nombre de dimenſions; & de même ils donneront le même nombre de dimenſions à chaque partie de l'autre grandeur complexe: il n'eſt pas néceſſaire que le nombre des dimenſions des parties de l'une des grandeurs complexes, ſoit égal au nombre des dimenſions des parties de l'autre. Ils s'accoutumeront par-là à la loi des homogenes qui donne de la facilité dans les calculs; cependant ils n'en feroient pas moins la diviſion, ſans obſerver ainſi la loi des homogenes. Ils ordonneront chacune des grandeurs complexes par rapport à une même lettre, qui eſt arbitraire, pour diſtinguer les termes de ces grandeurs complexes.

Ils multiplieront enſuite l'une par l'autre les deux grandeurs complexes qu'ils auront choiſies, & ils en ordonneront le produit total, par rapport à la même lettre qui leur a ſervi à diſtinguer les termes des deux grandeurs qu'ils ont multipliées l'une par l'autre.

Ils prendront le produit, qu'ils viennent de trouver, pour le dividende, & celle qu'ils voudront des deux grandeurs complexes qui ont ſervi à former ce produit, pour le diviſeur: Ils feront la diviſion, & ils trouveront pour quotient exact l'autre grandeur complexe qui a ſervi à former le produit, c'eſt à dire la diviſion n'aura point de reſte.

2.

On peut abreger les operations de la diviſion en ne multipliant point, pour chaque dividende particulier, c'eſt à dire pour chaque membre de la diviſion, le premier terme du diviſeur par le quotient de ce membre là, pour ôter le produit qui en vient, du premier terme de ce membre là, & il ſuffit d'effacer le premier terme du dividende d'un membre dès qu'on a trouvé ſon quotient, ou d'écrire o ſous ce premier terme du dividende. Pour faire concevoir cet abregé, on ſe ſervira de la troiſiéme operation du quatriéme exemple.

Le

Le dividende de cette troiſiéme operation avoit pour premier terme $+px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2$, pour ſecond terme $+qx - gnx + fgx$, & pour troiſiéme terme $+r$. En diviſant le premier terme de ce dividende par le premier terme x^2 du diviſeur $x^2 + fx + g$, on a trouvé pour quotient $+p - g - fn + f^2$. Pour abreger, il faut, après avoir trouvé ce quotient, effacer le premier terme du dividende, ou écrire o ſous chaque partie de ce premier terme du dividende. Enſuite il faut multiplier, non le premier terme x^2 du diviſeur, mais les autres termes $+fx + g$ du diviſeur par le quotient $+p - g - fn + f^2$ qu'on vient de trouver, & retrancher le produit que l'on trouve, des deux autres termes du dividende, & en écrire les reſtes ſous ces deux autres termes du dividende, comme dans la troiſiéme operation du quatriéme exemple.

La raiſon de cet abregé eſt évidente; car le produit du quotient, qu'on vient de trouver pour un membre de la diviſion, par le premier terme du diviſeur, doit être exactement le premier terme même du dividende de ce membre de la diviſion. Ainſi pour ôter ce produit égal au premier terme du dividende, de ce premier terme du dividende, il n'y a qu'à effacer ce premier terme, ou écrire o au deſſous pour le reſte, puiſque ce premier terme — un produit qui lui eſt égal, eſt o.

3.

Quand le premier terme du dividende eſt complexe, & le premier terme du diviſeur incomplexe, le quotient ſe trouve ſans difficulté, comme on l'a pû voir dans les exemples, & ſur-tout dans celui de la Remarque precedente. Mais quand le premier terme du dividende eſt complexe, & que le premier terme du diviſeur eſt auſſi complexe, il peut y avoir des cas où l'on ne trouve pas tout d'un coup le quotient. Pour faire concevoir plus clairement la methode de trouver le quotient dans ces cas, on ſe ſervira d'un exemple où le premier terme du dividende ordonné par rapport à la lettre x, eſt la grandeur complexe $+20a^2x^2 + 2abx^2 - 6b^2x^2$, & le premier terme du

A

$$\begin{array}{l} 20a^2x^2 - 5ac^2x - c^2d^2 \\ +2abx^2 - 3bc^2x \\ -6b^2x^2 + 4ad^2x \\ \qquad -2bd^2x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} +4ax - c^2 \\ -2bx \\ \hline \end{array} \right.$$

diviſeur eſt auſſi la grandeur complexe $+ 4ax - 2bx$. Comme on ne voit pas d'abord quel eſt le quotient du premier terme du dividende par le premier terme du diviſeur, voici les methodes qu'il faut ſuivre.

1°. Il faut voir ſi l'on ne pourroit point ordonner le dividende & le diviſeur par rapport à une même lettre differente de celle qu'on a priſe, qui donnât pour premier terme du diviſeur une grandeur incomplexe, il n'importe pas que cette lettre, qui donnera pour premier terme du diviſeur une grandeur incomplexe, donne pour le premier terme du dividende une grandeur complexe, & même celle qui donnera pour premier terme du dividende une grandeur complexe qui aura plus de parties, rendra le calcul de la diviſion plus court.

Dans cet exemple, en prenant a, ou b, ou, c, pour ordonner le dividende & le diviſeur, on rendra incomplexe le premier terme du diviſeur, & il n'importeroit pas laquelle prendre. Mais en prenant la lettre c pour ordonner le dividende & le diviſeur, on rend le premier terme du diviſeur incomplexe, qui eſt ce que l'on cherche, & on rend en même temps le premier terme du dividende complexe, ce qui rendra la diviſion plus courte. C'eſt pourquoi il faut ordonner le dividende & le diviſeur, par rapport à la lettre c, comme on le voit ici, où l'on a écrit la lettre c la premiere pour la diſtinguer.

$$\begin{array}{l} -5axc^2 + 20a^2x^2 \\ \quad 0 \\ -3bxc^2 + 2abx^2 \\ \quad 0 \\ -d^2c^2 - 6b^2x^2 \\ \quad 0 \\ + 4ad^2x \\ - 2bd^2x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -c^2 + 4ax \\ \quad - 2bx \\ \hline + 5ax + 3bx + d^2 \end{array} \right.$$

L'on dira enſuite, le quotient du premier terme $-5axc^2 - 3bxc^2 - d^2c^2$ du dividende par le premier terme $-c^2$ du diviſeur eſt $+5ax + 3bx + d^2$. Il faut écrire cette grandeur complexe au quotient, & marquer o ſous chaque partie du premier terme du dividende *par la 2e Remarque*; puis multiplier les termes du diviſeur, excepté le premier, par ce quotient, & retrancher le produit $+20a^2x^2 - 10abx^2 + 12abx^2 - 6b^2x^2 + 4ad^2x - 2bd^2x$, du dividende, & comme il ne reſte rien, la diviſion eſt achevée, & le quotient eſt exact.

2°. On peut auſſi, ſans changer les termes du dividende & du diviſeur, qui ſont ordonnez par rapport à la lettre x, trouver par parties le quotient du premier terme $+ 20a^2x^2 + 2abx^2 - 6b^2x^2$ du dividende, diviſé par le premier terme $+ 4ax - 2bx$ du diviſeur, de cette maniere. Il faut regarder le premier terme $+ 20a^2x^2 + 2abx^2 - 6b^2x^2$, comme un dividende total d'une diviſion qu'on fera à part, & le premier terme $+ 4ax - 2bx$ du diviſeur, comme le diviſeur total de ce dividende; & choiſir une des lettres qu'ils contiennent, comme a ou b differente de x, pour ordonner le dividende & le diviſeur; & il en faut toujours choiſir une qui donne une grandeur incomplexe pour le premier terme

$$\begin{array}{l} + 20x^2a^2 + 2bx^2a - 6b^2x^2 \\ \quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \\ \qquad + 12bx^2a \\ \qquad\quad 0 \end{array} \left(\begin{array}{l} + 4xa - 2bx \\ + 5xa + 3bx \end{array} \right.$$

de ce diviſeur. En choiſiſſant a, on aura le dividende & le diviſeur ordonnez, comme on le voit ici. Puis on dira le quotient du premier terme $+ 20x^2a^2$ du dividende diviſé par le premier terme $+ 4xa$ du diviſeur, eſt $+ 5xa$; il faut écrire $+ 5xa$ au quotient; effacer le premier terme du dividende, ou écrire o au deſſous; puis dire $+ 5xa \times - 2bx = - 10bx^2a$; mais pour ôter $- 10bx^2a$, il en faut changer le ſigne, & l'on aura $+ 10bx^2a$; & dire $+ 2bx^2a + 10bx^2a$ qui en eſt retranché, le reſte (qui eſt ici une addition) eſt $+ 12bx^2a$: il faut écrire o ſous $+ 2bx^2a$, & écrire au deſſous le reſte $+ 12bx^2a$.

Enſuite il faut dire, en continuant la diviſion, $+ 12bx^2a$, diviſé par $+ 4xa$, a pour quotient $+ 3bx$, il faut écrire $+ 3bx$ au quotient, écrire o ſous $+ 12bx^2a$ du dividende, & dire $+ 3bx \times - 2bx = - 6b^2x^2$; mais pour ôter $- 6b^2x^2$, il faut en changer le ſigne, & l'on aura $+ 6b^2x^2$, & dire $- 6b^2x^2$ du divende $+ 6b^2x^2$, qui en eſt retranché, le reſte eſt o, il faut écrire o ſous $- 6b^2x^2$.

Cette diviſion faite à part, étant ſans reſte, fait découvrir que le quotient du premier terme $+ 20a^2x^2 + 2abx^2$

$-6b^2x^2$ du dividende total marqué par A, par le premier terme $+4ax-2bx$ du diviſeur, eſt $+5ax+3bx$. Ainſi il

$$A\left\{\begin{array}{l} +20a^2x^2-5ac^2x-c^2d^2 \\ \quad 0\qquad\quad 0 \\ +2abx^2-3bc^2x \\ \quad 0\qquad\quad 0 \\ -6b^2x^2+4ad^2x \\ \quad 0\quad -2bd^2x \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} +4ax-c^2 \\ -2bx \\ \hline +5ax \\ +3bx \end{array}\right.$$

faut écrire o ſous les grandeurs du premier terme du dividende ; multiplier le ſecond terme $-c^2$ du diviſeur par le quotient $+5ax+3bx$, & ôter le produit $-5ac^2x-3bc^2x$ du ſecond terme du dividende, & le reſte ſera $+4ad^2x-2bd^2x-c^2d^2$, qu'il faut continuer de diviſer par le diviſeur $+4ax-2bx-c^2$.

Mais comme le premier terme du diviſeur $+4ax-2bx$ eſt complexe, & que le premier terme $+4ad^2x-2bd^2x$ du dividende eſt auſſi complexe, il faut trouver le quotient par la premiere ou par la ſeconde methode qu'on vient d'expliquer : la premiere étant plus facile que la ſeconde, on va appliquer la ſeconde (pour la mieux faire concevoir) à trouver ce quotient.

Il faut conſiderer $+4ad^2x-2bd^2x$ comme un dividende total d'une diviſion qu'on fera à part, & $+4ax-2bx$, comme en étant le diviſeur total, & on ordonnera l'un & l'autre, par rapport à la lettre a ou b differente de x, & il n'importe pas laquelle ; on prendra ici la lettre b, & le dividende & le diviſeur ſeront ordonnez comme on le voit ici. Et l'on dira, le quotient du premier terme $-2d^2xb$ du dividende par le premier terme $-2xb$ du diviſeur, eſt $+d^2$, il faut écrire d^2 au quotient, écrire o ſous $-2d^2xb$ du dividende ; multiplier $+d^2$ par $+4ax$, en retrancher le produit $+4ad^2x$, du dividende $+4ad^2x$: & comme il ne reſte rien, il faut écrire o ſous $+4ad^2x$ du dividende.

$$\begin{array}{l} -2d^2xb+4ad^2x \\ \quad 0\qquad\quad 0 \end{array}\left(\begin{array}{l} -2xb+4ax \\ \hline +d^2 \end{array}\right.$$

Cette diviſion ſans reſte, faite à part, fait connoître que

le quotient du premier terme $+ 4ad^2x - 2bd^2x$ du dividende, qu'on diviſoit avant cette diviſion faite à part, par le premier terme $+ 4ax - 2bx$ du diviſeur, eſt $+ d^2$. Ainſi il faut écrire o ſous chacune des grandeurs $+ 4ad^2x - 2bd^2x$ du premier terme de cette diviſion dans le dividende A; multiplier $+ d^2$ par $- c^2$, & en retrancher le produit

$$A \left\{ \begin{array}{lll} + 20a^2x^2 & - 5ac^2x & - c^2d^2 \\ \quad o & \quad o & \quad o \\ + 2abx^2 & - 3bc^2x & \\ \quad o & \quad o & \\ - 6b^2x^2 & + 4ad^2x & \\ \quad o & \quad o & \\ & - 2bd^2x & \\ & \quad o & \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + 4ax - c^2 \\ - 2bx \\ \hline + 5ax + d^2 \\ + 3bx \end{array} \right.$$

$- c^2d^2$ du dernier terme $- c^2d^2$ du dividende; & comme il ne reſte rien, il faut écrire o ſous $- c^2d^2$ du dividende. La diviſion totale eſt achevée, & le quotient qu'on a trouvé eſt exact.

4.

Quand il y a quelque lettre dans le premier terme du diviſeur qui n'eſt pas dans le dividende, il eſt clair que la diviſion ne ſçauroit ſe faire ſans fraction, comme auſſi quand il y a quelque lettre qui a plus de dimenſions dans le premier terme du diviſeur, que la même lettre n'en a dans le dividende.

SECTION V.

Où l'on explique la compoſition ou la formation des Puiſſances des grandeurs entieres.

DEFINITION I.

143. ON a déja dit * que les produits $1a$, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, &c. qui viennent de la multiplication d'une grandeur quelconque a par l'unité, & enſuite de la grandeur a par elle-même, * 89.

puis du produit a^2 par a, du produit a^3 par a, & ainſi de ſuite à l'infini, s'appellent *les puiſſances* de cette grandeur. $1a$, qu'on peut auſſi marquer ainſi $1a^1$ ou a^1, eſt la premiere *puiſſance*, ou *la puiſſance lineaire* de a; a^2 la 2e *puiſſance*, qu'on nomme auſſi *le quarré* de a; a^3 la 3e puiſſance qu'on nomme auſſi *le cube* de a; a^4, la 4e puiſſance; a^5, la 5e puiſſance, & ainſi de ſuite à l'infini. Les nombres 1, 2, 3, 4, &c. que l'on met à droite de a, un peu au deſſus, s'appellent *les Expoſans* des puiſſances de a; ainſi 1 eſt l'expoſant de la premiere puiſſance; 2, celui de la 2e puiſſance; 3 eſt l'expoſant de la 3e puiſſance, & ainſi des autres. On dit auſſi que ces expoſans marquent *les degrez* des puiſſances, & ainſi a^1 eſt la puiſſance de a du premier degré; a^2 la puiſſance de a du 2e degré; Il en eſt de même des autres.

2e DEFINITION.

144. UNE grandeur lineaire, ou d'une ſeule dimenſion, eſt toute élevée à la puiſſance que marque l'expoſant, lorſque cet expoſant eſt écrit au haut de cette grandeur à la droite. Ainſi a^7 eſt la grandeur a élevée à la 7e puiſſance. Mais quand la grandeur eſt de pluſieurs dimenſions, comme ab, $abbc$, ou quand elle eſt complexe, comme $a+b$; a^2+bd; & que ſans l'élever à une puiſſance, par exemple à la 3e, on veut cependant marquer qu'elle y eſt élevée; on tire une ligne ſur cette grandeur qui la couvre, & l'on écrit à l'extremité de cette ligne, vers la droite, l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut marquer que cette grandeur eſt élevée. Ainſi $\overline{ab}^3$; $\overline{abbc}^3$; $\overline{a+b}^3$; $\overline{a^2+b^2}^3$; expriment qu'on conçoit chacune de ces grandeurs élevée à la 3e puiſſance.

3e DEFINITION.

145. UNE puiſſance peut être au numerateur ou au dénominateur d'une fraction, & l'on peut concevoir une oppoſition entre les deux places du numerateur & du dénominateur d'une fraction. Le ſigne —, devant l'expoſant d'une puiſſance, marque cette oppoſition de place; c'eſt à dire, le ſigne — devant l'expoſant d'une puiſſance, marque que cette puiſſance eſt dans celle des deux places du numerateur ou du dénominateur, qui eſt oppoſée à la place où elle eſt écrite. Ainſi

dans $\frac{a^{-5}}{1}$, le ſigne — devant l'expoſant 5 de la puiſſance 5e de a écrite au numerateur, marque que a^5 doit être conçue au dénominateur, c'eſt à dire $\frac{a^{-5}}{1} = \frac{1}{a^5}$. De même dans $\frac{1}{a^{-5}}$ le ſigne — marque que la puiſſance a^5, qui eſt écrite au dénominateur, doit être conçue dans la place oppoſée, c'eſt à dire au numerateur, & que $\frac{1}{a^{-5}} = \frac{a^5}{1}$. Ainſi $a^3b^{-2} = \frac{a^3}{b^2}$.

$a^{-3}b^{-2} = \frac{1}{a^3b^2}$. $\frac{b^{-2}}{a^{-3}} = \frac{a^3}{b^2}$.

Le ſigne + devant l'expoſant d'une puiſſance, lequel ſigne ne s'exprime point, & qui eſt toujours ſous-entendu, ne marque aucune oppoſition entre les deux places du numerateur, ou du dénominateur, mais ſimplement que la puiſſance, qui a ſon expoſant poſitif, eſt dans la place où elle ſe trouve, ſoit du numerateur, ſoit du dénominateur.

COROLLAIRE.

146. CETTE diſtinction d'expoſans poſitif & négatif fournit le moyen de donner differentes expreſſions aux puiſſances des grandeurs ſans changer leur valeur, ce qui eſt d'uſage dans le calcul. Par exemple $a^{5-2} = \frac{a^5}{a^2} = {}^*a^3$. $a^3b^{-2} = \frac{a^3}{b^2}$. $a^{5-4} = {}^*a^1$. $a^{-1} = \frac{1}{a}$. $\frac{1}{b^{-1}} = b^1 = b$, &c. *138. *138.

4e DEFINITION.

147. ON peut exprimer la puiſſance quelconque d'une grandeur, dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque, d'une maniere generale, en prenant une lettre pour expoſant. Par exemple, ſuppoſant que n repréſente un nombre entier quelconque, en y comprenant l'unité; a^n ſignifie la grandeur a élevée à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt tel nombre entier qu'on voudra, repréſenté par l'indeterminée n. On rend cette expreſſion déterminée en ſubſtituant un nombre entier quelconque à la place de n. Par exemple ſi l'on veut que a^n repréſente la troiſiéme puiſſance de a, il faut écrire a^3, &c. a^{-n} repréſentera de même une puiſſance quelconque de a, dont l'expoſant eſt un nombre entier négatif, quelque ſoit ce nombre entier.

Le calcul des puiſſances d'une même grandeur par le moyen des expoſans, lorſqu'ils ſont des nombres entiers poſitif ou négatif.

LA MULTIPLICATION.

148. POUR multiplier la puiſſance d'une grandeur par une puiſſance de la même grandeur, il faut ſimplement écrire la ſomme des deux expoſans au haut de cette grandeur vers la droite, & ce ſera le produit.

Par exemple, pour multiplier, 1°, a^2 par a^3, il faut écrire $a^{2+3} = a^5$ pour le produit. De même, 2°, pour multiplier a^5 par
*138. a^{-3}, ou a^{-3} par a^5, il faut écrire pour le produit $a^{5-3} = *\ a^2$. 3°, pour multiplier a^{-2} par a^{-3}, il faut écrire pour le produit $a^{-2-3} = a^{-5}$ En general, pour multiplier, 1°, a^n par a^m, il faut écrire pour le produit a^{n+m}. 2°. Pour multiplier a^m par a^{-p}, ou a^{-p} par a^m, il faut écrire pour le produit a^{m-p}. 3°. Pour multiplier a^{-m} par a^{-p}, il faut écrire pour le produit a^{-m-p}.

*88 & 89. *Demonſtration*, 1°. a^2, par exemple, eſt la même choſe que aa, & $a^3 = aaa$ Or le produit de aa, par aaa, eſt * $aaaaa = a^{2+3} = a^5$. Et il eſt évident que c'eſt la même choſe, quelques nombres entiers poſitif repréſentez par m & p que puiſſent être les expoſans des deux puiſſances d'une même grandeur, qui ſont multipliées l'une par l'autre. Par conſequent en donnant pour expoſant à la grandeur a, la ſomme des expoſans, ce ſera le produit des deux puiſſances.

*117 *145. *123 *145. *138. 2°. $a^5 = *\frac{a^5}{1}$, & $a^{-3} = *\frac{1}{a^3}$. Or $\frac{a^5}{1} \times \frac{1}{a^3} = *\frac{a^5 \times 1}{1 \times a^3} = *\ a^{5-3} = *\ a^2$. Par conſequent $a^5 \times a^{-3} = a^{5-3} = a^2$. Il eſt clair que c'eſt la même choſe, quelques nombres entiers, repréſentez par m & p, que puiſſent être les expoſans des deux puiſſances d'une même grandeur, qui ſont multipliées l'une par l'autre, lorſque l'un de ces expoſans eſt poſitif & l'autre négatif.

*145. *123. *145. 3°. Enfin $a^{-2} = *\frac{1}{a^2}$, & $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Mais pour multiplier $\frac{1}{a^2}$ par $\frac{1}{a^3}$, il faut écrire $*\frac{1}{a^{2+3}} = \frac{1}{a^5} = *\ a^{-2-3} = a^{-5}$. Par conſequent $a^{-2} \times a^{-3} = a^{-2-3} = a^{-5}$. Il eſt évident que c'eſt la même choſe, quelques nombres entiers négatif, repréſentez par $-m$ & $-p$, que puiſſent être les expoſans

expoſans des deux puiſſances d'une même grandeur qui ſont multipliées l'une par l'autre.

LA DIVISION.

149. POUR diviſer la puiſſance d'une grandeur par une puiſſance de la même grandeur, il faut ôter l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende, & écrire au haut de cette grandeur vers la droite, la difference des deux expoſans, & ce ſera le quotient.

Pour diviſer, 1°, a^5 par a^3, il faut ôter l'expoſant 3 du diviſeur de l'expoſant 5 du dividende, & écrire leur difference $5 - 3$ pour l'expoſant du quotient, qui ſera $a^{5-3} = a^2$. 2°. Pour diviſer a^5 par a^{-3}; il faut retrancher l'expoſant -3 du diviſeur, de l'expoſant $+5$ du dividende, & écrire leur difference $5 + 3$ pour l'expoſant du quotient, qui ſera $a^{5+3} = a^8$. 3°. Pour diviſer a^{-5} par a^{-3}, il faut ôter -3 de -5, & écrire leur difference $-5 + 3$ pour l'expoſant du quotient, qui ſera $a^{-5+3} = a^{-2}$. 4°. De même, pour diviſer a^{-5} par a^{+3}, il faut écrire pour le quotient $a^{-5-3} = a^{-8}$.

En general, pour diviſer, 1°, a^m par a^p, il faut écrire a^{m-p}. 2°. Pour diviſer a^m par a^{-p}, il faut écrire pour quotient a^{m+p}. 3°. Pour diviſer a^{-m} par a^{-p}, il faut écrire a^{-m+p}. 4°. Pour diviſer a^{-m} par a^p, il faut écrire a^{-m-p}.

Démonſtration. 1°. a^5 diviſé par $a^3 = * \frac{a^5}{a^3} = * a^{5-3}$. *105. *145.

2°. $a^5 = \frac{a^5}{1}$, & $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Mais pour diviſer $\frac{a^5}{1}$ par $\frac{1}{a^3}$, il faut écrire $* \frac{a^5 \times a^3}{1 \times 1} = * \frac{a^{5+3}}{1} = a^8$. *124. *117. & 89.

3°. $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$, & $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Mais pour diviſer $\frac{1}{a^5}$ par $\frac{1}{a^3}$, il faut écrire $* \frac{1 \times a^3}{1 \times a^5} = * a^{-5+3} = * a^{-2}$. *124. *145.

4°. Enfin $a^{-5} = * \frac{1}{a^5}$. Et $a^3 = * \frac{a^3}{1}$. Or pour diviſer $\frac{1}{a^5}$ par $\frac{a^3}{1}$, il faut écrire $* \frac{1 \times 1}{a^5 \times a^3} = \frac{1}{a^{5+3}} = * a^{-5-3} = a^{-8}$. *138. *145. *117. *124. *145.

Il eſt évident que c'eſt la même choſe quelques ſoient les deux nombres entiers repréſentez par m & p, qui ſont les expoſans du dividende & du diviſeur, dans tous les cas qu'on vient de démontrer. Ainſi en écrivant la difference, qui eſt

entre l'expoſant du dividende & l'expoſant du diviſeur, pour expoſant de la grandeur a, ce ſera le quotient.

La maniere d'élever la puiſſance donnée d'une grandeur a *à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier donné poſitif ou negatif.*

150. POUR élever la puiſſance d'une grandeur, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif ou negatif, à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif ou négatif, il faut multiplier l'expoſant de la puiſſance à élever, par l'expoſant donné, & écrire la grandeur, en lui donnant pour expoſant, le produit des deux expoſans, avec le ſigne de l'expoſant de la puiſſance à élever quand le ſigne de l'expoſant donné eſt +; avec le ſigne oppoſé à celui de l'expoſant de la puiſſance à élever, quand le ſigne de l'expoſant donné eſt —, & ce ſera la puiſſance qu'on cherche.

1°. Pour élever a^2 à la puiſſance 3e, dont l'expoſant eſt 3, il faut multiplier 2 par 3, & écrire $a^{2\times 3} = a^6$ pour la puiſſance qu'on cherche.

2°. Pour élever a^{-2} à la puiſſance 3e, dont l'expoſant donné eſt + 3, il faut écrire, pour la puiſſance qu'on cherche, $a^{-2\times 3} = a^{-6}$.

3°. Pour élever a^2 à la puiſſance dont l'expoſant donné eſt — 3, il faut écrire $a^{2\times -3} = a^{-6}$.

4°. Pour élever a^{-2} à la puiſſance dont l'expoſant donné eſt — 3, il faut écrire $a^{-2\times -3} = a^6$.

En general, 1°, pour élever a^m à la puiſſance p, il faut écrire a^{mp}.

2°. Pour élever a^{-m} à la puiſſance p, il faut écrire a^{-mp}.

3°. Pour élever a^m à la puiſſance $-p$, il faut écrire a^{-mp}.

4°. Enfin pour élever a^{-m} à la puiſſance $-p$, il faut écrire $a^{-m\times -p} = a^{mp}$.

Quand les expoſans ſont des grandeurs complexes, le calcul ſe fait de la même maniere. Par exemple, pour élever a^m à la puiſſance $-p+q$, il faut écrire a^{-mp+mq}. De même pour élever a^{m-n} à la puiſſance $p-q$; il faut écrire $a^{\overline{m-n}\times\overline{p-q}} = a^{mp-np-mq+nq}$.

Quand l'un des expoſans eſt un nombre, & l'autre une grandeur litterale, le calcul ſe fait de la même maniere. Par exemple, pour élever a^m à la puiſſance 2e, 3e, 4e, &c. il faut écrire a^{2m}, a^{3m}, a^{4m}, &c.

Démonſtration. 1°. $a^2 \times a^2 \times a^2$ eſt * a^3 élevée à la puiſſance 3e. Et il eſt clair que $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2\times 3} = a^6$. 2°. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, or pour élever $\frac{1}{a^2}$ à la puiſſance 3e, il faut multiplier $\frac{1}{a^2}$ deux fois par elle-même, ce qui donne $\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2}$ = * $\frac{1}{a^{2\times 3}}$ = * $a^{-2\times 3} = a^{-6}$. * 89. * 123.

Dans le 3e & le 4e cas, dans leſquels l'expoſant de la puiſſance 3e, à laquelle on veut élever a^2 & a^{-2}, eſt negatif, c'eſt à dire — 3; le ſigne —, qui précede cet expoſant 3, marque que le ſigne de l'expoſant de la puiſſance qu'on cherche doit * être oppoſé au ſigne de l'expoſant de a^{+2} ou a^{-2} qui doit être élevée à la puiſſance — 3. Ainſi dans le 3e & 4e cas, il faut multiplier l'expoſant + 2 ou — 2 de la puiſſance à élever a^2 ou a^{-2} par l'expoſant donné 3 de la puiſſance à laquelle on veut élever a^2, & le produit + 2 × 3 = 6 ou — 2 × 3 = — 6, eſt l'expoſant qu'il faut donner à la grandeur a pour l'élever à la puiſſance qu'on cherche, comme on vient de le faire voir dans le premier & le ſecond cas; mais il faut que le ſigne + ou —, qui le doit preceder, ſoit oppoſé * à celui de l'expoſant de la puiſſance à élever, qui eſt a^2 ou a^{-2}. D'où l'on voit que pour élever a^2 à la puiſſance — 3, il faut écrire a^{-6}; & que pour élever a^{-2} à la puiſſance — 3, il faut écrire a^6. * 145. * 145. * 145.

Il eſt évident que la même démonſtration convient à toute puiſſance d'une grandeur quelconque a, dont l'expoſant eſt un nombre entier m, qu'on veut élever à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier donné repréſenté par p, quelques ſignes + ou — que puiſſent avoir les deux expoſans.

On verra ci-aprés, *article* 200, quand on a une puiſſance donnée faite d'une autre puiſſance moindre, la maniere de trouver cette autre puiſſance.

REMARQUES.

I.

Ce calcul des puiſſances d'une même grandeur par le

moyen des expoſans, eſt de grand uſage dans la réſolution des Problêmes les plus compoſez ; les expreſſions generales des expoſans des puiſſances ſont découvrir d'une maniere facile, ſimple & qui n'embaraſſe point l'imagination, dans la réſolution d'un ſeul Problême, la réſolution d'une infinité d'autres, qui ſe trouvent compris ſous l'expreſſion generale de cette reſolution. Cet uſage doit porter les Commençans à ſe rendre ce calcul très familier.

2.

151. On fait l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des puiſſances de differentes grandeurs de la même maniere qu'on les fait des autres grandeurs litterales ; $a^m + b^n$ eſt la ſomme de a^m & de b^n ; $a^m - b^n$ eſt leur difference ; $a^m b^n$, eſt leur produit ; $\frac{a^m}{b^n} = * a^m b^{-n}$ eſt le quotient de a^m diviſée par b^n.

*145.

3.

152. Quand les puiſſances, dont les expoſans ſont des lettres, doivent être les termes d'une grandeur complexe, on doit prendre garde que tous les termes ſoient homogenes ; c'eſt à dire, le nombre ou la ſomme des dimenſions d'un terme doit être égal au nombre des dimenſions de chaque autre terme. En voici quelques exemples pour y accoutumer les Commençans. Dans la grandeur complexe $a^{m+n} - a^m b^n$, les deux termes ont chacun le même nombre de dimenſions exprimé par $m + n$. Dans $a^n + a^{n-m} b^m$, le terme $a^{n-m} b^m$ a le même nombre de dimenſions que a^n. Car le nombre des dimenſions de $a^{n-m} b^m$ eſt exprimé par la ſomme des expoſans $n - m + m = n$. Ces deux exemples ſuffiſent pour faire voir comment la ſomme des dimenſions d'un terme peut être égale à la ſomme des dimenſions d'un autre terme. Quand les termes ne ſont pas homogenes, on y peut ſuppléer, en prenant une des lettres pour l'unité, & faiſant en ſorte que les dimenſions de l'unité ſuppléent à celles qui manquent à quelques termes pour les rendre tous homogenes. Par exemple, ſi l'on avoit $a^n - b^p + c^{-q}$, on pourroit rendre tous ces termes homogenes, en prenant a pour l'unité, en écrivant $a^n - a^{n-p} b^p + a^{n+q} c^{-q}$; car il eſt évident que

la ſomme des dimenſions de chaque terme eſt, dans cette expreſſion, égale à n, & le produit de l'unité & des puiſſances de l'unité par une grandeur quelconque, ne changeant point la valeur de cette grandeur, la ſeconde expreſſion où les termes ſont homogenes, a la même valeur que la premiere expreſſion dans laquelle ils ne l'étoient pas.

5e DEFINITION.

153. LA grandeur quelconque a, qui étant multipliée par elle-même a pour produit ſon quarré a^2, s'appelle la *racine quarrée*, ou *la racine* 2e de a^2. a eſt la racine cubique, ou 3e de a^3. ab eſt la racine 4e de a^4b^4. a^3 eſt la racine 3e de $a^9 = a^3 \times a^3 \times a^3$, &c.

Pour exprimer les racines, on ſe ſert des deux marques ſuivantes, 1°, de la marque $\surd$ qu'on nomme *le ſigne radical*, & l'on écrit au deſſus en petit caractere le nombre qui marque ſi c'eſt la racine 2e, 3e, 4e, &c. d'une puiſſance, de cette maniere. $\sqrt[3]{a^3}$ marque la racine 3e de a^3. Ainſi $\sqrt[3]{a^3} = a$. Quand on marque la racine quarrée, on ne met point d'ordinaire le nombre 2 ſur le ſigne radical $\surd$. Ainſi $\surd a^4$ marque la racine 2e de a^4 qui eſt a^2. Le nombre qu'on écrit ſur le ſigne radical, pour exprimer qu'elle eſt la racine qu'on veut marquer, s'appelle l'*expoſant* de la racine. Ainſi dans $\sqrt[3]{a^6}$, le nombre 3 écrit ſur le ſigne radical, s'appelle l'expoſant de la racine 3e de a^6 qui eſt a^2.

Quand on veut marquer la racine d'une grandeur complexe, on écrit le ſigne radical au devant de la grandeur complexe vers la gauche, avec l'expoſant au deſſus qui détermine qu'elle eſt racine, & l'on tire une ligne du haut du ſigne radical qui couvre toute la grandeur complexe dont on veut exprimer la racine. Ainſi $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ exprime la racine 3e ou cubique de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Il faut bien remarquer que la grandeur qui eſt ſous le ſigne radical eſt ſuppoſée la puiſſance qui auroit pour expoſant le même nombre qui ſert d'expoſant au ſigne radical. Ainſi dans l'expreſſion $\sqrt[3]{a^3}$, la grandeur a^3, qui eſt ſous le ſigne radical, eſt ſuppoſée une troiſiéme puiſſance dont on exprime la racine 3e par le ſigne radical $\sqrt[3]{}$. De même dans

$\sqrt[4]{b}$, on regarde b comme une quatriéme puiſſance, dont $\sqrt[4]{b}$ exprime la racine 4e. D'où l'on voit que a étant la racine 3e de a^3, il ne faut pas écrire $\sqrt[3]{a}$, mais ſimplement a pour la racine 3e de a^3; car $\sqrt[1]{a}$ ſignifie la racine 3e de a conſiderée comme repréſentant une grandeur élevée à la 3e puiſſance.

On ſe ſert, 2°, des fractions numeriques pour marquer les racines des puiſſances. Dans cette ſeconde maniere d'exprimer les racines, on n'employe point le ſigne $\surd$; mais on marque ces racines comme les expoſans des puiſſances, en écrivant vers la droite au haut de la puiſſance, dont on veut marquer la racine, une fraction dont le numerateur eſt l'unité, & dont le dénominateur eſt 2, ſi l'on veut exprimer la racine 2e, 3 ſi l'on veut exprimer la racine 3e, & ainſi des autres.

Par exemple, pour marquer la racine 2e de la grandeur a regardée comme une 2e puiſſance, on écrit $a^{\frac{1}{2}}$. Pour marquer la racine 3e, on écrit $a^{\frac{1}{3}}$; pour marquer la racine 5e, on écrit $a^{\frac{1}{5}}$. De même $\overline{r^2 - x^2}^{\frac{1}{2}}$ exprime la racine 2e de le grandeur complexe $r^2 - x^2$. Il en eſt de même des autres.

Quand la puiſſance dont on veut exprimer la racine a déja un expoſant qui eſt un nombre entier, on fait ce nombre entier le numerateur du nouvel expoſant de la racine, & on écrit deſſous pour dénominateur, le nombre 2, ſi c'eſt la racine 2e que l'on veut exprimer; 3, ſi c'eſt la racine 3e, & ainſi des autres.

Par exemple $a^{\frac{3}{2}}$ exprime la racine 2e de a^3; $\overline{r^2 - x^2}^{\frac{5}{2}}$ exprime la racine 2e de la 5e puiſſance de la grandeur complexe $r^2 - x^2$. De même $\overline{x - b}^{\frac{5}{3}}$ exprime la racine 3e de la 5e puiſſance à laquelle on ſuppoſe que la grandeur complexe $x - b$ eſt élevée.

Les grandeurs qui ſont les racines des puiſſances, étant

exprimées de la maniere qu'on vient d'expliquer, ſont regardées comme *des puiſſances dont les expoſans ſont des nombres rompus*, c'eſt à dire, ſont des fractions. Ainſi $a^{\frac{2}{3}}$ eſt regardée comme une puiſſance dont l'expoſant eſt la fraction $\frac{2}{3}$.

Lorſque ces expoſans ſont négatifs, cela exprime que la racine eſt dans le dénominateur. Par exemple $\overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$ exprime cette fraction $\frac{1}{\overline{r^2 - x^2}^{\frac{1}{2}}}$. De même $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. De la même maniere $a^{-\frac{1}{2}} b^4 = \frac{b^4}{a^{\frac{1}{2}}}$.

REMARQUES.

CETTE maniere d'exprimer les racines comme des puiſſances, dont les expoſans ſont des nombres rompus, a donné lieu de multiplier & de diviſer les différentes racines d'une même grandeur, à la façon des puiſſances dont les expoſans ſont des nombres entiers, par l'addition & la ſouſtraction de leurs expoſans; comme auſſi d'élever ces racines à telle puiſſance qu'on veut en multipliant les expoſans de ces racines conſiderées comme puiſſances, par l'expoſant de la puiſſance à laquelle on les veut elever. On démontrera en ſon lieu ce calcul des puiſſances dont les expoſans ſont des nombres rompus.

PROBLÈME.

A

154. $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ &c. $\frac{1}{a^7} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot a^0$ ou $1 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7$. &c.

B

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ &c. $a^{-7} . a^{-6} . a^{-5} . a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . a^0$. ou $1 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7$. &c.

Si l'on écrit a^0 qui eſt priſe pour l'unité, c'eſt à dire que a^0 repréſente l'unité, & vers la droite les puiſſances poſitives priſes de ſuite d'une grandeur quelconque a, dont les expoſans ſont les nombres entiers pris de ſuite; & vers la gauche

les mêmes puiſſances de a au dénominateur d'autant de fractions, en donnant l'unité à chacune pour numerateur, comme
*145. dans l'expreſſion A; ou, * ce qui revient au même, ſi l'on écrit vers la gauche de a^0, qui eſt priſe pour l'unité, les puiſſances négatives de a priſes de ſuite, comme dans l'expreſſion B. Toutes ces puiſſances de a ſont une progreſſion geometrique; le même rapport, qui regne dans la progreſſion, c'eſt à dire, le rapport de chacun des termes à celui qui le ſuit immédiatement vers la droite, eſt le rapport de 1 à a; & en allant de la droite vers la gauche, c'eſt le rapport de a à 1. Les expoſans de ces puiſſances pris de ſuite, ſont une progreſſion arithmetique, & l'unité eſt la difference qui regne dans cette progreſſion. 0, qui eſt l'expoſant de l'unité ou de a^0, eſt le terme de la progreſſion arithmetique qui ſe trouve entre les expoſans poſitifs & les negatifs.

Démonſtration. 1°. *Par rapport aux puiſſances dont les expoſans ſont les nombres entiers poſitifs pris de ſuite.* Pour avoir le rapport geometrique d'un terme à celui qui le ſuit, il faut diviſer le
*115. premier par le ſecond, & * le quotient en exprimera le rapport. Ainſi en commençant par l'unité le rapport de 1 à a^1 eſt $\frac{1}{a}$. Le rapport de a^1 à a^2, eſt $\frac{a^1}{a^2} = \frac{1}{a}$, & ainſi de ſuite; car le terme ſuivant vers la droite, contenant un $1a$ de plus que celui qui le precede, le rapport d'un terme à celui qui le
*109. ſuit, ſe réduira toujours à * $\frac{1}{a}$.

2°. *Pour les puiſſances dont les expoſans ſont negatifs.* Les termes qui ſont à la gauche de 1 ou a^0, dans l'expreſſion A, ont tous l'unité pour numerateur, ainſi les numerateurs ſont
*121. égaux; par conſequent * le rapport de chacun de ces termes, à celui qui le ſuit immédiatement, eſt égal au rapport des dénominateurs, en les prenant dans un ordre renverſé;
*109. par exemple, $\frac{1}{a^7} . \frac{1}{a^6} :: a^6 . a^7 :: * 1 . a$. Mais il eſt évident qu'en prenant ainſi deux dénominateurs voiſins, dans un ordre renverſé, l'un a toujours $1a$ de plus que l'autre; ainſi, dans la progreſſion geometrique A, en allant de la gauche à la droite, le rapport de deux termes voiſins ſe réduira toujours à $\frac{1}{a}$; &
*124. celui du terme $\frac{1}{a}$ à 1 ou à $\frac{1}{1}$, ou à $a^0 = 1$, * eſt auſſi égal à $\frac{1}{a}$. Mais en allant de la droite à la gauche, le rapport de deux termes voiſins ſera égal à $\frac{a}{1}$, qui eſt l'inverſe de $\frac{1}{a}$.

3°. *Pour*

3° *Pour la progreſſion arithmetique des expoſans.* Les expoſans pris de ſuite de la gauche à la droite, dans l'expreſſion B, ſont, 1°, les nombres naturels, avec le ſigne —, qui diminuent d'une unité d'un terme à celui qui le ſuit, juſqu'à zero qui eſt l'expoſant de l'unité, 2°, les expoſans depuis zero vers la droite ſont les nombres naturels 1, 2, 3, &c. avec le ſigne +, qui augmentent d'une unité d'un terme à celui qui le ſuit; d'où l'on voit clairement qu'en ôtant un expoſant quelconque de l'expoſant qui le ſuit vers la droite, la difference eſt 1; par conſequent les expoſans ſont une progreſſion arithmetique, & la difference de chacun des termes à ſon voiſin eſt 1.

COROLLAIRE I.

155. DANS la progreſſion des puiſſances d'une grandeur quelconque a^1, dont les expoſans ſont des nombres entiers poſitifs, la 2e puiſſance occupe le ſecond rang depuis l'unité non compriſe; ſa 3e puiſſance, le 3e rang; ſa 4e puiſſance, le 4e, & ainſi de ſuite; c'eſt à dire qu'une puiſſance quelconque poſitive de a^1 occupe, dans la progreſſion depuis l'unité non compriſe, le rang qui eſt marqué par le nombre des unitez de ſon expoſant; par exemple, la 10e puiſſance de a occupe le 10e rang depuis l'unité non compriſe. Il en eſt de même des puiſſances negatives; par exemple, la 10e puiſſance a^{-10} de a^{-1} occupe le 10e rang en allant vers la gauche depuis l'unité non compriſe.

COROLLAIRE II.

156. DANS la progreſſion des mêmes puiſſances, a^1 racine 2e de a^2 eſt un moyen proportionnel entre 1 & la puiſſance 2e de a. a^1 racine 3e de a^3 eſt le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & a^3. a^1 racine 4e de a^4 eſt le premier de trois moyens proportionnels entre l'unité & a^4; & ainſi de ſuite: c'eſt à dire, que la racine quelconque d'une puiſſance poſitive eſt le premier d'autant de moyens proportionnels entre 1 & cette puiſſance, qu'il y a d'unitez moins une dans l'expoſant du ſigne radical de cette racine, qui eſt toujours égal à l'expoſant de la puiſſance. Ainſi $\sqrt[10]{a^{10}} = a$ eſt le premier de neuf moyens proportionnels qui ſont entre 1 & a^{10} dixié-

me puiſſance de *a*. Il eſt évident qu'il en eſt de même des racines des puiſſances négatives.

COROLLAIRE III.

157. D'où l'on voit que chercher la puiſſance quelconque d'une grandeur *a*, ou élever cette grandeur à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier, c'eſt ſuppoſer une progreſſion geometrique, dont l'unité eſt le premier terme, & la grandeur *a* le ſecond, & chercher le terme de cette progreſſion, qui occupe le rang depuis l'unité non compriſe, qui eſt marqué par le nombre qui eſt l'expoſant de cette puiſſance; c'eſt à dire le ſecond terme, ſi l'on cherche la 2e puiſſance; le 3e terme, ſi l'on cherche la 3e puiſſance; le 4e terme, ſi l'on cherche la 4e puiſſance, &c.

COROLLAIRE IV.

158. D'où l'on voit auſſi que chercher la racine quelconque d'une puiſſance propoſée, c'eſt ſuppoſer une progreſſion geometrique qui commence par l'unité, & dans laquelle on connoît la puiſſance propoſée, & le rang qu'elle occupe dans la progreſſion par le moyen de l'expoſant donné de cette puiſſance, & chercher le premier d'autant de moyens proportionnels entre l'unité & la puiſſance propoſée que l'expoſant donné de la puiſſance propoſée, qui eſt auſſi l'expoſant du ſigne radical de la racine qu'on cherche, contient d'unitez moins une; c'eſt à dire, un ſeul moyen proportionnel entre l'unité & la puiſſance propoſée, ſi c'eſt la racine 2e; le premier de deux moyens proportionnels entre l'unité & la puiſſance propoſée, ſi l'on cherche la racine 3e; le premier de trois moyens proportionnels entre l'unité & la puiſſance propoſée, ſi c'eſt la racine 4e que l'on cherche, &c.

REMARQUE.

DANS la multiplication & dans la diviſion d'une grandeur donnée par une autre grandeur donnée, on ſuppoſe une proportion dans laquelle trois termes ſont connus, ſçavoir l'unité & les deux grandeurs données, & l'on cherche le quatriéme terme que la multiplication & la diviſion font découvrir; mais quand on veut élever une grandeur donnée *a* à une puiſſance quelconque, ou trouver la racine quelconque

d'une grandeur donnée conſiderée comme la puiſſance de la racine qu'on cherche, on ſuppoſe une progreſſion geometrique qui commence par l'unité, & où il y a deux termes connus, ſçavoir l'unité & la grandeur qu'on veut élever à une puiſſance quelconque, ou bien l'unité & la puiſſance donnée dont on veut trouver la racine; & outre ces deux termes connus on ſçait encore les rangs que doivent occuper dans la progreſſion la puiſſance donnée & ſa racine quelconque; car le rang de la puiſſance eſt connu par le moyen de ſon expoſant; & le rang de la racine eſt le premier qui ſuit l'unité. Cette remarque ſert, quand on s'applique à la Geometrie, à faire appercevoir clairement le rapport des calculs de ce Traité, avec les proportions & les progreſſions des lignes & des figures de la Geometrie, & que ces calculs expriment les proportions & les progreſſions des lignes & des figures, & font découvir les termes que l'on cherche dans les Problêmes de la Geometrie qui appartiennent à ces proportions & progreſſions; & cela ſans embaraſſer les ſens ni l'imagination.

PROBLÊME.

159. *ELEVER une grandeur litterale incomplexe ou complexe à une puiſſance telle qu'elle puiſſe être, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif qui eſt donné.*

Operation. Il faut multiplier la grandeur qu'on veut élever à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif, laquelle grandeur ſera nommée, pour abreger, *la racine*, 1°, par elle-même & le produit ſera la 2e puiſſance. 2°. Il faut multiplier cette ſeconde puiſſance par la racine, & le produit ſera la 3e puiſſance. 3°. Il faut multiplier cette 3e puiſſance par la racine, & l'on aura la 4e puiſſance, & continuer ainſi de multiplier chaque nouveau produit par la racine juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui de la puiſſance à laquelle on vouloit élever la racine. On appellera cette maniere de multiplier une grandeur, & les produits qui naiſſent par ordre de ces multiplications, par cette même grandeur; on la nommera, dis-je, la multiplication continuée ou réiterée de cette grandeur par elle-même. Ainſi pour élever une grandeur à une puiſ-

ſance donnée, il faut la multiplier continuement cette grandeur par elle-même autant de fois que l'expoſant de la puiſſance qu'on demande a d'unitez moins une; c'eſt à dire une fois, ſi l'on veut la 2e puiſſance; deux fois, ſi l'on veut la 3e puiſſance; trois fois, ſi l'on veut l'élever à la 4e puiſſance, &c.

Mais les grandeurs incomplexes pouvant être élevées tout d'un coup à telle puiſſance qu'on voudra, on va mettre par articles la maniere la plus courte de les élever à une puiſſance quelconque.

Pour les grandeurs incomplexes.

1°. QUAND la grandeur incomplexe eſt d'une ſeule dimenſion, * il n'y a qu'à écrire au haut de cette grandeur vers la droite l'expoſant donné, & elle ſera élevée à la puiſſance à laquelle on veut l'élever. Ainſi pour élever a à la 5e puiſſance, il faut écrire a^5. Il en eſt de même des autres.

* 144.

2°. Si la grandeur incomplexe contient pluſieurs lettres qui ſont un produit de pluſieurs dimenſions, mais dans lequel chacune des lettres n'a qu'une dimenſion, il faut écrire au haut de chacune de ces lettres, vers la droite, l'expoſant donné. Par exemple, pour élever abc à la 3e puiſſance, il faut écrire $a^1b^1c^1$ pour la 3e puiſſance de abc.

3°. Lorſque les differentes lettres de la grandeur incomplexe de pluſieurs dimenſions ſont déja toutes ou quelques-unes élevées à des puiſſances dont les expoſans ſont des nombres entiers poſitifs, il faut écrire dans la racine 1 pour l'expoſant de chacune des lettres qui ſont lineaires, s'il y en a, & enſuite multiplier l'expoſant de chacune des lettres differentes de la racine par l'expoſant donné, & écrire pour expoſant de chacune des differentes lettres le produit de ſon expoſant particulier, par l'expoſant donné de la puiſſance à laquelle on veut élever la racine, & la racine ſera élevée à la puiſſance propoſée. Ainſi pour élever $a^2b^1c^5$ à la 3e puiſſance, il faut écrire $a^{2\times3}b^{1\times3}\times c^{5\times3} = a^6b^3c^{15}$. De même pour élever a^3bcd^2 à la 5e puiſſance, il faut écrire 1 pour l'expoſant des grandeurs lineaires b & c, ce qui donnera $a^3b^1c^1d^2$, & écrire pour la 5e puiſſance qu'on demande $a^{3\times5}b^{1\times5}c^{1\times5}d^{2\times5} = a^{15}b^5c^5d^{10}$.

Pour les grandeurs complexes.

1°. *Pour les grandeurs complexes qui n'ont que deux termes qu'on nomme* Binomes.

160. ON ſuppoſera toutes les grandeurs complexes binomes, repréſentées par $a + b$, quand les deux grandeurs incomplexes ſont poſitives; & par $a - b$, quand la ſeconde eſt négative. On multipliera continuement la racine $a + b$ par elle-même, & l'on écrira ſéparément de ſuite les produits les uns ſous les autres, ordonnant * chaque produit par rapport à la lettre a; & la grandeur complexe ſera elle-même la premiere puiſſance; le produit ſuivant ſera la 2e puiſſance; le ſuivant ſera la 3e puiſſance; & ainſi de ſuite, comme on les voit dans la Table qui ſuit. *102.

Table des Puiſſances.

$1 + a$

$1a + 1b$ premiere puiſſance ou racine.

$a^2 + 2ab + b^2$ 2e puiſſ.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 3e puiſſ.

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 4e puiſſ.

$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ 5e puiſſ.

$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ 6e puiſſ.

$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$ 7e puiſſ.

$a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$ 8e puiſſ.

$a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$ 9e puiſſ.

$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$ 10e puiſſ.

Les puiſſances de $a - b$ ſont les mêmes que celles de $a + b$, avec cette ſeule difference que les termes pairs, ſçavoir le 2e, le 4e, le 6e, &c. ſont précedez du ſigne —, * parceque les dimenſions de la grandeur négative $- b$ ſont dans ces termes en nombre impair. *98.

COROLLAIRE I.

161. LA plus haute puiſſance de a eſt ſeule dans le premier terme, & elle diminue d'un degré d'un terme à celui qui le ſuit juſqu'au dernier terme où a ne ſe trouve point. b ne ſe trouve point dans le premier terme; b eſt lineaire dans le ſecond terme, & les puiſſances de b vont enſuite en augmentant

d'un degré d'un terme à celui qui le ſuit juſqu'au dernier terme où eſt la plus haute puiſſance de *b* ſans *a*. Dans chaque terme les puiſſances de *a* & de *b* ſont enſemble autant de dimenſions, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unitez, & tous les termes d'une puiſſance ſont homogenes.

COROLLAIRE II.

162. CHAQUE puiſſance contient autant de termes, & un de plus que l'expoſant de cette puiſſance contient d'unitez. La 2e puiſſance contient trois termes; la 3e contient quatre termes, &c. Le nombre des termes de chaque puiſſance impaire eſt un nombre pair; & le nombre des termes de chaque puiſſance paire, eſt un nombre impair. Ce Corollaire eſt une ſuite évidente du précedent.

COROLLAIRE III.

163. DANS chaque puiſſance le nombre des termes où ſe trouve *b* eſt égal à l'expoſant de la puiſſance; dans la 2e puiſſance, il y a deux termes où eſt *b*; dans la 3e il y en a trois, &c. Il en eſt de même de *a*.

COROLLAIRE IV.

164. EN nommant dans chaque puiſſance les nombres qui précedent chaque terme, *les coefficiens numeriques* de ces terme, le coefficient numerique du premier & du dernier terme eſt l'unité. Le coefficient numerique du ſecond terme eſt toujours égal à l'expoſant de la puiſſance. Ainſi le coefficient numerique du ſecond terme de la 2e puiſſance eſt 2; le coefficient du ſecond terme de la 3e eſt 3, &c. De plus le ſecond terme de chaque puiſſance contient toujours le produit de la puiſſance de *a*, dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que l'expoſant de cette puiſſance, par *b* lineaire, & ce produit eſt multiplié par l'expoſant de la puiſſance; c'eſt à dire, le ſecond terme de la 2e puiſſance eſt $2a \times b$. Le ſecond terme de la 3e puiſſance eſt $3a^2b$; le ſecond terme de la 4e eſt $4a^3b$; le ſecond terme de la 5e eſt $5a^4b$; & ainſi des autres.

COROLLAIRE V.

165. SI l'on ſe rend très familiere la formation des puiſſances de la table, qu'on peut continuer tant qu'on voudra, on verra clairement la raiſon de tous les Corollaires qui préce-

dent; & de plus, 1°, que le coefficient numerique d'un terme quelconque eſt égal à la ſomme du coefficient numerique du terme de la puiſſance précedente qui eſt au deſſus de lui, joint au coefficient numerique du terme de la même puiſſance précedente, qui eſt au deſſus vers la gauche. Par exemple, dans la 5° puiſſance le coefficient 10 du troiſiéme terme eſt égal à la ſomme $6 + 4$ des coefficiens numeriques, qui ſont au deſſus de ce 3° terme, ſçavoir de 6 qui eſt immédiatement au deſſus, & de 4 qui eſt au deſſus vers la gauche. 2°. Que ce coefficient eſt encore égal à la ſomme de tous les coefficiens numeriques qui ſont au deſſus dans la colonne à gauche. Par exemple, le coefficient 10 du troiſiéme terme de la 5° puiſſance eſt égal à $+4+3+2+1$, qui eſt la ſomme de tous les coefficiens numeriques qui ſont au deſſus de ce troiſiéme terme dans la colonne qui le précede vers la gauche. 3°. Que dans chaque puiſſance, les coefficiens de deux termes également éloignez des extremitez ſont égaux. Par exemple, dans la 5° puiſſance le coefficient du ſecond & du cinquiéme terme eſt 5. Le coefficient du troiſiéme & du quatriéme terme eſt 10, &c.

COROLLAIRE VI.

166. DANS chaque puiſſance, en ne prenant point les coefficiens numeriques; mais les ſeules grandeurs litterales des termes, tous les termes pris de ſuite ſont une progreſſion geometrique où le rapport d'un terme à celui qui le ſuit eſt égal au rapport $\frac{a}{b}$. Par exemple, dans la 3° puiſſance les termes $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ a^3.\ a^2b.\ ab^2.\ b^3$ ſont une progreſſion geometrique & le rapport d'un terme à l'autre eſt égal à $\frac{a}{b}$. Car $* \frac{a^3}{a^2b} = \frac{a^2b}{ab^2}$ *109. $= \frac{ab^2}{b^3} = \frac{a}{b}$.

DE'FINITION.

167. LORSQUE l'on met dans une expreſſion litterale à la place d'une des lettres de cette expreſſion, une autre grandeur, ſoit litterale, ſoit numerique, qu'on ſuppoſe égale à cette lettre, ou repréſentée par cette lettre, on appelle cela *ſubſtituer* cette grandeur à la place de la lettre à laquelle on la ſuppoſe égale: & cette operation s'appelle *ſubſtitution*. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe $5 = n$, & que l'on mette 5 à la place de n dans l'expreſſion $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ ce qui la chan-

gera en $5 \times \frac{5-1}{2} \times \frac{5-2}{3} = 5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 5 \times 2 \times 1 = 10$, cela s'appelle ſubſtituer 5 à la place de n. De même ſi l'on ſuppoſe $a = b + c$, & qu'on mette $b + c$ à la place de a dans $2ab$, on trouvera $2b^2 + 2bc = 2ab$, & on appelle cela ſubſtituer $b + c$ à la place de a dans $2ab$. L'on doit, par la ſubſtitution, mettre la nouvelle grandeur à la place de la lettre à laquelle on la ſubſtitue, de la même maniere qu'eſt cette lettre dans l'expreſſion litterale. C'eſt à dire, ſi une lettre eſt par addition, ou par ſouſtraction, ou par multiplication, ou de quelqu'autre maniere que ce puiſſe être dans une expreſſion litterale, & qu'on veuille ſubſtituer à ſa place une nouvelle grandeur qu'on lui ſuppoſe égale, il faut mettre cette nouvelle grandeur dans cette expreſſion auſſi par addition, ou par ſouſtraction, ou par multiplication, en un mot de la même maniere que la grandeur, à la place de laquelle on ſubſtitue la nouvelle grandeur, étoit dans cette expreſſion.

DE'FINITION.

168. UNE expreſſion litterale, dont on regarde les lettres comme des indéterminées, laquelle par là repreſénte une infinité d'expreſſions, en concevant qu'on peut ſubſtituer d'autres grandeurs à la place des lettres indéterminées, s'appelle *une formule generale*, ou ſimplement *une formule* de toutes les expreſſions qu'elle répréſente. Par exemple, $a + b$ eſt une formule de toutes les grandeurs complexes de deux termes poſitifs, en concevant a & b comme des indéterminées qui repréſentent l'une le premier terme, & l'autre le ſecond terme de toutes les grandeurs complexes de deux termes.

COROLLAIRE VII.

169. CHACUNE des puiſſances de la table eſt une formule qui repréſente une ſemblable puiſſance de toute grandeur complexe binome, ſoit litterale, ſoit numerique; a dans chaque formule repréſente le premier terme de ce binome, & b le ſecond terme; de maniere qu'il n'y qu'à ſubſtituer dans chaque formule le premier terme de tel binome qu'on voudra à la place de a, & le ſecond à la place de b, & la formule deviendra par cette ſubſtitution la puiſſance ſemblable de ce binome. Chaque formule marque même les operations qu'il faut

faut faire pour élever un binome à la puiſſance de cette formule.

Par exemple, pour élever $a^2 - b^2$ à la 2e puiſſance, il faut ſubſtituer dans la formule $a^2 + 2ab + b^2$ de la 2e puiſſance, a^2 à la place de a, & $-b^2$ à la place de b. La formule $a^2 + 2ab + b^2$ marque auſſi qu'il faut prendre d'abord la 2e puiſſance de a^2, enſuite deux produits de a^2 par $-b^2$; & enfin la 2e puiſſance de $-b^2$, & l'on aura $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$.

De même pour élever 23 à la 2e puiſſance, il faut ſuppoſer $a = 2$, & $b = 3$, écrire dans les rangs qui leur conviennent la 2e puiſſance de 2, enſuite deux fois le produit de 2 par 3, & enfin le quarré de 3, & l'on aura 529 pour la 2e puiſſance ou le quarré de 23.

4 . .
1 2 .
9
5 2 9

REMARQUE.

170. LES Lecteurs qui commencent, doivent ſe rendre très familiers les produits de chaque puiſſance, & ſur-tout de la 2e & de la 3e. Sçavoir que le quarré d'un binome repréſenté par $a + b$, contient le quarré a^2 du premier terme, deux fois le produit du premier terme par le ſecond, lequel produit eſt $2ab$; & enfin le quarré b^2 du ſecond terme. Que la 3e puiſſance d'un binome repréſenté par $a + b$ contient la 3e puiſſance a^3 du premier terme, trois fois le produit du quarré du premier terme par le ſecond, c'eſt à dire $3a^2b$; trois fois le produit du premier terme par le quarré du ſecond, c'eſt à dire $3ab^2$, enfin la 3e puiſſance b^3 du ſecond terme. Et ainſi des autres.

2°. *Pour les grandeurs complexes de trois termes qu'on appelle* trinomes, *de quatre termes qu'on nomme* quadrinomes; *& pour les grandeurs complexes de tant de termes qu'on voudra, & même d'une infinité de termes.*

171. POUR élever une grandeur complexe de trois termes, de quatre termes, & de tant de termes qu'on voudra, qu'on pourra repréſenter par les lettres de l'alphabet; par exemple, pour élever $a + b + c + d + e + f + g +$ &c. à telle puiſſance qu'on voudra, dont l'expoſant ſoit un nombre entier qu'on repréſentera ici pour s'expliquer plus clairement par l'indéterminée n, il faut multiplier continuement cette grandeur complexe par elle-même autant de fois qu'il y a

d'unitez dans l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever cette grandeur moins une, c'eſt à dire autant de fois qu'il y a d'unitez dans $n - 1$, & le dernier produit ſera la puiſſance que l'on cherche; le premier produit ſera la 2e puiſſance, le ſecond ſera la 3e puiſſance de la grandeur complexe, & ainſi de ſuite.

172. Ou bien on ſe ſervira de cette ſeconde maniere que l'on doit ſe rendre très familiere. On prendra dans la table des puiſſances, la formule de la puiſſance de $a + b$, qui a le même expoſant que la puiſſance à laquelle on veut élever la grandeur complexe de pluſieurs termes propoſée, & enſuite 1°, on élevera les deux premiers termes $a + b$ de la grandeur propoſée, par le moyen de la formule à la puiſſance de la formule. 2°. On ſuppoſera enſuite que a de la formule repréſente les deux premiers termes $a + b$ de la grandeur propoſée, que b de la formule en repréſente le troiſiéme terme c, & que la puiſſance de a ſeule dans le premier terme de la formule, repréſente les deux premiers termes de la grandeur propoſée, déja élevez par la premiere operation à la puiſſance qu'on demande; enſuite on ſubſtituera, dans les termes de la formule qui ſuivent le premier, la ſomme des deux premiers termes $a + b$ de la grandeur propoſée, & les puiſſances de cette ſomme, à la place de a, & des puiſſances de a dans la formule; & on ſubſtituera c, & les puiſſances de c, à la place de b, & des puiſſances de b dans tous les termes de la formule qui ſuivent le premier; & après ces ſubſtitutions l'on aura déja les trois premiers termes $a + b + c$ de la grandeur propoſée, élevez à la puiſſance qu'on demande. 3°. On ſuppoſera que a de la formule repréſente la ſomme des trois termes $a + b + c$ de la grandeur propoſée; que b de la formule repréſente le quatriéme terme d de la grandeur propoſé; & que la puiſſance ſeule de a, dans le premier terme de la formule, repréſente la puiſſance ſemblable de la ſomme des trois premiers termes $a + b + c$ que l'on a déja trouvée : enſuite on ſubſtituera $a + b + c$, & les puiſſances de $a + b + c$ à la place de a & des puiſſances de a dans les termes de la formule qui ſuivent le premier; on ſubſtituera dans les mêmes termes & dans le dernier, d & les puiſſances de d à la place de b & des puiſſances ſemblables de b, & l'on aura les quatre premiers termes $a + b + c + d$ de la grandeur

propoſée élevez à la puiſſance qu'on demande. 4°. On trouvera de même par ordre tous les autres termes de la puiſſance de la grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra, en ſuppoſant tous les termes de cette grandeur, dont on a déja la puiſſance, repréſentez par a de la formule, celui qui les ſuit repréſenté par b de la formule, & que la puiſſance ſeule de a, dans le premier terme de la formule, repréſente la puiſſance de la ſomme de tous les termes précedens qu'on a déja formée; & en ſubſtituant dans les autres termes de la formule les grandeurs qu'on vient de ſuppoſer égales à a & b de la formule, à leur place, & les puiſſances de ces grandeurs à la place des puiſſances ſemblables de a & de b de la formule. Cette methode s'éclaircira par les exemples ſuivans.

173. On remarquera que quand il faut ſubſtituer dans une formule à la place de toutes les lettres qu'elle contient les grandeurs particulieres que repréſentent ces lettres, ſans qu'il reſte une lettre de la formule, elle marque alors ſimplement les operations qu'il faut faire ſur les grandeurs que repréſentent les lettres de la formule, pour avoir l'expreſſion de ces grandeurs particulieres repréſentée par la formule, & dans ce cas on entend par ſubſtituer les grandeurs particulieres dans la formule, à la place des lettres qui les repréſentent, faire ſur ces grandeurs particulieres les operations de multiplication, de diviſion, &c. que marque la formule: & c'eſt ce qu'on entend ici.

EXEMPLE I.

POUR élever $a+b+c+d+e$ à la 2e puiſſance, on ſe ſervira de la formule $a^2+2ab+b^2$, & elle ſera la 2e puiſſance des deux premiers termes $a+b$; mais ſi les deux premiers termes de $a+b+c+d+e$ n'étoient pas ceux de la formule, on trouveroit leur 2e puiſſance * à la maniere des binomes. * 169.

2°. On ſuppoſera que a de la formule repréſente $a+b$, & que b de la formule repréſente c, & que a^2 repréſente la 2e puiſſance $a^2+2ab+b^2$ des deux premiers termes de $a+b+c+d+e$ déja trouvée, & les deux autres termes $2ab+b^2$ marquent qu'il faut multiplier $2\times\overline{a+b}$, repréſenté par $2a$ de la formule, par c repréſenté par b de la formule, & b^2 de la formule marque

qu'il faut prendre c^2 repréſenté par b^2 de la formule ; & l'on aura déja $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ pour la 2e puiſſance des trois premiers termes $a + b + c$ de $a + b + c + d + e$.

3°. Il faut ſuppoſer que a de la formule repréſente $a + b + c$, b de la formule repréſente d, & que a^2 de la formule repréſente la 2e puiſſance de $a + b + c$ déja formée ; enſuite $2ab + b^2$ de la formule marquent les produits $2 \times \overline{a + b + c} \times d$ & d^2. Ainſi l'on aura déja $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$.

4°. On ſuppoſera $a + b + c + d = a$ de la formule, & $e = b$ de la formule, & les termes $2ab + b^2$ de la formule, marquent qu'il faut prendre le produit $2 \times \overline{a + b + c + d} \times e = 2ab$ de la formule, & $+ e^2 = b^2$ de la formule. Ainſi la 2e puiſſance de $a + b + c + d + e$ ſera $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 + 2ae + 2be + 2ce + 2de + e^2$.

S'il y avoit eu encore d'autres termes dans la grandeur complexe $a + b + c +$ &c. on auroit continué de la même maniere de les élever à la 2e puiſſance.

EXEMPLE II.

POUR élever $a + b + c + d + e$ à la 3e puiſſance, il faut ſe ſervir de la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & 1°. les deux premiers termes de la grandeur propoſée étant $a + b$ les mêmes que ceux de la formule, l'on a déja dans la formule ces deux premiers termes élevez à la 3e puiſſance; s'ils en étoient dif-
*169. ferens, on les éleveroit à la 3e puiſſance * comme les binomes par le moyen de la formule.

2°. Il faut ſuppoſer que a de la formule repréſente $a + b$ de la grandeur à élever, que b de la formule repréſente le troiſiéme terme c, & que a^3 repréſente la 3e puiſſance des deux premiers termes déja trouvée. Les termes $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ marquent qu'il faut prendre $3 \times \overline{a + b} \times c = 3a^2b$; $3 \times \overline{a + b} \times c^2 = 3ab^2$, & $c^3 = b^3$; & faiſant le calcul, on aura déja $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$ pour la 3e puiſſance de $a + b + c$.

3°. On ſuppoſera que a de la formule repréſente $a + b + c$

que b de la formule repréſente d, que a^3 de la formule repréſente la 3e puiſſance de $a+b+c$ déja trouvée ; les trois termes de la formule $3a^2b+3ab^2+b^3$ marquent qu'il faut prendre $\overline{3\times a+b+c}^{2}\times d=3a^2b$, $3\times\overline{a+b+c}\times d^2=3ab^2$, & $d^3=b^3$; & faiſant le calcul, on trouvera que les termes qu'il faut ajouter à ceux que l'on a déja trouvez ſont $3a^2d+6abd+3b^2d+6acd+6bcd+3c^2d+3ad^2+3bd^2+3cd^2+d^3$.

4°. Enfin on ſuppoſera que a de la formule repréſente $a+b+c+d$, que b de la formule repréſente e, que a^3 de la formule repréſente la 3e puiſſance de $a+b+c+d$ déja trouvée ; & les termes $3a^2b+3ab^2+b^3$ de la formule marquent qu'il faut prendre $3\times\overline{a+b+c+d}^{2}\times e=3a^2b$; $3\times\overline{a+b+c+d}\times e^2=3ab^2$, & $e^3=b^3$; & faiſant le calcul on trouvera que les termes qu'il faut ajouter à ceux que l'on a déja trouvez, ſont $3a^2e+6abe+3b^2e+6ace+6bce+3c^2e+6ade+6bde+6cde+3d^2e+3ae^2+3be^2+3ce^2+3de^2+e^3$.

S'il y avoit eu plus de termes dans la grandeur propoſée $a+b+c+d+e$, on auroit trouvé tous les autres termes de ſa 3e puiſſance par le moyen de la formule, comme l'on a trouvé tous les précedens.

REMARQUES.

I.

174. ON pourra de la même maniere élever toute grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra à la 4e puiſſance, à la 5e, &c. par le moyen des formules de ces puiſſances. Mais il ſuffit ordinairement pour apprendre les Mathematiques de ſe rendre familiere la formation de la 2e & de la 3e puiſſance, & de retenir, 1°, *Que le quarré ou la 2e puiſſance d'une grandeur complexe de pluſieurs termes, contient le quarré du premier terme, plus deux produits du premier terme par le ſecond, plus le quarré du ſecond terme, plus deux produits de la ſomme des deux premiers termes par le troiſiéme, plus le quarré du troiſiéme terme, plus deux produits de la ſomme des trois premiers termes par le quatriéme, plus le quarré du quatriéme terme ; & ainſi de ſuite.*

2°. *Que le cube ou la troiſiéme puiſſance d'une grandeur com-*

plexe contient le cube du premier terme, plus trois produits du quarré du premier terme par le ſecond, plus trois produits du premier terme par le quarré du ſecond, plus le cube du ſecond terme, plus trois produits du quarré de la ſomme des deux premiers termes par le troiſiéme, plus trois produits de la ſomme des deux premiers termes par le quarré du troiſiéme, plus le cube du troiſiéme terme, plus trois fois le produit du quarré de la ſomme de trois premiers termes par le quatriéme, plus trois fois le produit de la ſomme des trois premiers termes par le quarré du quatriéme, plus le cube du quatriéme terme, & ainſi de ſuite.

2.

175. La premiere methode de former les puiſſances des grandeurs complexes par la multiplication continue de la même grandeur, eſt une ſuite évidente de la définition * des puiſſances, & la ſeconde où l'on ſe ſert des puiſſances d'un binome comme de formules pour trouver les puiſſances des grandeurs complexes de tant de termes qu'on voudra, n'a pas beſoin de démonſtration, ce n'eſt qu'une application de l'univerſalité des expreſſions litterales qui repréſentent toutes ſortes de grandeurs; c'eſt une application de l'étendue du calcul de ces expreſſions generales qui repréſente les calculs particuliers; c'eſt l'avantage que donnent ces expreſſions generales d'abreger les expreſſions même litterales les plus compoſées, en les réduiſant à une expreſſion très ſimple. Par exemple, on peut repreſenter par le ſimple produit ab des deux grandeurs a & b le produit de deux grandeurs les plus complexes, pour ainſi dire qu'on puiſſe imaginer, comme de $c + d + e + f + g$, *&c.* par $b + i + k + l + m$, *&c.* en ſuppoſant la premiere répréſentée par a, & la ſeconde par b. Ce ſont des ſignes arbitraires qu'on ne ſçauroit conteſter, & dont on tire des avantages infinis pour reſerrer les objets les plus compoſez, & tous les rapports, dans les bornes de notre eſprit que les objets paſſeroient de beaucoup par leurs expreſſions particulieres.

*89 & 143.

3.

176. Lorſqu'un ou pluſieurs termes de la grandeur complexe à élever à une puiſſance donnée ſont précedez du ſigne —, la formation de la puiſſance de cette grandeur ſe fait de la mê-

me maniere, & l'on trouve les mêmes termes, en obſervant ſeulement que les produits où ſe trouve un terme négatif avec des dimenſions impaires, comme 1, 3, 5, &c. doivent avoir le ſigne —, & que les produits où ſe trouvent pluſieurs termes négatif, doivent encore avoir le ſigne —, ſi les expoſans des dimenſions de ces termes joints enſemble font un nombre impair; par exemple, s'il y avoit $-b-c$ parmi les termes de la grandeur à élever, les produits où il y auroit $-b^1 \times c^2$, $b^2 \times -c^1$; $b^2 \times -c^3$; $-c^3 \times b^4$, &c. * * 98. ſeroient négatifs. De même s'il y avoit $-b-c-d$, les produits $-b^1 \times -c^1 \times -d^1$, $-b^3 \times -c^1 \times -d^3$, $-b^3 \times -c^3 \times -d^5$, &c. ſeroient négatifs.

La formation des puiſſances des grandeurs numeriques.

PROBLÊME IV.

177. *ELEVER un nombre entier quelconque à telle puiſſance qu'on voudra, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif.*

IL faut ſe ſervir des mêmes methodes que l'on a employées pour les grandeurs litterales. La premiere eſt de multiplier le nombre propoſé continuement par lui-même autant de fois que l'expoſant de la puiſſance à laquelle on le veut élever contient d'unitez moins une. Et le premier produit ſera la 2e puiſſance ou le quarré; le ſecond ſera le cube ou la 3e puiſſance, le troiſiéme ſera la 4e puiſſance, & ainſi de ſuite. C'eſt par cette methode qu'il faut former les puiſſances ſeules des premiers chifres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 & 10.

La ſeconde methode eſt de ſe ſervir des formules de la table des puiſſances. Pour faire clairement concevoir l'application de cette methode, on fera les remarques ſuivantes, 1°. Que l'on peut regarder un nombre qui a pluſieurs rangs, par exemple 2345, comme une grandeur complexe d'autant de termes que ce nombre a de rangs. Le premier chifre 2 à gauche eſt le premier terme; le ſuivant 3 vers la droite eſt le ſecond, & ainſi de ſuite.

2°. Que quoique la multiplication d'un nombre complexe par lui-même, comme de 2345 par 2345, ou par un autre nombre complexe, ſe faſſe ordinairement en commençant

par le premier chifre de la droite en allant de ſuite vers la gauche, on peut cependant la faire en commençant par le premier chifre 2 de la gauche en allant de ſuite de la gauche à la droite, pourvû qu'on obſerve de mettre devant
* 81. le produit du premier chifre à gauche par lui-même, * autant de rangs qu'il y en a devant le chiffre multiplié & devant le chifre multiplicateur, c'eſt à dire deux fois autant de rangs qu'il y en a devant le chifre multiplié par lui même, & qu'on obſerve la *même regle des rangs* dans
* 81. tous les produits ſuivans, c'eſt à dire * de *mettre toujours devant le produit d'un chifre par un autre, la ſomme des rangs qui ſont devant le multiplié & le multiplicateur.*

Après ces remarques on ſuppoſera d'abord le premier chifre 2 le plus à gauche du nombre complexe, repreſenté par *a* de la formule, & le ſecond 3 en allant vers la droite repreſenté par *b* de la formule, & l'on prendra les puiſſances & les produits de 2 & de 3 marquez par les produits de *a* & de *b* de la formule que l'on écrira les uns ſous les autres en obſervant de les placer aux rangs qui leur conviennent. Enſuite on ſuppoſera que *a* de la formule repreſente les deux premiers chifres 23 du nombre donné pris ſelon la valeur de leurs rangs, c'eſt à dire 2300, que *b* repreſente le troiſiéme 4 pris auſſi ſuivant la valeur de ſon rang, c'eſt à dire 40, & que la puiſſance de *a* qui eſt le premier terme de la formule repreſente la puiſſance déja trouvée de 23: & l'on prendra les puiſſances & les produits de $23 = a$ & de $4 = b$ que marque la formule, & on les écrira ſous les autres chacun au rang qui lui convient. En un mot on ſuppoſera que tous les chifres dont on à déja trouvé la puiſſance, ſont repreſentez par *a*, & le ſuivant à droite par *b*, & on en écrira les puiſſances & les produits marquez par la formule aux rangs qui conviennent à chacun, juſqu'à ce qu'on ait employé le dernier chifre le plus à droite. Enfin on ajoutera tous ces produits en une ſomme qui ſera la puiſſance que l'on cherche.

I. EXEMPLE.

POUR élever 2345 au quarré, on ſuppoſera que *a*, de la formule $a^2 + 2ab + b^2$, repréſente 2, & que *b* repréſente 3. Et l'on prendra comme le marque la formule,

2345

Exemple I.

2345 nombre à élever au quarré.

178. 2000 = a	2 = a·	4·00·00·00 = a^2	} = a^2 } = a^2
300 = b	3 = b·	1·20·00·00 = $2ab$	
		· · 9·00·00 = b^2	
2300 = a	23 = a·	·18·40·00 = $2ab$	
40 = b	4 = b·	·16·00 = b^2	
2340 = a	234 = a·	2·34·00 = $2ab$	
5 = b	5 = b.	·25 = b^2	
		: 5:49:90:25 quarré de 2345	
		q pq pq pq	
		A B C D	

le quarré de 2 qui eſt $4 = a^2$, & on l'écrira en mettant au devant ſix rangs remplis de ſix zeros ou de ſix points, parceque $2 = a$, a trois rangs devant lui, & étant multiplié par lui-même, le produit 4 doit avoir ſix rangs devant lui. On prendra enſuite deux fois le produit de 2 par 3 qui eſt $12 = 2ab$. On l'écrira ſous le quarré précedent, mais on avancera le chifre 2 qui eſt le plus à droite du produit 12 d'un rang vers la droite, afin qu'il y ait cinq rangs devant 12, puiſqu'il y a trois rangs devant le multiplié 2, & deux rangs devant le multiplicateur 3. Puis on prendra le quarré de 3 qui eſt *9*, qu'on écrira ſous les deux précedens, mais dans un rang plus avancé vers la droite, ne devant avoir que quatre rangs devant lui, puiſque c'eſt le produit de 300 par 300. On ne déſignera plus dans la ſuite les rangs où l'on doit commencer d'écrire les premiers chifres à droite de chaque produit : les Lecteurs ne peuvent plus avoir de peine à les diſtinguer.

Après cette premiere operation on ſuppoſera que a de la formule repréſente 23 ; que b repréſente 4, & que a^2 de la formule repréſente le quarré de 23 qu'on vient de trouver, & l'on prendra $2 \times 23 \times 4 = 184 = 2ab$, & $16 = b^2$ qu'on écrira ſous les produits précedens dans les rangs qui leur conviennent.

Enſuite on ſuppoſera que a de la formule repréſente 234 ; que b repréſente 5 , & que a^2 repréſente le quarré de 234 qu'on a déja formé, & l'on prendra $2 \times 234 \times 5 = 2340 = 2ab$, & $25 = b^2$, & on écrira ces produits ſous les précedens dans les rangs qui leur conviennent .

Enfin on ajoutera tous les produits qu'on a formez , dans une ſomme, & l'on aura 5499025 pour le quarré de 2345.

REMARQUE.

2345
2345

4000000 = 2000 × 2000 = a^2
600000 = 2000 × 300
600000 = 300 × 2000 } = $2ab$ } a^2
90000 = 300 × 300 = b^2
92000 = 2300 × 40
92000 = 40 × 2300 } = $2ab$
1600 = 40 × 40 = b^2 } a^2
11700 = 2340 × 5
11700 = 5 × 2340 } = $2ab$
25 = 5 × 5 = b^2

5499025 quarré de 2345

Les Lecteurs qui commencent pourront remarquer , qu'en ſuivant la formule , on diſtingue les produits qui compoſent le quarré de 2345 , & qu'on les range dans un ordre qui ſert à les retrouver , quand ce quarré etant donné on en cherche la racine quarrée 2345. Et s'ils multiplient 2345 par 2345 par la multiplication ordinaire, ſoit en commençant par la droite en allant vers la gauche, ſoit en commençant par la gauche en allant vers la droite, en obſervant de placer les produits particuliers dans les rangs qui leur conviennent , ils verront clairement que quoiqu'on ne diſtingue pas ces produits, en faiſant la multiplication ordinaire, elle les contient pourtant tous, & qu'elle n'en contient aucun autre. Il leur ſera plus utile de le voir eux-mêmes en faiſant beaucoup d'exemples , que ſi l'on employoit un long diſcours pour l'expliquer.

II. EXEMPLE.

179. POUR élever 2345 à la 3e puiſſance ou au cube, il faut ſe ſervir de la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & ſuppoſer d'abord que a de la formule repréſente 2, & que b repréſente 3, & prendre les puiſſances & les produits de 2 & de 3 marquez par la formule; les écrire les uns ſous les autres dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit ici.

Exemple II.

2345 nombre à élever à la 3e puiſſance.

$2 = a$ · 8 · 000 · 000 · 000 = a^3
$3 = b$ · 3 · 600 · 000 · 000 = $3a^2b$
· · 540 · 000 · 000 = $3ab^2$
· · 27 · 000 · 000 = b^3
} a^3
} a^1

$23 = a$ · · 634 · 800 · 000 = $3a^2b$
$4 = b$ · · 11 · 040 · 000 = $3ab^2$
· · · 64 · 000 = b^3

$234 = a$ · · 82 · 134 · 000 = $3a^2b$
$5 = b$ · · · 175 · 500 = $3ab^2$
· · · · 125 = b^3

12 : 895 : 213 : 625 cube de 2345.
qr : pqr : pqr : pqr
A B C D

Après cette premiere operation, il faut ſuppoſer que a de la formule repréſente 23, que b repréſente 4, & que a^3 repréſente la 3e puiſſance de 23 déja formée, & prendre les puiſſances & les produits des nombres repréſentez par a & par b que preſcrit la formule, & les écrire ſous les précedens dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans l'exemple.

Enſuite il faut ſuppoſer que a de la formule repréſente 234, que b repréſente 5, & que a^3 repréſente la 3e puiſſance de 234 déja formée, & prendre les puiſſances & les produits des grandeurs repréſentées par a & par b que preſcrit la formule, & les écrire ſous les précedens dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans l'exemple.

Enfin il faut ajouter tous les produits qu'on a trouvez dans une ſomme, & l'on aura 1289521362 5 pour le cube, ou la 3e puiſſance de 2345.

REMARQUES.

I.

180 POUR élever un nombre donné à la 4e puiſſance, il faut d'abord l'élever à la 2e puiſſance, & élever cette 2e puiſſance, conſiderée comme une racine, à la 2e puiſſance, & ce ſera la 4e puiſſance du nombre propoſé.

Pour élever un nombre à la 6e puiſſance, il faut d'abord l'élever à la 2e puiſſance, & élever cette 2e puiſſance à la 3e puiſſance, & ce ſera la 6e puiſſance qu'on cherche. Ou bien il faut élever le nombre propoſé à la 3e puiſſance, & élever cette 3e puiſſance à la 2e, & ce ſera la 6e puiſſance qu'on cherche.

Pour élever un nombre à la 8e puiſſance, il faut d'abord l'élever à la 2e puiſſance; élever enſuite cette 2e puiſſance à la 2e puiſſance; enfin élever cette derniere à la 2e puiſſance: ce ſera la 8e puiſſance qu'on cherche.

En general, lorſque l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever un nombre, ſe peut diviſer exactement par des nombres entiers, differens de l'unité (par exemple, l'expoſant 4 de la 4e puiſſance peut ſe diviſer par 2 & 2; l'expoſant 6 de la 6e par 2 & 3; l'expoſant 8 de la 8e par 2, 2, 2, & encore par 2 & 4; l'expoſant 9 de la 9e par 3 & 3; l'expoſant 12 de la 12e par 2, 2, 3, & encore par 3 & 4, & encore par 2 & 6; & ainſi des autres:) au lieu d'élever le nombre immédiatement à la puiſſance propoſée, il eſt plus court de choiſir, pour expoſans particuliers, les diviſeurs, qui étant multipliez les uns par les autres, donnent pour produit l'expoſant de la puiſſance cherchée, & d'élever le nombre propoſé à la puiſſance marquée par le premier de ces diviſeurs, celle-ci à la puiſſance marquée par le ſecond des diviſeurs, cette derniere à la puiſſance marquée par le diviſeur ſuivant, & ainſi de ſuite juſqu'à la puiſſance marquée par le dernier des diviſeurs, laquelle ſera la puiſſance qu'on cherche.

Par exemple, pour élever un nombre à la 12e puiſſance, dont l'expoſant 12 a pour diviſeurs $2 \times 2 \times 3 = 12$, il faut l'élever à la 2e, celle-ci à la 2, & cette derniere à la 3e, la-

quelle ſera la 12 puiſſance qu'on cherche. On remarquera qu'il faut choiſir les diviſeurs, dont le produit forme l'expoſant de la puiſſance qu'on cherche, qui ſont les expoſans des puiſſances les plus faciles à former. Par exemple, les diviſeurs de 12, dont le produit forme 12, étant $2\times2\times3$. 3×4; 2×6. il eſt viſible que les trois $2\times2\times3$ ſont les expoſans des puiſſances plus aiſées à calculer que 3×4, & que 2×6.

La raiſon de cette pratique eſt évidente. Car ſuppoſé que a repréſente le nombre à élever, que le nombre entier qui eſt l'expoſant de la puiſſance qu'on cherche ſoit repréſenté par n, que les diviſeurs exacts de n ſoient marquez par b, c, d. De façon que $bcd = n$, il eſt évident * que $a^n = a^{b\times c\times d} =$ *150. a^{bcd}.

II. REMARQUE.

D'où l'on voit qu'il n'y a que les puiſſances, dont les expoſans n'ont pas d'autres diviſeurs que l'unité, comme la 2e, la 3e, la 5e, la 7e, la 11e, la 13e, la 17e, la 19e, &c. qu'il faille trouver immédiatement, & que toutes les autres peuvent s'y réduire.

III. EXEMPLE.

181. POUR élever 234 à la 5e puiſſance, il faut ſe ſervir de la formule $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, & ſuppoſer

Exemple III

234 nombre à élever à la 5e puiſſance.

$2 = a$	32	00000	00000	$= a^5$	
	24	0.0000	00000	$= 5a^4b$	
$3 = b$	7	20.000	00000	$= 10a^3b^2$	$= a^5$
	1	080.00	00000	$= 10a^2b^3$	
		8100	00000	$= 5ab^4$	
		243	00000	$= b^5$	
.. .. ..	..	..	.. .. ..		
$23 = a$	5	59682	00000	$= 5a^4b$	
$4 = b$		19467	20000	$= 10a^3b^2$	
		338	56000	$= 10a^2b^3$	
		2	94400	$= 5ab^4$	
			1024	$= b^5$	
	70	15833	71424	5e puiſſ. de 234.	
	$ſt$	$pqrſt$	$pqrſt$		
	A	B	C		

d'abord que a repréſente 2 ; que b repréſente 3. Prendre les puiſſances & les produits de 2 & de 3 que preſcrit la formule, & les écrire les uns ſous les autres dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans la page précedente.

Il faut enſuite ſuppoſer $23 = a$, & $4 = b$, & que a^5 repréſente la 5e puiſſance de 23 qu'on vient de former, prendre les puiſſances & les produits de 23 & de 4 que preſcrit la formule, les écrire ſous les précedens dans les rangs qui leur conviennent ; enfin ajouter tous les produits dans une ſomme, & l'on aura 701583371424 pour la 5e puiſſance de 234.

REMARQUE.

Il eſt inutile d'apporter ici d'autres exemples de la formation des puiſſances numeriques. Il ſuffit aux Lecteurs de ſe rendre familiere la formation de la 2e & de la 3e puiſſance, & d'avoir entendu la methode de former les autres plus élevées, dont on a rarement beſoin dans les Mathematiques.

182. *Démonſtration de la methode de former les puiſſances par le moyen de la table des puiſſances.* 1°. Il eſt évident qu'une grandeur complexe litterale, comme $a + b + c + d$, &c. peut repréſenter un nombre qui aura autant de rangs qu'on voudra, en prenant autant de termes de la grandeur litterale qu'il y aura de rangs dans le nombre qu'on prendra ; par exemple $a + b + c + d$ peut repréſenter le nombre 2345, de maniere que a repréſentera 2; b, 3; c, 4; d, 5; & ainſi des autres. 2°. Il eſt clair qu'en élevant $a + b + c + d$ à telle puiſſance qu'on voudra, cette puiſſance litterale repréſentera tous les produits particuliers des termes d'une ſemblable puiſſance de la grandeur numerique repréſentée par $a + b + c + d$, leſquels produits particuliers compoſent la puiſſance ſemblable de la grandeur numerique, avec cette ſeule choſe particuliere à la puiſſance numerique, qu'il faut obſerver que tous ces produits particuliers de la puiſſance numerique ſoient placez dans les rangs qui leur conviennent, *ſuivant la regle des rangs* ; mais ce ſont toujours les vrais produits numeriques repréſentez par les produits des Lettres, qui, joints enſemble, forment la puiſſance numerique.

*172. & 175. Or on a fait voir * que les formules des puiſſances des grandeurs complexes binomes repréſentoient tous les produits des ſemblables puiſſances des grandeurs complexes litterales

de tant de termes qu'on voudra, & faiſoient découvrir ces produits. Ces mêmes formules ſont donc auſſi découvrir tous les produits particuliers des termes des grandeurs numeriques, qui compoſent joints enſemble chaque puiſſance de ces grandeurs numeriques, en obſervant de les placer les uns ſous les autres, à meſure qu'on les trouve, dans les rangs qui leur conviennent, & en les ajoutant dans une ſomme qui les contient tous, & qui eſt la puiſſance numerique qu'on cherchoit.

DE'FINITION.

183. UN nombre entier qui eſt formé par le produit d'un nombre entier multiplié continuement par lui-même, s'appelle *une puiſſance parfaite*; Ainſi 4 produit de 2×2 eſt un quarré parfait. $8 = 2 \times 2 \times 2$ eſt un cube parfait. $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ eſt une 4e puiſſance parfaite. Les autres nombres entiers, quand on les conſidere comme des puiſſances, & qu'ils ne peuvent être formez par le produit d'un nombre entier multiplié continuement par lui-même, s'appellent *des puiſſances imparfaites*. Ainſi 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, & les autres ſemblables ſont des puiſſances imparfaites.

COROLLAIRES.

I.

184. QUAND on a la puiſſance parfaite telle qu'on voudra d'un nombre entier quelconque qui ſera nommé a, pour l'exprimer d'une maniere indéterminée qui convienne à tout nombre entier; ſi l'on veut trouver la puiſſance ſemblable parfaite du nombre $a + 1$, qui ſurpaſſe le nombre a d'une unité, il n'y a qu'à prendre dans la table des puiſſances la formule de cette puiſſance, ſuppoſer que a de la formule repréſente le nombre entier a qui eſt la racine de la puiſſance parfaite; que la puiſſance la plus haute de a, qui eſt le premier terme de la formule, repréſente la puiſſance parfaite du nombre ſuppoſé égal à a, & mettre 1 à la place de b, & des puiſſances de b dans la formule, & tous les termes de la formule ainſi changée, qui ſuivent le premier, marqueront les produits qu'il faut ajouter à la puiſſance ſuppoſée de a, pour former la puiſſance parfaite de $a + 1$.

Ainſi $a^2 + 2a + 1$ marque que, quand on a le quarré par-

fait d'un nombre, comme 9 quarré de 3 ; ſi l'on veut le quarré de $4 = 3 + 1$, il faut ajouter à 9, $2 \times 3 + 1$, & l'on aura 16 pour le quarré de $3 + 1 = 4$.

De même $a^3 + 3aa + 3a + 1$ eſt la formule pour trouver, quand on a le cube parfait d'un nombre, le cube parfait du nombre qui ſurpaſſe le premier d'une unité. Par exemple, 8 eſt le cube de 2; la formule fait découvrir $8 + 12 + 6 + 1 = 27$ pour le cube parfait de $3 = 2 + 1$. Il eſt facile de trouver les formules des puiſſances plus élevées, & de les appliquer à des exemples.

REMARQUE.

LA formule $a^2 + 2a + 1$ fait découvrir une proprieté des nombres impairs pris de ſuite 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. que voici.

L'unité qui eſt le premier terme, étant d'abord priſe ſeule, & prenant enſuite les ſommes des deux premiers termes, des trois premiers termes, des quatre premiers termes, & ainſi de ſuite ; l'unité & ces ſommes ſont par ordre les quarrez parfaits des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. Cela vient, 1°, de ce que toutes les puiſſances & toutes les racines de l'unité n'étant que l'unité même, l'unité eſt le quarré de l'unité : 2°. De ce que la difference des nombres impairs eſt 2. 3°. Enfin, de ce que les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. expriment de ſuite les nombres des termes de la progreſſion arithmetique des nombres impairs 1, 3, 5, &c. Ainſi le nombre impair qui ſuit une ſomme des termes impairs, contient le nombre des termes de cette ſomme deux fois, & 1 de plus. D'où il ſuit qu'en mettant dans $a^2 + 2a + 1$ le quarré de l'unité, qui eſt l'unité, à la place de a^2, & la racine de l'unité, qui eſt auſſi l'unité, à la place de a, on aura $1 + 2 + 1 = 1 + 3 = 4$ quarré de $1 + 1 = 2$. Subſtituant enſuite 4 à la place de a^2, & 2, racine quarrée de 4, à la place de a, on aura $4 + 4 + 1 = 1 + 3 + 5 = 9$, quarré de $2 + 1 = 3$. Subſtituant à préſent 9 à la place de a^2, & 3 racine quarrée de 9 à la place de a, on aura $9 + 2 \times 3 + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ quarrée de $3 + 1 = 4$; & ainſi de ſuite. D'où l'on voit que le nombre des termes d'une ſomme des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. eſt la racine quarrée de cette ſomme; & que cette ſomme eſt le quarré parfait du nombre des termes.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

ON a vû * dans la formation des puiſſances numeriques d'un nombre complexe qui a pluſieurs rangs ou caracteres, (lequel nombre eſt la racine de ces puiſſances,) que chaque puiſſance totale contenoit la ſemblable puiſſance de chacun des caracteres de la racine, & de plus les autres produits repréſentez par la formule de cette puiſſance; par exemple, que le quarré de 2345 contenoit le quarré de chacun des caracteres 2, 3, 4, 5, & de plus les autres produits que fait découvrir la formule des quarrez. Il eſt important de bien diſtinguer dans chaque puiſſance totale numerique, les places ou les rangs des puiſſances ſemblables de chaque caractere de la racine de cette puiſſance, & les rangs ou les places des autres produits particuliers qui font, étant joints enſemble, la puiſſance totale. C'eſt ce qu'on va enſeigner dans les Theorémes & les Corollaires ſuivans. * 177.

THEORÊME.

185. *DANS la puiſſance quelconque d'un nombre complexe, la puiſſance ſemblable particuliere de chaque caractere de la racine, a devant elle un nombre de rangs qui contient autant de fois le nombre des rangs qui ſont devant ce caractere dans la racine, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unitez.*

Dans le quarré d'un nombre qui a pluſieurs caracteres ou pluſieurs rangs, par exemple, dans le quarré dont 2345 eſt la racine quarrée, le quarré particulier de chaque caractere a devant lui le double des rangs qui ſont devant ce caractere dans la racine. Par exemple, 2 a trois rangs devant lui dans 2345; dans le quarré de 2345 le quarré particulier de 2 a deux fois trois rangs devant lui; le quarré de 3 a deux fois deux rangs devant lui; le quarré de 4 a deux fois un rang devant lui; le quarré de 5 eſt au rang des unitez.

Dans la 3ᵉ puiſſance, ou dans le cube d'un nombre, le cube particulier de chaque caractere de la racine a devant lui le triple des rangs qui ſont devant ce caractere dans la racine.

Dans la 4ᵉ puiſſance d'un nombre, la 4ᵉ puiſſance particuliere de chaque chifre ou de chaque caractere de la racine

a devant elle le quadruple des rangs qui ſont devant ce caractere dans la racine.

Dans la 5ᵉ puiſſance, dont l'expoſant eſt 5, la 5ᵉ puiſſance particuliere de chaque caractere de la racine a devant elle le quintuple des rangs qui ſont devant ce caractere dans la racine.

*81.& 177. Ce Theorême eſt une ſuite évidente * de la regle que l'on a donnée pour placer les produits de la multiplication dans les rangs qui leur conviennent.

A B C D

q.pq.pq.pq.
5,49,90,25

DE'FINITION.

SI l'on diſtingue par des points ou par des virgules, ou par de petites lignes droites dans un nombre complexe comme 5499025, les rangs des deux en deux, ou de trois en trois, ou de quatre en quatre, &c. en commençant par les rangs de la droite en allant vers la gauche; on nommera cela partager ce nombre complexe *en tranches* chacune de deux rangs, ou chacune de trois rangs, ou chacune de quatre rangs, &c. & toutes les tranches auront chacune le même nombre de rangs, excepté celle qui eſt la plus à gauche qui peut en avoir moins.

On nommera *A* la tranche la plus à gauche, qui eſt celle qui ſe préſente la derniere en partageant le nombre complexe en tranches; on nommera *B*, *C*, *D*, *E*; *&c.* celles qui ſuivent vers la droite. On nommera auſſi *A* la premiere tranche; *B*, la ſeconde; *C*, la troiſiéme, & ainſi de ſuite.

On nommera, dans chaque tranche, *p* le chifre le plus à gauche, *q*, *r*, *ſ*, *t*, *&c.* les autres ſuivans vers la droite. On nommera auſſi dans chaque tranche le chifre ou le rang *p*, le premier rang de cette tranche; & *q*, *r*, *ſ*, *t*, *&c.* le ſecond le troiſiéme, le quatrieme rang, &c. de cette tranche,

*177. On a fait diſtinguer * dans la puiſſance parfaite d'un nombre complexe qui en eſt la racine, quels étoient les puiſſances particulieres & les produits des caracteres de la racine, qui joints enſemble compoſoient la puiſſance totale. Pour marquer en quelle tranche & en quel rang d'une tranche chacun de ces produits commence à ſe trouver, on dira qu'il ſe trouve

en tel rang d'une telle tranche. Les Lecteurs voyent bien que ſi chacun de ces produits a pluſieurs, rangs il ne peut y avoir au plus que ſon premier chifre à droite qui ſe trouve contenu dans le rang où l'on dira qu'il ſe trouve, & que les autres chifres ſont dans les rangs qui ſuivent ce rang vers la gauche. Par exemple le quarré 5 de la racine 2345, ſe trouve au dernier rang marqué *q* de la derniere tranche *D* du quarré de 2345; parcequ'il commence à ſe trouver dans ce dernier rang. Le quarré de 4 ſe trouve dans le dernier rang *q* de la troiſiéme tranche *C*. Le quarré de 3 ſe trouve dans le rang *q* de la ſeconde tranche *B*. Le quarré de 2 ſe trouve dans le rang *q* de la premiere tranche *A*; il en eſt de même des autres.

A	*B*	*C*	*D*	
q,	*pq*,	*pq*,	*pq*,	
5,	49,	90,	25	quarré de 2345

THEORÊME.

186. *Si l'on partage une puiſſance numerique quelconque en tranches chacune d'autant de rangs que l'expoſant de la puiſſance contient d'unitez, c'eſt à dire chacune de deux rangs, ſi c'eſt une 2e puiſſance; de trois rangs, ſi c'eſt une 3e puiſſance, & ainſi des autres; la racine de cette puiſſance contiendra autant de rangs ou de caracteres qu'il y aura de tranches: & elle n'en ſçauroit contenir ni plus ni moins.*

On prendra, afin de rendre la démonſtration plus facile à concevoir, le quarré numerique qui a quatre tranches, & dont la racine eſt 2345.

A	*B*	*C*	*D*
q,	*pq*,	*pq*,	*pq*
5,	49,	90,	25

Démonſtration. Si l'on ſuppoſe une racine 2345 qui ait autant de rangs que ſa puiſſance a de tranches, c'eſt à dire dans notre exemple quatre rangs, ſa puiſſance aura par le * Theorême précedent autant de tranches que cette racine a de rangs; car la puiſſance du premier chifre à gauche aura devant elle autant de tranches qu'il y a de rangs dans la racine devant ce caractere, & cette puiſſance elle-même en ajoutera une de plus. Mais ſi l'on ſuppoſe que la racine a un ſeul rang de plus ou de moins que ſa puiſſance n'a de tranches; il eſt évident par le Theorême précedent que ſa puiſſance aura une tranche de plus ou de moins. D'où il ſuit que la * 185.

racine de cette puiſſance ne peut avoir qu'autant de rangs ou de caracteres que ſa puiſſance a de tranches.

2e *Démonſtration*. Suppoſant que la puiſſance numerique a quatre tranches, & que ce ſoit la 2e puiſſance, qu'on prenne l'unité précedée de quatre zero, il eſt évident que la 2e puiſſance de 10000, qui eſt 1, 00, 00, 00, 00 aura cinq tranches. Mais 10000 eſt le plus petit des nombres qui ont cinq rangs, & 1, 00, 00, 00, 00 le plus petit des nombres qui ont cinq tranches. La racine d'un nombre qui n'a que quatre tranches, ne peut donc avoir cinq rangs.

Si l'on prend l'unité précedée de trois zero 1000, il eſt évident que la ſeconde puiſſance 1, 00, 00, 00 aura quatre tranches. Et 1000 étant le plus petit des nombres qui ont quatre rangs, & 1, 00, 00, 00 le plus petit de ceux qui ont quatre tranches, il eſt clair que la racine d'un nombre qui a quatre tranches, ne ſçauroit avoir moins de quatre rangs, puiſque ſi elle n'en avoit que trois, étant moindre que 1000, ſa 2e puiſſance ſeroit moindre que celle de 1000, laquelle eſt la moindre de 2es puiſſances qui ont quatre tranches.

Comme l'on n'a pris la 2e puiſſance & quatre tranches que pour rendre la démonſtration plus facile à entendre, & qu'on peut l'appliquer à toute puiſſance numerique d'autant de tranches qu'on voudra. Il eſt évident que la racine d'une puiſſance numerique doit avoir autant de caracteres que cette puiſſance a de tranches.

THEORÊME.

187. *LES termes de chaque formule des puiſſances ſervent à diſtinguer, dans les puiſſances numeriques ſemblables, les puiſſances des caracteres de la racine de ces puiſſances, & les autres produits de ces caracteres, repréſentez par les termes de la formule.*

Explication. Si l'on partage une puiſſance numerique quelconque en tranches, chacune d'autant de rangs que l'expoſant de la puiſſance contient d'unitez; (ſi c'eſt une 2e puiſſance, chaque tranche contiendra deux rangs, comme dans le premier exemple. * Si c'eſt une 3^e puiſſance, chaque tranche contiendra trois rangs, comme dans le 2e exemple; * ſi c'eſt une 5e puiſſance, chaque tranche contiendra cinq rangs, comme dans le 3e exemple, * & ainſi des autres.) Si l'on prend enſuite dans la table des puiſſances la formule de cette puiſſance,

* 178.
* 179.
* 181.

& qu'on ſuppoſe d'abord, 1°, que a de la formule repréſente le premier caractere le plus à gauche de la racine, & b le ſecond; la puiſſance du dernier caractere repréſentée par la plus haute puiſſance de a, commencera à ſe trouver dans le dernier rang, c'eſt à dire le plus à droite de la tranche A, & dans les rangs qui ſont plus à gauche, s'il y en a. Ainſi * le quarré du premier caractere 2, repréſenté par a^2, ſe * 178. trouve au dernier rang q de la tranche A. Le cube * du * 179. premier caractere 2 repréſenté par a^3, ſe trouve au dernier rang r de la tranche A. * la 5e puiſſance de 2 repréſen- * 181. tée par a^5, ſe trouve au dernier rang t de la tranche A. Il en eſt de même des autres puiſſances.

Les produits repréſentez par les autres termes de la formule qui ſuivent la plus haute puiſſance de a, & qui ſont les produits des puiſſances du premier & du ſecond caractere repréſentez par a & b, ſe trouvent de ſuite dans la tranche B; ſçavoir celui de la puiſſance de a moindre d'un degré que la plus haute, par b, dans le premier rang p de B. Le ſuivant où eſt b^2, dans le ſecond rang q de B, le ſuivant où eſt b^3, dans le troiſiéme rang r de B, & ainſi de ſuite, juſqu'à la puiſſance la plus haute de b ſeule ſans a, qui eſt dans le dernier rang de B.

Ainſi dans le quarré, * $2ab$ eſt dans le rang p de la tran- * 178. che B; b^2 eſt dans le rang q de B. Dans le cube, * $3a^2b$ eſt * 179. dans le rang p de B; $3ab^2$ eſt dans le rang q de B, b^3 eſt dans le rang r de B. Il en eſt de même des autres puiſſances.

2°. Suppoſant enſuite que les deux premiers caracteres à gauche de la racine ſont repréſentez par a de la formule, & le troiſiéme par b; la plus haute puiſſance de a, qui eſt ſeule, repréſentera la puiſſance ſemblable des deux premiers caracteres contenue dans les tranches A & B de la maniere qu'on vient d'expliquer, & les produits ſuivans de la formule dans leſquels ſe trouve b, repréſenteront de ſuite les produits des puiſſances des deux premiers caracteres & du troiſiéme, leſquels ſe trouvent auſſi de ſuite dans les rangs p, q, r, *&c.* de la tranche C, de la maniere qui à été expliquée dans le premier article précedent.

3°. Enfin ſi l'on ſuppoſe de ſuite, par rapport aux tranches ſuivantes D, E, *&c.* que a de la formule repréſente les trois premiers caracteres de la racine, & b le quatriéme; après cela

que *a* repréſente les quatre premiers caracteres, & *b* le cinquiéme, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier caractere à droite de la racine *a*; la plus haute puiſſance ſeule de *a* repréſentera la puiſſance de tous les caracteres marquez par *a*, qui eſt contenue dans les tranches précedentes, & les autres produits des puiſſances de *a* & de *b* qui ſuivent dans la formule, repréſenteront les produits qui ſe trouvent de ſuite dans les rangs de la tranche *D*, ou *E*, ou *F*, *&c.* qui répond au caractere de la racine repréſenté par *b*, c'eſt à dire de la quatriéme, de la cinquiéme tranche, &c. ſi *b* repréſente le quatriéme, le cinquiéme caractere, &c. de la racine.

* 81. Ce Theorême eſt une ſuite évidente des précedens, & * de la regle des rangs des produits de la multiplication.

Corollaire ſur la formation des puiſſances des nombres qui contiennent des grandeurs décimales.

188. COMME la multiplication des grandeurs décimales ne differe point de la multiplication des nombres entiers, & qu'il n'y a qu'à obſerver de marquer le point qui ſépare les parties décimales des entiers, ou qui marque l'endroit où commencent les parties décimales; il eſt evident que la formation des puiſſances des nombres qui contiennent des parties décimales, eſt entierement ſemblable à la formation des puiſſances des nombres entiers, & qu'il n'y a auſſi qu'à obſerver de marquer le point qui précede les parties décimales à l'endroit qui lui convient; ce qui ne renferme aucune difficulté. Les rangs des produits particuliers ſont les mêmes que ſi les nombres étoient entiers.

SECTION VI.

Où l'on explique la réſolution des puiſſances numeriques & litterales, ce qu'on nomme auſſi l'extraction des racines.

DE'FINITION.

189. LA racine quarrée d'un nombre quarré, la racine cubique d'un nombre cubique; en un mot la racine d'une puiſſance

laquelle racine a le même expoſant que cette puiſſance, ſe nommera ſimplement la racine de cette puiſſance. L'on a déja dit que l'operation par laquelle on éleve une grandeur donnée à une puiſſance, s'appelle la formation des puiſſances. L'operation par laquelle on trouve la racine d'une puiſſance donnée, s'appelle l'*extraction des racines*, ou *la réſolution des puiſſances*.

Quand la puiſſance donnée n'eſt pas parfaite, l'extraction des racines fait découvrir la grandeur qui eſt la racine de la plus grande puiſſance parfaite qui eſt contenue dans la puiſſance imparfaite. Ainſi ſi l'on cherchoit la plus grande racine cubique de 40, on trouveroit 3 pour la racine cubique de 27, 27 eſt le plus grand nombre cube contenu dans 40.

De l'extraction des racines numeriques.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

190. ON ſuppoſe que l'on ſçait les puiſſances des neufs chifres, 1, 2, 3, &c. voici la table qui les contient.

Table des puiſſances des neuf chifres.

racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9
quarrez	1	4	9	16	25	36	49	64	81
cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4es puiſſ.	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5es puiſſ.	1	32	243	1024	3125	7776.	16807.	32768	59049
7es puiſſ.	1.	128.	2187.	16384.	78125.	279936.	823743.	2097152.	4782969

PROBLÊME.

191. *TROUVER la racine d'une puiſſance numerique quelconque, dont l'expoſant peut être repréſenté par l'indeterminée* n, *qui marquera un nombre entier quelconque.*

REGLE *ou Operation*. 1°. Il faut partager la puiſſance numerique donnée en tranches chacune d'autant de rangs que l'expoſant *n* de la puiſſance contient d'unitez, excepté celle qui ſera la plus à gauche qui peut en avoir moins. C'eſt à dire, ſi l'on cherche la racine de la 2e puiſſance, chaque tranche doit contenir deux rangs; ſi l'on cherche la racine

de la 3ᵉ puiſſance, chaque tranche doit contenir trois rangs; ſi l'on cherche la racine de la 4ᵉ puiſſance, chaque tranche doit contenir quatre rangs; & ainſi des autres.

Le nombre des tranches ſera connoître le nombre des caracteres ou des rangs de la racine qu'on cherche, puiſque * la racine doit avoir autant de caracteres que l'on trouvera de tranches. *186.

On tirera une petite ligne ou un petit arc vers la droite de la puiſſance numerique; la place de la racine ſera au devant de cet arc. La premiere tranche *A* ſeule ſera le premier membre de l'extraction : ce qui reſtera de la premiere tranche, après qu'on aura operé ſur elle, étant joint avec la ſeconde tranche *B*, ſera le ſecond membre de l'extraction. Quand on aura operé ſur le ſecond membre, le reſte qui en viendra étant joint avec la troiſiéme tranche *C*, ſera le 3ᵉ membre de l'exrraction, & ainſi de ſuite. De maniere qu'il y aura autant de membres, de l'extraction, qu'il y a de tranches, & qu'il y a de caracteres dans la racine qu'on cherche, & autant d'operations à faire pour découvrir ces caracteres.

Après cela il faut prendre dans la table des puiſſances la formule de la puiſſance dont on veut extraire la racine, ſçavoir $a^2 + 2ab + b^2$ ſi l'on veut tirer la racine quarrée, $a^3 + 3a^2b +$ &c. ſi l'on veut extraire la racine cubique ou 3ᵉ, & ainſi des autres. Cette formule ſervira de regle pour trouver la racine que l'on cherche, puiſqu'elle repréſente * par ordre tous les produits qui compoſent la puiſſance qu'on veut reſoudre, & qui ſont formez par les caracteres de la racine qu'on cherche. *172. & 187.

La plus haute puiſſance de la formule, ſçavoir a^2 pour la 2ᵉ puiſſance, a^3 pour la 3ᵉ, &c. ſervira à trouver le premier caractere vers la gauche de la racine qu'on cherche, en ſuppoſant que *a* repréſente ce premier caractere.

Pour trouver ce premier caractere repreſenté par *a*, on prendra dans la table des puiſſances des neuf chifres la puiſſance du degré dont on cherche la racine, qui eſt la plus grande qui ſoit contenue dans la premiere tranche *A*, & on écrira celui des neuf chifres, qui en eſt la racine, à la place deſtinée pour la racine.

On retranchera la puiſſance de ce chifre repréſentée par la puiſſance de *a* dans la formule, on la retranchera, dis-je,

dis-je, de la tranche *A*, & l'on écrira le reſte au deſſous.

On appliquera chacun des articles de l'operation à un exemple pour le faire concevoir clairement à ceux qui commencent.

Par exemple, pour trouver la racine cubique ou 3e du nombre 12895213625,

A	B	C	D	(la racine.
qr,	pqr,	pqr,	pqr,	(2 . . .
12,	895,	213,	625	
8				
4,	8			

1°. *On le partagera en tranches chacune de trois rangs en commençant par la droite & allant vers la gauche; la premiere tranche* A *peut avoir moins de trois rangs. On tirera un arc vers la droite, & la place qui eſt au devant de cet arc ſera celle où il faudra écrire les caracteres de la racine à meſure qu'on les découvrira. Les quatre tranches que l'on trouve* * *font déja connoître que la racine aura quatre caracteres.* * 186.

On prendra pour regle de l'operation la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Et ſuppoſant que* a *repréſente le premier caractere à gauche de la racine,* a^3 *marque que, pour le trouver, il faut prendre parmi les cubes des neuf chifres, le cube* 8 *qui eſt le plus grand cube contenu dans la tranche* A. *En écrire la racine cubique* 2 *à la place deſtinée pour la racine, & retrancher* 8 *cube de* 2, *de la tranche* A, *& écrire le reſte* 4 *au deſſous de cette tranche. On ſçait déja par cette premiere Operation que* 2 *précedé de trois rangs eſt le premier caractere de la racine qu'on cherche.*

On remarquera que la plus haute puiſſance a^3 de la formule ne ſert que pour trouver le premier caractere ou celui dont la puiſſance eſt contenue dans la premiere tranche *A*. Et que les autres produits de la formule d'une puiſſance dans leſquels ſe trouve *b*, ſont ceux qui doivent ſervir ſeuls de regle (ſans la plus haute puiſſance de *a*) pour découvrir dans chaque tranche, par le moyen de la diviſion, le caractere de la racine qui a rapport à cette tranche, comme on le va voir dans les articles ſuivans de l'operation.

2°. Il faut deſcendre le chifre *p* le plus à gauche de la 2e tranche *B* au devant du reſte qu'a donné la premiere operation; ce reſte joint au caractere *p* ſera conſideré comme un dividende. Il faut ſuppoſer que *a* de la formule repréſente le premier caractere de la racine déja découvert, que *b* repréſente le ſecond caractere que l'on cherche, * & que le * 172.

177 & 187 dividende eſt repréſenté par le premier des produits de la formule, dans lequel b eſt lineaire. Ainſi pour trouver le ſecond caractere repréſenté par b, il faut prendre le produit du premier caractere déja trouvé, qui eſt repréſenté par le premier des produits de la formule du même degré, dans lequel b eſt lineaire, diviſé par b, c'eſt à dire, ſans b; ce produit eſt repréſenté par $2a$ pour le quarré, par $3a^2$ pour la 3e puiſſance, par $4a^3$ pour la 4e, & ainſi des autres: & diviſer le dividende par ce produit, le quotient qu'on trouvera ſera le ſecond caractere de la racine répréſenté par b de la formule.

Il faut former à part tous les produits, des deux premiers caracteres déja découverts, qui ſont repréſentez par ceux de la formule du degré de la puiſſance numerique, dont on cherche la racine.

Ajouter ces produits dans une ſomme, obſervant qu'ils ſoient placez dans les rangs qui leur conviennent; & après avoir écrit au devant du dividende tous les chifres q, r, $ſ$, *&c.* qui reſtent dans la tranche B, ce qui fera le ſecond membre de l'extraction, il faut retrancher de ce ſecond membre la ſomme des produits, & écrire le reſte au deſſous.

$2 = a$

A	B	C	D		
qr,	pqr,	pqr,	pqr	la racine.	$12 = 3a^2$ diviſ. du 2.me
12,	895,	213,	625	23..	$3 = b$
	8				$3600 = 3a^2b$
2. membre.	4, 895				$540 = 3ab^2$
	4, 167				$27 = b^3$
	728,				$4167 = 3^{a^2b} + 3^{ab^2} + b^3$

Dans notre exemple il faut tranſporter 8, *premier chifre à gauche de la tranche* B, *devant le reſte* 4 *de la premiere operation: &* 48 *ſera conſideré comme un dividende: & ſuppoſant que* a *de la formule repréſente le premier chifre* 2 *de la racine, & que* b *repréſente le ſecond qu'on cherche,* * *le dividende* 48 *doit contenir le produit repréſenté par* $3a^2b$, *qui eſt formé par* $3a^2$ *multiplié par* b. *Dans ce produit le ſecond caractere de la racine repréſenté par* b *eſt inconnu, & c'eſt celui qu'on cherche; mais* 2 *repréſenté par* a *étant connu, il faut former le produit repréſenté*

* 187.

par $3a^2$ *ſans* b, *& l'on aura* $3 \times 4 = 12 = 3a^2$, *que l'on prendra pour diviſeur. Il faut diviſer le dividende* 48 *par* $12 = 3a^2$. *Et le quotient qui eſt* 3 (*car on verra bientôt que ſi l'on prenoit* 4 *pour le quotient, on trouveroit qu'il ſeroit trop grand*) *eſt le ſecond caractere de la racine que l'on cherche, qui eſt repréſenté par* b; *il faut écrire* 3 *à la racine devant* 2.

Il faut enſuite former à part les trois produits repréſentez par $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, *& l'on trouvera* $3600 + 540 + 27$, *qu'il faut écrire les uns ſous les autres dans les rangs qui leur conviennent; les ajouter enſemble, & après avoir écrit les chifres* 9 *&* 5 *de la tranche* B *devant le dividende pour en compoſer le ſecond membre* 4, 895, *retrancher de ce membre la ſomme* 4167 *des produits, & marquer le reſte* 728 *au deſſous, & la partie de l'operation qui fait découvrir les deux premiers caracteres de la racine qu'on cherche eſt achevée.*

3°. Il faut tranſporter le premier chifre à gauche *p* de la troiſiéme tranche C devant le reſte qu'on a trouvé par l'operation précedente, & ce reſte joint au caractere *p* ſera conſideré comme un dividende. Il faut ſuppoſer les deux premiers caracteres de la racine déja découverts repréſentez par *a* de la formule, & le troiſiéme caractere qu'on cherche repréſenté par *b* de la formule, & former le produit des deux premiers repréſenté par le produit de la formule, dans lequel *b* eſt lineaire, ſans pourtant que *b*, qui eſt inconnu, ſoit dans ce produit; c'eſt à dire, il faut former le produit des deux premiers caracteres, regardez comme une ſeule grandeur, repréſenté par $2a$ dans le quarré, par $3a^2$ dans la 3e puiſſance, & ainſi des autres; diviſer le dividende par ce produit, & écrire le quotient de cette diviſion à la racine pour ſon troiſiéme caractere.

Il faut former à part les produits des deux premiers caracteres (marquez par *a*) & du troiſiéme (marqué par *b*) qui ſont repréſentez par les produits de la formule.

Ajouter ces produits dans une ſomme, obſervant qu'ils ſoient placez dans les rangs qui leur conviennent.

Après avoir ajouté devant le dividende les caracteres *q*, *r*, *ſ*, *&c.* qui reſtent dans la troiſiéme tranche C, ce qui fera le troiſiéme membre de l'extraction, il faut ôter de ce membre la ſomme des produits, & écrire le reſte au deſſous.

Dans notre exemple il faut abaiſſer le premier chifre à gauche

A B C D

qr, pqr, pqr, pqr. (la racine.
12,895,213,625 (234
8

a. memb. 4,895
4 167

3. memo. 728,213
645 904

82 309

Pour le second membre.

$2 = a$

$12 = 3a^2$ Divis. du 2. m.

$3 = b$

$4167 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le troisiéme membre.

$23 = a$

$1587 = 3a^2$ Divis. du 3. m.

$4 = b$

$634800 = 3a^2b$

$11040 = 3ab^2$

$64 = b^3$

$645904 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2 de la troisiéme tranche C devant le reſte 728 de l'operation précedente, & 7282 ſera regardé comme un dividende. Il faut ſuppoſer que les deux premiers chifres 23 de la racine déja découverts ſont repréſentez par a de la formule, & que le troiſiéme caractere qu'on cherche eſt repréſenté par b. * Et comme le dividende 7282 contient le produit repréſenté par $3a^2b$, il faut former le produit repréſenté par $3a^2$, que l'on trouvera être $1587 = 3a^2$, le prendre pour diviſeur; diviſer 7282 par 1587. Le quotient 4 que l'on trouvera, eſt le troiſiéme caractere de la racine que l'on cherche, qui eſt repréſenté par b de la formule. Il faut l'écrire à la racine au devant de 23.

* 187.

Il faut enſuite former à part les produits repréſentez par $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & l'on trouvera $634800 + 11040 + 64 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Il faut les écrire les uns ſous les autres dans les rangs qui leur conviennent. On les ajoutera enſemble; & après avoir tranſporté les chifres 1 & 3 qui reſtoient dans la tranche C, au devant du dividende, pour rendre complet le troiſiéme membre de l'extraction, on ôtera de ce membre 728213 la ſomme des produits 645904, & on écrira le reſte 82309 au deſſous: & la partie de l'operation qui fait découvrir les trois premiers caracteres de la racine eſt achevée.

4°. Quand la puiſſance numerique, dont on cherche la racine, a beaucoup de tranches, on trouvera de ſuite le quatriéme caractere de la racine, le cinquiéme, le ſixiéme, & les autres ſuivans juſqu'au dernier, de la même maniere qu'on a trouvé le troiſiéme; en ſuppoſant pour découvrir de ſuite chacun de ces caracteres, que dans les produits de la formule, a repréſente tous les caracteres déja découverts, & que b repréſente le caractere qu'on cherche, qui eſt celui qui les ſuit; & employant les produits de la formule pour le découvrir, comme on l'a expliqué dans le troiſiéme article qui précede; & quand on aura operé ſur la derniere tranche à droite, l'operation ſera achevée; & ſi l'on ne trouve aucun reſte, c'eſt à dire, ſi après la derniere operation il reſte zero, la puiſſance numerique eſt *parfaite*, & la racine qu'on a découverte en eſt la racine exacte; ſi l'on trouve un reſte, la racine découverte eſt la racine de la plus grande puiſſance parfaite du même degré, qui eſt contenue dans la puiſſance numerique imparfaite propoſée; c'eſt à dire, le nombre propoſé étant diminué de ce reſte, eſt la puiſſance numerique parfaite de la racine qu'on a trouvée.

$A \quad B \quad C \quad D$

$qr, pqr, pqr, pqr,$ { la racine.
$12,895,213,625$ { 2345

$8 = a^3$

a. memb. $4,895$

$4\ 167 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. memb. $728,213$

$645\ 904 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4. memb. $82\ 309,625$

$82\ 309,625 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$00,000,000$

Pour le ſecond membre.

$2 = a$

$12 = 3a^2$ diviſ. du 2. m.

$3 = b$

$4167 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le troiſiéme membre.

$23 = a$

$1587 = 3a^2$ diviſ. du 3. m.

$4 = b$

$645904 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le quatriéme membre.

$234 = a$

$164268 = 3a^2$ diviſ. du 4. m.

$5 = b$

$8213400 = 3a^2b$

$175500 = 3ab^2$

$125 = b^3$

$82309625 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3.

194. Dans chaque tranche le dividende eſt toujours le reſte de l'operation précedente joint au premier chifre à gauche de cette tranche-là; le membre de l'extraction de cette tranche eſt le dividende joint à tous les caracteres qui reſtoient dans cette tranche-là. Dans la pratique on tranſporte ordinairement toute la tranche ſur laquelle on va operer au devant du reſte de l'operation précedente, ce qui fait le membre ſur lequel on va operer, & l'on met un point ſous le chifre de ce membre, qui eſt le premier à gauche de la tranche qu'on a tranſportée, pour marquer que le dividende de ce membre ne commence qu'à ce chifre-là. On tranche auſſi par une petite ligne chaque chifre de la tranche tranſportée, ou bien on marque des points au deſſous des chifres de cette tranche, pour faire ſouvenir qu'on a operé ſur cette tranche. Le diviſeur eſt toujours le double de tous les caracteres déja découverts pour la racine quarrée; le triple de la 2e puiſſance de la ſomme des caracteres déja découverts pour la racine cubique ou 3e, le quadruple de la 3e puiſſance de la ſomme des caracteres déja découverrs pour la racine 4e, le quintuple de la 4e puiſſance de la ſomme des caracteres déja découverts pour la racine 5e, & ainſi de ſuite. Le caractere de la tranche ou du membre ſur lequel on opere, ſe trouve en faiſant la diviſion du dividende de ce membre par ſon diviſeur, & prenant le quotient de la diviſion pour ce caractere. Mais il arrive ſouvent qu'il eſt trop grand; c'eſt pourquoi avant de l'écrire à la racine, il faut former les produits que preſcrit la formule pour ce membre-là; & ſi l'on trouve que la ſomme de ces produits eſt contenue dans ce membre-là, il faut écrire à la racine le quotient qu'on a trouvé; ſi la ſomme de ces produits ſurpaſſe ce membre-là, ce qui arrive ſouvent, il faut diminuer le quotient de 1, 2, 3, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que la ſomme des produits que preſcrit la formule, ſoit contenue dans le membre ſur lequel on opere; & le quotient ainſi diminué ſera le caractere qui convient à la tranche ſur laquelle on opere. Et l'on remarquera que quand même la ſomme des produits ſe trouveroit préciſément égale au membre ſur lequel on opere, & qu'en l'ôtant de ce membre il ne reſteroit rien, le quotient n'en ſeroit pas

moins le caractere de cette tranche, & qu'ainſi, pourvû que la ſomme des produits preſcrits par la formule puiſſe être retranchée du membre ſur lequel on opere, le quotient ne ſçauroit être trop grand.

4.

195. Si le diviſeur d'une tranche n'étoit pas même contenu une fois dans le dividende, ou ſi y étant contenu une fois la ſomme des produits preſcrits par la formule étoit plus grande que le membre ſur lequel on opere, il faudroit écrire zero à la racine pour le caractere de cette tranche-là, & l'operation ſeroit finie pour cette tranche; il faudroit abbaiſſer le premier chifre à gauche de la tranche ſuivante devant le membre qui a donné zero pour la racine, & ce membre joint à ce premier chifre ſeroit le dividende de la tranche ſuivante : l'on peut même trouver pluſieurs zeros de ſuite pour les caracteres de la racine.

5.

196. Lorſqu'on cherche la racine d'un nombre, qui eſt telle que ſon expoſant a des nombres entiers pour diviſeurs exacts, dont le produit forme cet expoſant; on pourroit bien trouver cette racine par la formule qui lui convient; mais il eſt bien plus facile de trouver la racine du nombre propoſé, en cherchant d'abord la racine de ce nombre marquée par l'un des diviſeurs exacts, en commençant par le plus ſimple; puis la racine du nombre qu'on vient de trouver pour racine, qui eſt marquée par le diviſeur ſuivant; enſuite la racine du nombre qu'on vient de découvrir, qui eſt marquée par le diviſeur ſuivant, & continuer ainſi juſqu'à la racine qui eſt marquée par le dernier des diviſeurs exacts, dont le produit forme l'expoſant de la racine qu'on cherche. Par exemple, ſi l'on veut la racine 4e d'un nombre, l'expoſant de cette racine étant $4 = 2 \times 2$, il faut d'abord chercher la racine 2e du nombre propoſé, puis la racine 2e de la racine qu'on vient
*180. de trouver : * cette derniere ſera la racine 4e du nombre propoſé. De même ſi l'on veut la racine 6e d'un nombre propoſé, l'expoſant étant $6 = 2 \times 3$, il faut d'abord chercher la racine 2e du nombre propoſé, & enſuite la racine 3e de la racine précedente, & cette racine 3e ſera la racine 6e du nombre propoſé.

Si

Si l'on veut la racine 8e ; l'expoſant étant $8 = 2 \times 2 \times 2$, il faut d'abord chercher la racine 2e du nombre propoſé, puis la racine 2e de la racine precedente ; & enfin la racine 2e de la précedente. Cette derniere * ſera la racine 8e qu'on cherchoit. *180.

Si l'on veut la racine 12e, l'expoſant étant $12 = 2 \times 2 \times 3$, il faut d'abord chercher la racine 2e, puis la racine 2e de la précedente, & enfin la racine 3e de la précedente. Cette derniere * ſera la racine 12e qu'on cherchoit. Il en eſt de même des autres racines dont les expoſans ont des nombres entiers pour diviſeurs exacts. *180.

Application du Problême à des exemples.

I.

Exemples de l'extraction de la racine quarrée.

AVERTISSEMENT.

L'EXTRACTION de la racine quarrée ou 2e eſt plus d'uſage dans les Mathematiques que l'extraction des racines dont les expoſans ſont plus élevez ; c'eſt pourquoi on en va donner la pratique qui paroît la plus facile de toutes, & qui eſt cependant déduite de la formule $a^2 + 2ab + b^2$.

Pratique qui paroît la plus facile de l'extraction de la racine quarrée.

ON partage le nombre, dont on cherche la racine quarrée, en tranches, chacune de deux rangs, allant de la droite à la gauche : la tranche la plus à gauche peut n'avoir qu'un caractere.

On tire un arc à la droite du nombre propoſé, & la place qui eſt au haut de cette arc ſera celle de la racine qu'on veut trouver.

On cherche par le moyen de la table *de l'article* 190 quel eſt le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche *A*. On en écrit la racine à la place qui lui eſt deſtinée, pour le premier caractere de la racine qu'on cherche. On retranche le quarré de cette racine de la tranche *A* ; & l'on écrit le reſte au deſſous. On abbaiſſe la tranche *B* au devant du reſte qu'on vient d'écrire, c'eſt le ſecond membre de l'extraction.

On marque un point ſous celui des chiſres de la tranche *B* qu'on vient d'abbaiſſer, qui eſt le plus à gauche, & le reſte joint à ce chiſre eſt le dividende de ce membre. On diſtingue de la même maniere le dividende de chacun des membres ſuivans.

Pour avoir le diviſeur de chaque membre, on multiplie les caracteres de la racine déja découverts par 2, & on en écrit le produit au deſſous de la racine, c'eſt le diviſeur de ce membre; c'eſt à dire, on écrit le double des caracteres déja découverts, & ce double eſt le diviſeur du membre ſur lequel on opere.

On cherche combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende, & l'on écrit le quotient qui marque ce nombre de fois, au devant des caracteres de la racine qui ſont déja découverts, & on l'écrit encore au devant du diviſeur.

On multiplie par le quotient qu'on vient de trouver le diviſeur augmenté, comme on l'a dit, du même quotient, & à meſure qu'on fait cette multiplication, ſans l'écrire, on retranche les produits particuliers qu'on trouve, du membre ſur lequel on opere, comme dans *la pratique abregée de la diviſion*, & on écrit le reſte au deſſous du membre ſur lequel on opere.

On continue cette maniere d'operer ſur toutes les tranches; & quand on a operé ſur la derniere, l'operation eſt achevée, & le nombre que l'on a écrit à la racine, eſt la racine quarrée du nombre propoſé que l'on cherchoit.

I. EXEMPLE.

A B C D { racine. 2345 } 5, 49, 90, 25

$2 = a$
$3 = b$
} Pour le 1. membre.

4

2. membre.	1 49		$43 = 2a + b$
3. membre.	20 90		$464 = 2a + b$
4. membre.	2 34 25		$4685 = 2a + b$
reſte.	0 00 00		

Pour extraire la racine quarrée du nombre 5499025, 1°, on le partage en tranches chacune de deux caracteres allant de droite à gauche, & la tranche la plus à gauche n'a que le

ſeul chifre 5. Comme il y a quatre tranches, la racine doit avoir quatre caracteres. On trouve le premier en conſiderant que 4 eſt le plus grand quarré contenu dans 5 qui fait la tranche *A*. On écrit la racine du quarré 4, qui eſt $2 = a$, à la racine, & l'on retranche 4 quarré du premier caractere 2, de 5, & l'on écrit le reſte 1 au deſſous.

2°. Pour trouver le ſecond caractere repréſenté par b, on abbaiſſe la ſeconde tranche *B* devant le reſte 1, & l'on a le ſecond membre 149. On marque un point ſous 4 pour diſtinguer le dividende qui eſt 14. On écrit le double du premier caractere $2 = a$, lequel double de 2 eſt $4 = 2a$, ſous la racine : c'eſt le diviſeur de ce membre.

On dit enſuite combien de fois le diviſeur 4 eſt-il dans le dividende 14? On trouve qu'il y eſt 3 fois. On écrit $3 = b$ à la racine, & encore au devant du diviſeur 4.

Puis on multiplie $43 = 2a + b$ par $3 = b$, & en même temps l'on ôte le produit $129 = 2ab + b^2$ du membre 149, ſans rien écrire que le reſte, de cette maniere. $3 \times 3 = 9$, ôtant 9 de 9 il reſte 0. On écrit 0 ſous 9. Puis on dit $3 \times 4 = 12$; $14 - 12 = 2$, on écrit 2 ſous 4, & l'operation du ſecond membre eſt finie, & le reſte eſt 20.

3°. On abbaiſſe devant le reſte 20 la tranche *C*, c'eſt à dire 90, & l'on a le troiſiéme membre 2090, on marque un point ſous 9, & le dividende eſt 209. On multiplie les deux caracteres déja découverts $23 = a$ par 2, & l'on écrit le produit $46 = 2a$ ſous le diviſeur du membre précedent, & c'eſt le diviſeur du troiſiéme membre. Comme le diviſeur $46 = 2a$ a deux rangs, on conçoit que 6 eſt ſous 9 du dividende, & 4 ſous 0. Et l'on dit combien de fois 4 eſt-il dans 20? Il y eſt 5 fois; mais voyant que 5×46 ſurpaſſeroit le dividende 209, on ne prend que 4 pour quotient. On écrit $4 = b$ à la racine, & encore au devant du diviſeur 46, ce qui fait $464 = 2a + b$. On multiplie $464 = 2a + b$ par $4 = b$, ce qui fait $1856 = 2ab + b^2$, & on retranche 1856 du troiſiéme membre 2090, & l'on écrit le reſte 234 au deſſous. Cette multiplication & cette ſouſtraction ſe font en même temps de cette façon. $4 \times 4 = 16$. On ne peut ôter 16 de 0; mais ôtant 16 de 20, il reſte 4, qu'on écrit au deſſous de 0, & on retient 2. Puis on dit $4 \times 6 = 24$, & 2 qu'on retenoit, cela fait 26. On ôte 26 de 29, & l'on écrit le reſte 3 ſous 9, &

on retient 2. Enfin l'on dit $4 \times 4 = 16$, $+ 2 = 18$; or $20 - 18 = 2$. On écrit 2 ſous 0, & l'operation de ce membre eſt finie, le reſte eſt 234.

4°. On abbaiſſe la tranche *D*, c'eſt à dire 25 devant 234, cela fait le quatriéme membre 23425. On marque un point ſous 2 pour diſtinguer le dividende 2342. On multiplie les trois caractéres $234 = a$ déja découverts par 2, & l'on écrit le produit $468 = 2a$ pour diviſeur de ce membre ſous le diviſeur du précedent.

On conçoit que le diviſeur 468 eſt ſous le dividende 2342; & l'on dit combien de fois 4 eſt-il dans 23? On trouve qu'il y eſt 5 fois. On écrit $5 = b$ à la racine, & encore devant le diviſeur, ce qui fait $4685 = 2a + b$. On le multiplie par $5 = b$, & l'on ôte le produit $23425 = 2ab + b^2$ du membre 23425, & il ne reſte rien. Cela ſe fait en même temps de cette façon. $5 \times 5 = 25$. $25 - 25 = 0$, on écrit 0 ſous 5, & on retient 2. Puis on dit $5 \times 8 = 40$, $40 + 2 = 42$. $42 - 42 = 0$, on écrit 0 ſous 2, & on retient 4. Après on dit $5 \times 6 = 30$, $30 + 4 = 34$. $34 - 34 = 0$, on écrit 0 ſous 4, & on retient 3. Enfin $5 \times 4 = 20$, $20 + 3 = 23$. $23 - 23 = 0$. On écrit ſi l'on veut 0 ſous 23.

L'operation ayant été faite ſur le dernier membre, elle eſt achevée, & comme le dernier reſte eſt 0; 2345 eſt la racine exacte du nombre propoſée 5499025 qui eſt un quarré parfait.

On a marqué dans ce premier exemple le rapport de chaque operation à la formule, pour faire voir que la methode dont on s'eſt ſervi revient à celle du Problême. Pour abreger, on ne marquera plus ce rapport de la formule dans les exemples ſuivans.

II. EXEMPLE.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	racine.
7,	29,	16,	20,	09,	00,	00,	2700300
3	29						
0	00	16	20	09			
		00	00	00			

47
54
540
54003
} Diviſeurs.

Pour trouver la racine quarrée du nombre 72916200900000,

1°. On le partagera en tranches chacune de deux rangs, excepté celle qui eſt à gauche; & s'en trouvant ſept, il y aura ſept caracteres dans la racine. Pour avoir le premier caractere, on dira, le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche, c'eſt à dire dans 7 eſt 4, dont la racine 2 doit être le premier caractere de la racine qu'on cherche. Il faut écrire 2 à la racine, & retrancher 4 quarré de 2, de 7, & écrire le reſte 3 ſous la premiere tranche.

2°. Il faut tranſporter la ſeconde tranche 29 au devant du reſte, ce qui fera le ſecond membre 329, & marquer un point ſous 2, pour diſtinguer le dividende 32. Il faut auſſi doubler le caractere 2 déja découvert, & écrire 4 pour le diviſeur du ſecond membre: & dire le diviſeur 4 eſt contenu 8 fois dans le dividende 32. Mais pour examiner, avant d'écrire le quotient 8 à la racine, s'il n'eſt point trop grand, il faut imaginer 8 écrit à la racine & devant le diviſeur, & faire par la penſée la multiplication de 48 par 8, en commençant de gauche à droite, & faire en même temps la ſouſtraction, en diſant $8 \times 4 = 32$, $32 - 32 = 0$, ainſi il ne reſteroit que 9 dans le ſecond membre; & diſant $8 \times 8 = 64$; mais 64 ne peut pas ſe retrancher de 9, étant plus grand. Cette operation faite par la ſeule penſée, fait connoître que 8 eſt trop grand; ainſi il ne faut écrire que 7 à la racine, & encore devant le diviſeur 4; & dire $7 \times 7 = 49$. $49 - 49 = 0$, on écrit le reſte 0 ſous 9, & on retient 4 dixaines ajoutées à 9 pour le faire valoir 49, & l'on dit $7 \times 4 = 28$. $28 + 4$ qu'on retenoit $= 32$. $32 - 32 = 0$; on écrit le reſte 0 ſous 2 & ſous 3, & le reſte de ce membre n'eſt que 0.

3°. On tranſporte la troiſiéme tranche 16 devant le reſte précedent, on marque un point ſous le chifre 1 pour diſtinguer le dividende, & l'on écrit pour diviſeur $2 \times 27 = 54$. Mais appercevant que 54 n'eſt point contenu dans le dividende 1, on écrit 0 à la racine, & l'operation de ce troiſiéme membre eſt achevée.

4°. On tranſporte la quatriéme tranche 20 devant le membre précedent, & l'on a 1620 pour le quatriéme membre, on marque un point ſous 2, pour diſtinguer le dividende 162, & l'on écrit pour diviſeur $2 \times 270 = 540$. Mais voyant que ce diviſeur ſurpaſſe le dividende 162, on écrit 0 à la racine pour ſon quatriéme caractere, & l'operation du quatriéme membre eſt achevée.

5°. On abbaiſſe la cinquiéme tranche 09 devant le membre précedent, ce qui fait le cinquiéme membre 162009. On marque un point ſous 0, qui eſt le premier caractere à gauche de la cinquiéme tranche abbaiſſée, pour diſtinguer le dividende 16200. On écrit 2 × 2700 = 5400 pour le diviſeur de ce membre : & imaginant ce diviſeur ſous le dividende, le chifre 5 du diviſeur ſe trouve ſous 16 du dividende : & l'on dit 5 eſt 3 fois dans 16 ; ainſi il faut mettre le quotient 3 à la racine & encore au devant du diviſeur, & dire 3 × 3 = 9. 9 — 9 = 0. On écrit le reſte 0 ſous 9. Puis on dit 3 × 0 = 0, 0 — 0 = 0, on écrit le reſte 0 ſous 0 du dividende, & l'on dit 3 × 0 = 0, 0 — 0 = 0, on écrit le reſte 0 ſous 0 du dividende : & l'on dit 3 × 4 = 12, 12 — 12 = 0, on écrit le reſte 0 ſous 2, & l'on retient 1. Enfin l'on dit 3 × 5 = 15, 15 + 1 qu'on retenoit = 16, 16 — 16 = 0, on écrit le reſte 0 ſous 16. Ainſi l'operation du cinquiéme membre eſt achevée, & le reſte eſt 0.

6°. Le dernier reſte étant 0, & n'y ayant plus que des zeros dans les tranches ſuivantes, il eſt inutile de faire des operations pour ces tranches, par leſquelles on ne trouveroit que 0 pour le caractere de chaque tranche ; il ſuffit d'écrire au devant des caracteres de la racine déja découverts autant de zeros qu'il reſte de tranches ; ſçavoir un zero pour le caractere de chacune de ces tranches, & l'operation ſera entierement achevée. 2700300 eſt la racine quarrée exacte du nombre propoſé 7291620090000.

III. EXEMPLE.

On trouvera de la même maniere la racine quarrée du nombre 3433923. 1°. Après l'avoir partagé en tranches, on dira le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche 3 eſt 1. La racine quarré de 1 eſt 1. Il faut écrire 1 pour le premier caractere de la racine, & retrancher le quarré 1, de la tranche 3, & écrire au deſſous le reſte 2.

. . . . .	(racine.
3,43,39,23	1853
2 43	
19 39	28 }
11 42 3	365 } Divif.
reſte 31 4	3703 }

2°. On abbaiſſera la ſeconde tranche 43 devant le reſte 2,

te qui fera le ſecond membre 243, on mettra un point ſous 4 pour diſtinguer le dividende 24. On écrira 2, double du premier caractere 1, pour le diviſeur du ſecond membre. Et l'on dira combien de fois le diviſeur 2 eſt-il contenu dans dividende 24 ? Il y eſt 12 fois; mais on ne peut écrire que 9: & faiſant l'operation par la penſée, comme dans l'article ſecond de l'exemple précedent, pour éprouver ſi le quotient 9 n'eſt point trop grand, on trouvera qu'on ne peut écrire que 8 pour le ſecond caractere de la racine; on écrira encore 8 au devant du diviſeur 2. Puis on multipliera 28 par 8, & on retranchera du ſecond membre 243 le produit à meſure qu'on le formera, & l'on écrira le reſte 19 au deſſous du ſecond membre.

3°. On tranſportera la troiſiéme tranche 39 devant le reſte 19, & l'on aura le troiſiéme membre 1939. On diſtinguera par un point ſous 3 le dividende 193. On écrira auſſi le diviſeur $2 \times 18 = 36$; & l'on trouvera en faiſant l'épreuve qu'on ne doit écrire que 5 pour le troiſiéme caractere de la racine, on l'écrira encore devant le diviſeur 36, & l'on ôtera le produit 5×365, du troiſiéme membre 1939, & l'on écrira le reſte 114 au deſſous.

4°. On deſcendra la derniere tranche 23 au devant du reſte 114, ce qui donnera le quatriéme & dernier membre 11423. On diſtinguera par un point le dividende 1142. On formera le diviſeur $2 \times 185 = 370$. On trouvera que le quotient eſt 3. On l'écrira pour le dernier caractere de la racine, & encore au devant du diviſeur 370. On retranchera le produit 3×3703 du dernier membre 11423, & l'on écrira au deſſous le reſte 314.

Le reſte 314 fait voir que le nombre propoſé 2433923, n'eſt pas un quarré parfait. La racine trouvée 1853 eſt la racine du plus grand quarré parfait contenu dans le nombre propoſé, lequel quarré eſt 3433609; c'eſt à dire le nombre propoſé diminué du reſte 314.

La Methode pour extraire les racines des nombres qui contiennent des parties décimales.

197. L'EXTRACTION des racines des nombres qui contiennent des parties décimales, ſe fait de la même maniere que l'extraction des racines des nombres entiers. Il faut ſeule-

ment obſerver, 1°. Quand le nombre propoſé contient des nombres entiers & des parties décimales, d'extraire d'abord la racine des entiers, comme s'ils étoient ſeuls, en les diſtinguant en tranches, comme s'il n'y avoit que ces entiers, & d'ajouter aux tranches des entiers les tranches des parties décimales du nombre propoſé, faiſant la diſtinction de ces tranches des parties décimales en allant de gauche à droite. Par exemple, ſi l'on propoſe de trouver la racine quarrée de 13.242321, les entiers 13 n'occupant que deux rangs, il en faut faire une tranche comme s'ils étoient ſeuls, & diſtinguer enſuite les tranches des parties décimales chacune de deux rangs en allant de gauche à droite de cette maniere 13., 24, 23, 21. Et ſi la derniere tranche à droite n'avoit qu'un caractere, par exemple, le ſeul caractere 2, il faudroit ajouter un 0. pour la faire de deux rangs. Si dans le nombre propoſé il y avoit eu trois rangs de nombres entiers comme dans 132.42321, il auroit fallu faire deux tranches des ſeuls nombres entiers, & ajouter à ces tranches celles des parties décimales de cette maniere 1, 32., 42, 32, 10. S'il falloit trouver la racine cubique ou 3e de 1324.2321 où les entiers 1324 occupent quatre rangs, il en faudroit diſtinguer les tranches comme on le voit ici 1, 324., 232, 100; c'eſt à dire, il faudroit diſtinguer les tranches des entiers comme s'ils étoient ſeuls, & y ajouter les tranches des parties décimales chacune de trois rangs.

2°. On remarquera que le point qui diſtinguera dans la racine les parties décimales des entiers, doit être placé immédiatement après les caracteres de la racine des entiers.

3° Quand le nombre dont on veut extraire la racine ne contient que des parties décimales ſans entiers, il faut commencer la diſtinction des tranches par la gauche en allant vers la droite; & pour faire mieux concevoir aux Commençans la maniere de diſtinguer les tranches, on ſuppoſera toujours que zero qui eſt au devant du point qui ſepare les parties décimales d'avec les entiers qui ſont repréſentez par zero quand il n'y en a point, que ce zero, dis-je, qui repréſente la place des entiers, doit faire la premiere tranche, laquelle ne donnera pour la racine que zero : la tranche ſuivante en allant de gauche à droite, doit contenir deux rangs quand on cherche la racine quarrée; trois rangs quand on cherche

cherche la racine 3e; quatre rangs quand on cherche la racine 4e, & ainſi de ſuite. Les tranches ſuivantes vers la droite doivent contenir chacune autant de rangs que la précedente, & quand la derniere à droite en contient moins, il faut lui donner le même nombre de rangs en lui ajoutant des zeros.

Par exemple, ſi l'on veut trouver la racine quarrée de 0. 13242321, on diſtinguera ainſi les tranches 0., 13, 24, 23, 21. Si l'on veut chercher la racine quarrée de 0. 013242321, on en diſtinguera ainſi les tranches 0., 01, 32, 42, 32, 10. Si l'on cherche la racine quarrée de 0. 0001324232 1, on en diſtinguera ainſi les tranches 0., 00, 01, 32, 42, 32, 10.

Si l'on cherche la racine 3e de 0. 13242321, on en diſtinguera ainſi les tranches 0., 132, 423, 210. Si c'eſt la racine 3e de 0. 013242321, on en diſtinguera ainſi les tranches 0., 013, 242, 321. Si l'on veut la racine 3e de 0.0013242321, on le diſtinguera ainſi en tranches 0., 001, 324, 232, 100. Si l'on cherche la racine 3e de 0. 000001324232 1, on en marquera ainſi les tranches 0., 000, 001, 324, 232, 100. Il en eſt de même des autres.

Il faut d'abord écrire 0 dans la racine pour repréſenter la racine des entiers, & marquer enſuite à droite de ce 0 le point qui ſepare les parties décimales de la racine d'avec les entiers; & quand il y a encore des tranches de zeros, comme dans 0., 000, 000, 001, 324, 232, 100, il faut marquer à la racine un 0 pour chaque tranche qui ne contient que des zeros ſans chifre, & commencer l'operation à la tranche qui contient quelque chifre; dans cet exemple on la commencera à la tranche 001.

IV. EXEMPLE.

Qui contient des parties décimales.

. . . . .		
13., 24, 23, 21	racine.	
4 24	3.639	
28 23	66	diviſeurs.
6 54 21	723	
reſte. 0 00 00	7269	

POUR trouver la racine quarrée du nombre 13.242321, 1°. On le partagera en tranches ſuivant la methode d'extraire

les racines des nombres qui ont des parties décimales, comme on le voit dans l'exemple. Enſuite on dira, 1°. Le plus grand quarré contenu en 13 eſt 9, ſa racine eſt 3, qu'on écrira à la racine, & on marquera au devant de ce 3 le point qui doit ſéparer les parties décimales. On retranchera 9, quarré de 3, de 13, & on écrira le reſte 4.

2°. On abbaiſſera 24 devant le reſte 4, & le ſecond membre ſera 424. On diſtinguera le dividende 42 par un point ſous 2, & on doublera 3 de la racine pour avoir le diviſeur 6. Puis on dira 6 eſt 7 fois dans 42; mais faiſant l'épreuve par la penſée, on trouvera qu'il ne faut écrire que 6 à la racine & encore au devant du diviſeur; on ôtera le produit 6 × 66 de 424, & on écrira le reſte 28 au deſſous.

3°. On tranſportera 23 devant le reſte, l'on diſtinguera par un point dans le troiſiéme membre 2823, le dividende 282; on écrira 2 × 36 = 72 pour diviſeur; & ayant trouvé le quotient 3, on l'écrira à la racine & encore au devant du diviſeur. On ôtera 3 × 723, de 2823, & l'on écrira le reſte 654 au deſſous.

4°. On deſcendra 21 devant le reſte précedent, & on diſtinguera par un point dans le quatriéme membre 65421, le dividende 6542. On écrira le diviſeur 2 × 363 = 726; on écrira à la racine le quotient 9 & encore devant le diviſeur. On ôtera 9 × 7269 de 65421, & l'on écrira le reſte 0 au deſſous. Et ce dernier reſte 0 fera connoître que 3. 639 eſt la racine exacte du nombre propoſé.

V. EXEMPLE.

.. ..	racine.	
1,32.,42,32,10	11.507	
0 32		
	21	
11 42	225	diviſeurs.
0 17 32 10	230	
reſte 1 21 61	23007	

POUR trouver la racine 2e du nombre décimal 132.42321 qui a trois rangs d'entiers, 1°. Il faut partager les entiers en deux tranches 1, 32, & partager, en allant de gauche à droite, les parties décimales en tranches chacune de deux rangs, ajoutant un zero à la derniere tranche à droite pour lui donner

deux rangs. Enſuite on dira 1 eſt le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche. On écrira 1 racine quarré de 1 à la racine. On retranchera 1, quarré de 1, de la premiere tranche 1, & on écrira le reſte zero au deſſous. On abbaiſſera la ſeconde tranche 32 devant le reſte 0; on continuera l'operation comme on le voit dans l'exemple, & l'on trouvera la racine 11. 507, & le reſte 12161 qui marque que le nombre propoſé n'eſt pas un quarré parfait; mais étant diminué du reſte 12161, il devient 132. 411049 qui eſt un quarré parfait, dont la racine eſt 11. 507. On marquera dans la racine le point qui ſépare les parties décimales après 11, qui expriment la racine des tranches du nombre entier 132.

VI. EXEMPLE.

. .. .		racine.	
0.,00,01,32,42,32,10		0.011507	
0 32			
11 42		21	
		225	diviſeurs.
0 17 32 10		230	
reſte 1 21 61		23007	

POUR trouver la racine quarrée du nombre décimal 0. 000132423210, 1°, on le partagera en tranches, comme on le voit dans l'exemple; on écrira d'abord 0 à la racine pour le caractere de la premiere tranche à gauche, & il repréſentera la place des entiers. On marquera devant ce 0 de la racine, le point qui doit ſéparer les parties décimales de la racine d'avec les entiers; & à cauſe de la ſeconde tranche 00, qui ne contient que des zeros, on écrira un zero à la racine pour le caractere de cette tranche. Mais la troiſiéme tranche 01 contenant le chifre 1, on commencera à cette tranche l'operation, & l'on dira 1 eſt le plus grand quarré contenu dans cette tranche, la racine quarrée de 1 eſt 1, on écrira 1 à la racine, l'on retranchera 1 quarré de 1, de la tranche 01, & on écrira le reſte 0 ſous cette tranche.

2°. On abbaiſſera la tranche ſuivante 32 devant ce reſte; on continuera l'operation que l'on voit toute faite dans l'exemple, comme dans les exemples précedens.

Exemples de l'extraction de la racine cubique ou 3e.

VII. EXEMPLE.

A B C D

19,748,688,691 } racine. 2703

8

11 748 ſecond membre.

11 683

00 065,688,691 3e & 4e membr.

65 682 927

00 005 764 reſte.

Pour le troiſiéme membre.

$27 = a$

$0 = b$ $2187 .. = 3a^2$ diviſeur.

Pour le quatriéme membre.

$270 = a$

$218700 .. = 3a^2$ diviſeur.

$3 = b$ $2430 . = 3ab$

$9 = b^2$

$21894309 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$3 = b$

$65682927 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le ſecond membre.

$2 = a$

$9 = b$ $12 .. = 3a^2$ diviſeur.

$54 . = 3ab$

$81 = b^2$

$1821 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$9 = b$

$16389 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le ſecond membre.

$2 = a$

$8 = b$ $12 .. = 3a^2$ diviſeur.

$48 . = 3ab$

$64 = b^2$

$1744 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$8 = b$

$13952 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le ſecond membre.

$2 = a$

$7 = b$ $12 .. = 3a^2$ diviſeur.

$42 . = 3ab$

$49 = b^2$

$1669 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$7 = b$

$11683 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

POUR trouver la racine cubique ou troiſiéme du nombre 19748688691, 1°, on le partagera en tranches de trois rangs chacune, en allant de la droite à la gauche. La premiere à gauche ne ſe trouve avoir que deux rangs. Enſuite on dira le plus grand cube contenu dans la premiere tranche *A* eſt 8. Sa racine cubique eſt 2, on écrira $2 = a$ pour le premier

caractere de la racine, on ôtera de la premiere tranche, 8 cube de 2, & l'on écrira le reſte 11 au deſſous.

2°. On abbaiſſera la ſeconde tranche 748 au devant du reſte 11, ce qui donnera le ſecond membre 11748. On diſtinguera le dividende 117 par un point ſous 7. On formera le diviſeur en multipliant $2 \times 2 = 4 = a^2$ par 3, & l'on aura $12 = 3a^2$ pour diviſeur, qu'on écrira à part. Faiſant la diviſion on trouvera le quotient 9. Mais avant de l'écrire à la racine, on examinera ſi 9 n'eſt point trop grand: on ſuppoſera $9 = b$ de la formule, on formera à deux fois les produits preſcrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. On prendra d'abord les produits $3 \times 2 \times 9 = 54 = 3ab$, & $9 \times 9 = 81 = b^2$, qu'on écrira les uns ſur les autres dans les rangs qui leur conviennent, & on multipliera leur ſomme $1821 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $9 = b$, & on verra que le produit $16389 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ſurpaſſe le ſecond membre 11748. Ainſi 9 eſt trop grand.

On forme à deux fois les produits preſcrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pour abreger le calcul dans la pratique, comme on le va voir dans cet exemple. Pour éprouver ſi 9 n'eſt point trop grand, on fera par la penſée la multiplication de $1821 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $9 = b$, en allant de la gauche à la droite, & l'on fera en même temps la ſouſtraction du ſecond membre, en diſant $9 \times 1 = 9$; $11 - 9 = 2$; 2 avec 7 dans le rang ſuivant $= 27$. Puis on dira $9 \times 8 = 72$, mais 72 ſurpaſſe 27, ainſi on ne peut pas faire la ſouſtraction. Cela fait connoître que 9 eſt trop grand.

On ſuppoſera que le quotient qui doit être le ſecond caractere de la racine eſt $8 = b$, on formera les produits preſcrits par $3a^2 + 3ab + b^2$ qu'on ajoutera dans une ſomme, & l'on multipliera par la penſée cette ſomme $1744 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $8 = b$, en allant de gauche à droite pour voir ſi 8 n'eſt point trop grand, & on fera en même temps la ſouſtraction des produits à meſure qu'on les formera, du ſecond membre, en diſant $8 \times 1 = 8$. $11 - 8 = 3$. 3 avec 7 dans le rang ſuivant $= 37$. Puis on dira $8 \times 7 = 56$. On ne peut pas ôter 56 de 37. Ainſi 8 eſt encore trop grand.

On n'écrira donc que 7 à la racine pour le caractere du 2e membre, & même on ne l'écrira qu'après avoir éprouvé par l'eſprit, de la maniere qu'on vient de le faire pour 9 & pour 8,

que 7 n'eſt point trop grand. On ſuppoſera $7 = b$, on formera les produits preſcrits par la formule $3a^2 + 3ab + b^2$, & on fera à l'ordinaire la multiplication de la ſomme de $1669 = 3a^2 + 3ab + b^2$ par $7 = b$, en allant de la droite à la gauche; & à meſure qu'on trouvera les produits particuliers, on les retranchera, ſans les écrire, du ſecond membre, & l'on écrira ſeulement le reſte au deſſous du ſecond membre, en diſant $7 \times 9 = 63$. $68 - 63 = 5$, on écrira le reſte 5 ſous 8 du ſecond membre, & l'on retiendra 6 ajouté à 8 pour le faire valoir 68. Puis l'on dira $7 \times 6 = 42$, $42 + 6$ qu'on retenoit $= 48$. $54 - 48 = 6$. On écrira le reſte 6 ſous 4, & on retiendra 5. Après on dira $7 \times 6 = 42$. $42 + 5$ qu'on retenoit $= 47$. $47 - 47 = 0$. On écrira le reſte o ſous 7, & on retiendra 4. Après on dira $7 \times 1 = 7$. $7 + 4$ qu'on retenoit $= 11$. $11 - 11 = 0$. On écrira le reſte o ſous 11, & l'operation du ſecond membre ſera achevée : le reſte ſera 65.

3°. On tranſportera la troiſiéme tranche 688 devant le reſte 65. Cela fera le troiſiéme membre 65688. On diſtinguera le dividende 656 par un point ſous 6. On formera le diviſeur en ſuppoſant $27 = a$, & prenant le produit $3 \times 27 \times 27 = 2187 = 3a^2$. Ce produit ſera le diviſeur du troiſiéme membre. Mais voyant que le diviſeur 2187 n'eſt pas contenu dans le dividende 656, on écrira o pour le troiſiéme caractere de la racine, & l'operation du troiſiéme membre ſera achevée.

4°. On écrira la quatrieme tranche 691 devant le troiſiéme membre. Cela fera le quatriéme membre 65688691. On diſtinguera le dividende 656886 par un point ſous 6. Pour avoir le diviſeur de ce membre on ſuppoſera $270 = a$, & l'on prendra le produit $3 \times 270 \times 270 = 218700 = 3a^2$. On trouvera que le quotient eſt 3, que l'on écrira à la racine. On ſuppoſera $3 = b$. On formera les produits que preſcrit la formule $3a^2 + 3ab + b^2$: On les ajoutera dans une ſomme : on multipliera par l'eſprit cette ſomme $21894309 = 3a^2 + 3ab + b^2$. par $3 = b$, & à meſure qu'on formera les produits particuliers, on les retranchera, ſans les écrire, du quatrieme membre, & on écrira le reſte au deſſous. On dira donc $3 \times 9 = 27$. $31 - 27 = 4$; on écrira le reſte 4 ſous 1, & on retiendra 3 qu'on a ajouté à 1 pour le faire valoir 31. Puis on dira $3 \times 0 = 0$. $0 + 3$ qu'on retenoit $= 3$. $9 - 3 = 6$. On écrira le reſte 6

ſous 9. Après on dira $3 \times 3 = 9$. $16 - 9 = 7$. On écrira le reſte 7 ſous 6, & on retiendra 1. On dira enſuite $3 \times 4 = 12$. $12 + 1$ qu'on retenoit $= 13$. $18 - 13 = 5$. On écrira 5 au deſſous de 8, & on retiendra 1. Après quoi on dira $3 \times 9 = 27$. $27 + 1$ qu'on retenoit $= 28$. $28 - 28 = 0$. On écrira le reſte 0 ſous 8, & on retiendra 2; & l'on dira $3 \times 8 = 24$, $24 + 2$ qu'on retenoit $= 26$. $26 - 26 = 0$. On écrira le reſte 0 ſous 6, & on retiendra 2. Enſuite on dira $3 \times 1 = 3$. $3 + 2$ qu'on retenoit $= 5$. $5 - 5 = 0$; on écrira le reſte 0 ſous 5. Enfin on dira $3 \times 2 = 6$. $6 - 6 = 0$. On écrira, ſi l'on veut, le reſte 0 ſous 6. Le reſte du quatriéme membre eſt 5764.

L'operation eſt achevée, n'y ayant plus de tranches ſur leſquelles il faille operer. 2703 eſt la racine du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 19748688691. Si l'on diminue le nombre propoſé du dernier reſte 5764, on aura ce plus grand cube.

VIII. EXEMPLE.

Qui contient des parties décimales.

A	B	C	(racine.
932..	413,	024	(9.76
729			
203	413		ſecond membr.
183	673		
19	740	024	3. membr.
17	041	176	
2	698	848	reſte.

Pour le troiſiéme membre.

$$97 = a$$

$$28227.. = 3a^2$$

$$6 = b \quad 1746. = 3ab$$

$$36 = b^2$$

$$2840196 = 3a^2 + 3ab + b^2$$

$$6 = b$$

$$17041176 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Pour le ſecond membre.

$$9 = a$$

$$243.. = 3a^2 \text{ diviſeur.}$$

$$8 = b \quad 216. = 3ab$$

$$64 = b^2$$

$$26524 = 3a^2 + 3ab + b^2$$

$$8 = b$$

$$212192 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Pour le ſecond membre.

$$9 = a$$

$$243.. = 3a^2 \text{ diviſeur.}$$

$$7 = b \quad 189. = 3ab$$

$$49 = b^2$$

$$26239 = 3a^2 + 3ab + b^2$$

$$7 = b$$

$$183673 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ON trouvera de la même maniere la racine cubique du nombre décimal 932.413024 : la ſeule choſe à quoi il faut prendre garde, eſt de commencer le partage des tranches par les entiers. Et comme ils occupent trois rangs, ce qui fait une tranche; la premiere tranche ſera des nombres entiers 932. On fera les tranches ſuivantes, en allant de gauche à droite, chacune de trois rangs; & ſi la derniere à droite avoit moins de trois rangs, on y ſuppléroit par des zeros. On operera enſuite à l'ordinaire.

1°. On cherchera dans la table des puiſſances des neuf chifres le plus grand cube contenu dans la premiere tranche 932, & l'on trouvera que c'eſt 729 cube de 9. Ainſi on écrira 9 à la racine pour le premier caractere qui eſt celui des entiers, & l'on mettra au devant de 9 le point qui doit diſtinguer les parties décimales d'avec les entiers, on ôtera 729, cube de 9, de la premiere tranche 932, & on écrira le reſte 203 au deſſous.

2°. On abbaiſſera la ſeconde tranche 413 devant le reſte, ce qui fera le ſecond membre 203413. On diſtinguera le dividende 2034 par un point ſous 4. On ſuppoſera $9 = a$; on formera le diviſeur 243 . . $= 3a^2$. On fera la diviſion, & on verra d'abord que le quotient 9 ſeroit trop grand. Car en multipliant par la penſée le diviſeur 243 de gauche à droite par 9, & faiſant en même temps la ſouſtraction, on diroit $9 \times 2 = 18.20 - 18 = 2$. Et 2 avec le 3 ſuivant ſeroit 23. On diroit enſuite $9 \times 4 = 36$: on ne peut pas ôter 36 de 23. Ainſi 9 ſeroit trop grand.

On éprouvera auſſi, comme on le voit marqué dans l'exemple, que 8 ſeroit trop grand; c'eſt pourquoi on n'écrira que 7 à la racine : & ſuppoſant $7 = b$, on formera les produits repréſentez par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ſi l'on veut à deux fois, comme on l'a expliqué dans l'exemple précedent. On retranchera du ſecond membre la ſomme de ces produits, & l'on écrira le reſte 19740 au deſſous.

3°. On tranſportera la troiſiéme tranche 024 au devant du reſte précedent, ce qui fera le troiſiéme membre 19740024. On diſtinguera le dividende 197400 par un point ſous 0 de la tranche abbaiſſée. On ſuppoſera la ſomme des caracteres de la racine deja découverts $97 = a$, & on formera le diviſeur

viſeur $28227 = 3a^2$. Faiſant la diviſion on trouvera le quotient $6 = b$ qu'on écrira à la racine. On prendra, ſi l'on veut, à deux fois les produits preſcrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. On retranchera du troiſiéme membre la ſomme de ces produits 17041176, & l'on écrira le reſte 2698848 au deſſous. L'operation eſt achevée. 9. 76 eſt la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé. Ce plus grand cube eſt $932.413024 - 2698848 = 929.714176$.

De l'Extraction de la racine 5e.

IX. EXEMPLE.

A	B	C		
70,	15833,	71424	(	234
32				
38	15833	2. memb.		
32	36343			
5	79490	71424	3. memb.	
5	79490	71424		
0,	00000,	00000 reſte.		

Pour le ſecond membre.

$2 = a$

$4 = b$

$80 \ldots = 5a^4$ diviſeur.
$320 \ldots = 10a^3b$
$640 \ldots = 10a^2b^2$
$640 \ldots = 5ab^3$
$256 = b^4$

$1290656 = 5a^3 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$

$4 = b$

$5162624 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Pour le troiſiéme membre.

$23 = a$

$4 = b$

$1399205 \ldots = 5a^4$ diviſeur.
$486680 \ldots = 10a^3b$
$84640 \ldots = 10a^2b^2$
$7360 = 5ab^3$
$256 = b^4$

$1448726856 = 5a^4 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$

$4 = b$

$57949071424 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Pour le ſecond membre.

$2 = a$

$3 = b$

$80 \ldots = 5a^4$ diviſeur.
$240 \ldots = 10a^3b$
$360 \ldots = 10a^2b^2$
$270 = 5ab^3$
$81 = b^4$

$1078781 = 5a^4 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$

$3 = b$

$3236343 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Pour trouver la racine 5e du nombre 701583371424, 1°. On le partagera en tranches chacune de cinq rangs en allant de la droite à la gauche; la premiere à gauche ſe trouvera n'avoir que deux rangs. On cherchera dans la table des puiſſances des neuf chifres la plus grande cinquiéme puiſſance, repréſentée par a^5 de la formule de la 5e puiſſance, qui eſt contenue dans la premiere tranche à gauche 70, & ayant trouvé que c'eſt 32, 5e puiſſance de 2, on écrira 2 à la racine pour le premier caractere. On retranchera 32, 5e puiſſance de 2, de la premiere tranche 70, & l'on écrira le reſte 38 au deſſous.

2°. On abbaiſſera la ſeconde tranche au devant du reſte 38, ce qui fera le ſecond membre 3815833. On diſtinguera le dividende 3815 par un point ſous 1. La formule de la 5e puiſſance $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ fait voir qu'en ſuppoſant le premier caractere de la racine $2 = a$, il faut prendre $5a^4 = 80$ pour diviſeur. Et faiſant la diviſion, on trouvera d'abord le quotient 4. Mais ſuppoſant $4 = b$, & prenant, ſi l'on veut à deux fois (comme dans les exemples de l'extraction de la racine cubique) les produits que preſcrit la formule, on verra, comme il eſt marqué dans l'exemple, que la ſomme des produits ſurpaſſe le ſecond membre; ainſi 4 eſt trop grand, il ne faut écrire que 3 à la racine. Et ſuppoſant $3 = b$, il faut former, ſi l'on veut, à deux fois les produits repréſentez par $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, retrancher du ſecond membre la ſomme de ces produits, & en écrire le reſte 579490 au deſſous: On en voit l'operation dans l'exemple.

3°. On tranſportera la troiſiéme tranche au devant du reſte précedent, ce qui fera le troiſiéme membre 5794907 1424. On diſtinguera le dividende 5794907 par un point ſous 7. Pour trouver le diviſeur on ſuppoſera la ſomme des deux caracteres déja découverts $23 = a$, & l'on formera le diviſeur 1399205 .... $= 5a^4$. On trouvera que le quotient eſt 4, que l'on écrira à la racine; & ſuppoſant $4 = b$, on prendra les produits repréſentez par la formule $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, comme on le voit dans l'exemple. On retranchera du troiſiéme membre la ſomme de ces produits 57949071424, & le reſte étant zero, on ſera aſſuré que 234 eſt la racine 5e exacte du nombre propoſé qui eſt une 5e puiſſance parfaite.

AVERTISSEMENT.

SI l'on veut un exemple de l'extraction de la racine 5e d'un nombre qui contienne des parties décimales, il n'y a qu'à mettre le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers après 70 dans le nombre 70. 15833, 41424 de l'exemple précédent, faire la premiere tranche à gauche des seuls entiers 70, & distinguer les tranches suivantes de droite à gauche, en donnant à chacune cinq rangs ; extraire ensuite la racine cinquiéme comme dans l'exemple précedent, & mettre un point dans la racine après 2 qui est le chifre de la racine des entiers, pour distinguer le caractere 2 des entiers d'avec les caracteres suivans 34 des parties decimales.

Les Commençans peuvent faire tant d'exemples de l'extraction des racines qu'ils voudront ; ceux que l'on a mis suffisent pour leur faire concevoir la methode generale de faire ces extractions. Il est bon qu'ils se rendent familiere l'extraction de la racine quarrée, qui est celle dont on peut faire plus d'usage dans les Mathematiques. Ils pourront aussi faire quelques exemples de l'extraction de la racine cubique, dont la pratique est necessaire en quelques occasions. Les extractions des racines plus élevées se présentent si rarement qu'il suffit d'avoir bien conçu la maniere de les faire, sans qu'il soit necessaire de se les rendre familieres ; & ils se souviendront qu'il suffit de sçavoir trouver les racines 2e & 3e, pour découvrir * les racines 4es, 6es, 8es, 9es, 12es, &c. * 196.

Démonstration du Problême de l'extraction des racines des nombres.

198. QUAND il ne reste rien à la fin de l'operation, le Problême fait découvrir les caracteres de la racine d'une puissance numerique quelconque, qui sont tels qu'en prenant par ordre les produits de ces caracteres * comme le prescrit la formule de la puissance, on formera la même puissance numerique proposée ; car par l'operation du Problême on retranche par ordre ces mêmes produits de la puissance numerique proposée, & il ne reste rien. Le Problême fait donc trouver la racine de la puissance numerique proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 177.

Quand il y a un reste à la fin de l'operation, il est évident

par le raiſonnement qui précede, que le Problême fait découvrir la racine de la plus grande puiſſance numerique parfaite du même degré, qui eſt contenue dans la puiſſance numerique imparfaite propoſée ; laquelle puiſſance numerique parfaite eſt égale à la puiſſance numerique imparfaite propoſée diminuée du reſte qui s'eſt trouvé à la fin de l'operation.

La formation des puiſſances des nombres qui contiennent des parties décimales étant ſemblable à celle des nombres entiers, la réſolution des unes & des autres, c'eſt à dire, l'extraction de leurs racines eſt auſſi ſemblable, & la démonſtration de l'extraction des racines des unes eſt ſemblable à la démonſtration de l'extraction des racines des autres.

La maniere de s'aſſurer dans la pratique, ſi l'on a ſuivi exactement les regles du Problême.

LA demonſtration précedente ſert à faire connoître que les regles que l'on a données pour l'extraction des racines ſont infaillibles ; mais pour s'aſſurer ſi dans la pratique on les a ſuivies, & ſi l'on n'a point pris un nombre pour un autre, il n'y a qu'à élever la racine qu'on a trouvée à la puiſſance marquée par l'expoſant de la racine, c'eſt à dire au quarré, ſi l'on a extrait la racine quarrée; au cube, ſi l'on a extrait la racine cubique, &c. & la puiſſance qu'on trouvera doit être égale au nombre propoſé dont on a extrait la racine, s'il n'y a point eu de reſte à la fin de l'operation ; s'il y a eu un reſte à la fin de l'operation, il faudra ajouter ce reſte à la puiſſance qu'on trouvera, & la ſomme doit être égale au nombre propoſé.

La maniere de s'aſſurer quand il y a un reſte conſiderable à la fin de l'operation, ſi la racine qu'on a trouvée eſt celle de la plus grande puiſſance du même degré contenue dans le nombre propoſé.

ON a vû, *article* 184, qu'en ſuppoſant que a de la formule de la ſeconde puiſſance repréſente tous les caracteres de la racine d'un quarré parfait, ſi l'on met 1 à la place de b dans $2ab + b^2$, l'on aura $2a + 1$ qui repréſente ce qu'il faut ajouter à ce quarré parfait, pour en faire le quarré parfait, dont la racine ſurpaſſe d'une unité la racine du quarré précedent.

Qu'en ſuppoſant de même que a repréſente tous les caracteres de la racine d'un cube parfait, $3a^2 + 3a + 1$ repréſente les produits qu'il faut ajouter à ce cube, pour avoir le cube de la racine qui ſurpaſſe la premiere de l'unité. Il en eſt de même des puiſſances plus élevées.

L'on déduit de-là que pour s'aſſurer ſi le reſte qu'on trouve après chaque operation de l'extraction de la racine quelconque d'un nombre n'eſt point trop grand, il n'y a qu'à ſuppoſer que a repréſente tous les caracteres de la racine déja découverts, & prendre, quand c'eſt la racine quarrée, les produits repréſentez par $2a + 1$; quand c'eſt la racine cubique, les produits repréſentez par $3a^2 + 3a + 1$; quand c'eſt la racine 5e, les produits repréſentez par $5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$, & ainſi des autres. Si le reſte qu'on a trouvé eſt moindre que la ſomme de ces produits, il eſt évident que la racine découverte eſt celle de la plus grande puiſſance parfaite du même degré, qui eſt contenue dans les tranches ſur leſquelles on a fait l'operation: ſi le reſte qu'on a trouvé ſurpaſſe la ſomme des produits, il eſt évident que la racine trouvée eſt trop petite, & dans ce cas il faut recommencer l'extraction de la racine qu'on cherchoit.

Par exemple, pour s'aſſurer que le reſte 2698848 qu'on a trouvé à la fin de l'operation de la troiſiéme tranche de l'exemple huitiéme n'eſt point trop grand, on ſuppoſera la ſomme des caracteres de la racine déja découverts $976 = a$, & l'on prendra la ſomme des produits que repréſente $3a^2 + 3a + 1$. Cette ſomme 2860657 eſt plus grande que le reſte 2698848; on eſt aſſuré par-là que le reſte n'eſt pas trop grand; c'eſt à dire, que le plus grand cube parfait contenu dans le nombre 932413024, dont on a extrait la racine cubique, eſt le cube parfait qui a pour ſa racine 976.

$$\begin{aligned} 2857728 &= 3a^2 \\ 2928 &= 3a \\ 1 &= 1 \\ \hline 2860657 &= 3a^2 + 3a + 1 \end{aligned}$$

De l'approximation des racines.

ON demontrera dans la ſuite qu'il n'y a aucun nombre, ſoit entier, ſoit rompu, ou l'un & l'autre enſemble, qui puiſſe être la racine exacte d'une puiſſance numerique imparfaite.

Ainſi quand en faiſant l'extraction de la racine d'un nombre, on trouve un reſte à la fin de l'operation, il eſt certain qu'on ne ſçauroit exprimer par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & une fraction joints enſemble, la racine exacte de ce nombre. Cependant la Geometrie fournit une ligne qui eſt la racine exacte d'une puiſſance numerique imparfaite, en ſuppoſant cette puiſſance imparfaite exprimée par une ligne divisée en autant de parties égales que la puiſſance numerique imparfaite contient d'unitez.

Dans la ſcience du calcul des grandeurs en general que nous expliquons ici, on fait deux choſes par rapport à ces racines des puiſſances numeriques imparfaites. 1°. On les exprime par le ſigne radical $\surd$, au deſſus duquel on écrit l'expoſant de la racine. Par exemple, 3 eſt un quarré imparfait, on en exprime la racine de cette maniere $\overset{2}{\surd}3$, c'eſt à dire racine 2e ou quarrée de 3. De même 12 eſt une 3e puiſſance imparfaite, on en exprime ainſi la racine $\overset{3}{\surd}12$; c'eſt à dire racine 3e ou cubique de 12. Il en eſt de même des autres. Ces expreſſions des racines des puiſſances imparfaites, s'appellent les expreſſions des grandeurs *incommenſurables*. On en expliquera le calcul dans le 2e Livre. 2°. Comme l'on a ſouvent beſoin dans les Mathematiques-pratiques d'avoir les racines les plus approchantes qu'il ſe puiſſe des veritables racines de ces puiſſances numeriques imparfaites, leſquelles racines veritables ne peuvent s'exprimer exactement par nombres, la ſcience du calcul donne la methode pour trouver les racines les plus approchantes qu'il ſoit poſſible des veritables racines des puiſſances imparfaites; c'eſt à dire, ces racines approchantes étant multipliées par elles-mêmes continuement autant de fois moins une que leur expoſant contient d'unitez, (une fois quand c'eſt la racine quarrée; deux fois quand c'eſt la racine 3e, & ainſi des autres) les produits approchent de ſi près des puiſſances numeriques imparfaites, que la difference en eſt inſenſible. On appelle cette methode *l'approximation des racines*. La voici.

Methode pour l'approximation des racines.

199. APRES avoir trouvé, par le Problême précedent, la racine de la plus grande puiſſance parfaite, qui eſt contenue dans la puiſſance imparfaite propoſée, il faut marquer au devant de la racine découverte vers la droite le point qui doit diſtinguer les entiers d'avec les parties décimales; ajouter au devant du dernier reſte qui s'eſt trouvé à la fin de l'operation une tranche d'autant de zeros qu'il y a de rangs dans chaque tranche du nombre propoſé ſur lequel on a operé, c'eſt à dire deux zeros ſi l'on extrait la racine quarrée; trois zeros ſi c'eſt la racine 3e, & ainſi des autres; regarder ce reſte avec les zeros ajoutez, comme un nouveau membre de l'extraction; operer ſur ce membre comme l'on a fait ſur ceux qui le précedent, & écrire le caractere, qui convient à ce membre, à la racine au devant du point qui diſtingue les entiers d'avec les parties décimales; c'eſt à dire ce caractere de la racine exprimera des dixiémes; & écrire le reſte que donnera l'operation au deſſous de ce membre.

Il faut ajouter à ce reſte autant de zeros qu'au précedent, ce qui en fera le membre ſuivant de l'operation, & operer ſur ce membre comme ſur le précedent; écrire le caractere qui lui convient à la racine au devant du membre précedent, & le reſte au deſſous.

Il faut continuer d'ajouter ainſi au dernier reſte autant de zeros qu'au précedent, ce qui donnera le membre ſuivant de l'extraction; ajouter au reſte que donnera ce membre le même nombre de zeros qu'au précedent, & ainſi à l'infini ou tant que l'on voudra. Les caracteres des entiers écrits à la racine, joints aux parties décimales qu'on a découvertes par les operations qu'on vient de preſcrire, ſeront la racine approchée de la puiſſance numerique imparfaite ſur laquelle on operoit.

L'approximation des racines des nombres qui contiennent des parties décimales, & où l'on a trouvé un reſte à la fin de l'operation, ſe fait de la même maniere que celles des nombres entiers, excepté qu'il ne faut point marquer d'autre point dans la racine pour diſtinguer les parties décimales d'avec les entiers, que celui qui a été marqué au commencement de l'operation.

Exemple de l'approximation des racines.

```
. . . . . .
3,43,39,23 (1853.0847
2 43                          28  }
  19 39                       365 } diviſeurs.
   1 14 23                    3703}
                              3706
reſte  3 140000               370608
         17513600             3706164
          268894400           37061687
          009462591
```

En faiſant l'extraction de la racine quarrée du quarré imparfait 3433923, dans le troiſiéme exemple, on a trouvé la racine 1853, & le reſte 314. Pour découvrir une racine qui approche tant près qu'on voudra de la veritable racine qu'on ne ſçauroit exprimer par nombres, il faut mettre un point au devant de la racine déja trouvée en entiers 1853; ce point ſervira à diſtinguer les entiers déja découverts d'avec les parties décimales qu'on va y ajouter. Il faut ajouter deux zeros au reſte 314, ce qui donnera le nouveau membre 31400. On diſtinguera le dividende de ce membre 3140 par un point ſous le zero plus à gauche. On formera le diviſeur de ce membre, comme on a formé le diviſeur des autres en multipliant par 2 les caracteres déja découverts, & l'on trouvera 3706 pour le diviſeur; & voyant que ce diviſeur n'eſt pas contenu dans le dividende 3140, on écrira o à la racine pour le caractere de ce membre. On ajoutera deux zeros à ce membre, ce qui donnera le nouveau membre 3140000. On diſtinguera le dividende 314000 par un point ſous le zero le plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviſeur 37060. Faiſant la diviſion on trouvera le quotient 8 qu'on écrira à la racine; & faiſant l'operation ſur ce membre, on trouvera le reſte 175136. On ajoutera deux zeros à ce reſte, ce qui fera le membre ſuivant 17513600. On diſtinguera le dividende par un point ſous le zero plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviſeur de ce membre 370616. On trouvera le quotient 4 qu'on écrira à la

à la racine ; & faiſant l'operation, on aura le reſte 2688944. On lui ajoutera deux zeros, ce qui fera le membre ſuivant 268894400. On diſtinguera le dividende par un point ſous le zero plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviſeur 3706168. On trouvera le quotient 7 qu'on écrira à la racine; & faiſant l'operation ſur ce membre, on trouvera le reſte 9462591.

On peut continuer l'approximation tant qu'on voudra, en ajoutant toujours deux zeros au dernier reſte qu'on aura trouvé, pour en faire le membre ſuivant. Les operations qu'on vient de faire ſuffiſent pour en faire concevoir la methode : & il eſt évident qu'on peut l'appliquer aiſément à l'approximation des racines des nombres qui contiennent des parties décimales ; à l'approximation des racines cubiques, en ajoutant trois zeros au dernier reſte, & de même à chacun des reſtes ſuivans ; à l'approximation des racines 4es, en ajoutant quatre zeros au dernier reſte, & de même à chacun des reſtes ſuivans : enfin à l'approximation des racines dont l'expoſant ſera tel nombre entier qu'on voudra, en ajoutant au dernier reſte, & à chacun des reſtes ſuivans, autant de zeros que l'expoſant de la racine contient d'unitez.

Démonſtration. Il eſt évident qu'ajouter des tranches de zeros au dernier reſte de l'extraction, & aux reſtes ſuivans, eſt la même choſe que de les ajouter d'abord à la puiſſance numerique, dont on a extrait la racine. Par exemple, ajouter deux zeros au reſte 314, enſuite deux au reſte ſuivant, encore deux au troiſiéme reſte, & enfin deux au quatriéme reſte, eſt la même choſe que d'ajouter d'abord huit zeros au quarré imparfait 3433923, en mettant entre ce nombre & ces zeros ajoutez le point qui diſtingue les entiers des parties décimales. De plus ce nombre avec les zeros ajoutez 3433923. 00000000 * n'a point changé de valeur, & il n'y a * 17.
de difference entre 3433923 & 3433923. 00000000 qu'en ce que la premiere expreſſion marque les unitez de ce nombre entieres & ſans être diviſées en parties décimales, & la ſeconde marque les unitez qui compoſent le même nombre partagées en parties décimales.

Or on trouve par la methode d'approximation la racine 1853. 0847 qui contient & la racine 1853 de la plus grande puiſſance en entiers 3433609 contenue dans la puiſſance im-

parfaite propoſée, & de plus le nombre décimal 0. 0847; & la ſomme de ces entiers & de ces parties décimales 1853. 0847 eſt la racine de la puiſſance parfaite 3433922. 90537409, qui eſt un nombre décimal moindre que 3433923. 00000000, & plus grand que 3433609. 00000000.

La methode d'approximation des racines fait donc trouver une racine d'une puiſſance numerique imparfaite, qui approche plus de la veritable racine que la racine qu'on avoit trouvée avant l'approximation.

Il eſt évident que plus on continuera l'approximation, & plus la racine qui viendra de cette approximation ſera approchante de la veritable racine qu'on ne ſçauroit exprimer par nombres.

Dans la pratique, quand on eſt arrivé au rang des parties décimales de la racine approchée où l'on veut terminer l'approximation, (on a terminé l'approximation précedente aux dix milliémes qui occupent le quatriéme rang des parties décimales) on examine ſi dans l'operation ſuivante on trouveroit un nombre décimal pour le caractere ſuivant de la racine approchée, qui fût plus grand ou moindre que 5; ſi l'on voit qu'il doive être plus grand que 5, on augmente d'une unité le caractere décimal, par lequel on a terminé l'operation; & ſi l'on voit qu'il doive être moindre que 5, c'eſt à dire moindre que la moitié d'une unité du rang où l'on a voulu terminer la racine, on laiſſe le dernier caractere décimal tel qu'on l'a trouvé par l'operation. Il eſt viſible que cela ſe fait afin que la racine approchée differe moins de la veritable racine, & que le reſte qu'on néglige ſoit moins conſiderable.

De l'extraction des racines des puiſſances litterales.

L'extraction des puiſſances litterales incomplexes.

200. 1°. POUR extraire la racine quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier, d'une grandeur litterale incomplexe qui n'a qu'une ſeule lettre, comme la racine 3e de a^6, il faut diviſer l'expoſant de la puiſſance de la grandeur litterale par l'expoſant de la racine; & écrire le quotient pour l'expoſant de la racine qu'on cherchoit. Ainſi la racine 3e de a^6 eſt a^2. La racine 2e de a^2 eſt a^1; la racine 4e de a^4 eſt a^1; la racine

3e de a^{12} eſt a^4. C'eſt une ſuite évidente de l'*article* 150, & de la formation des puiſſances d'une grandeur.

201. 2°. Quand l'expoſant de la racine n'eſt pas un diviſeur exact de l'expoſant de la puiſſance; on écrit pour l'expoſant de la racine qu'on cherche * la fraction dont le numerateur eſt l'expoſant de la puiſſance, & le dénominateur l'expoſant de la racine. Ainſi la racine 2e de a^1 eſt $a^{\frac{1}{2}}$. La racine 2e de a^2 eſt $a^{\frac{2}{2}}$. La racine 5e de a^6 eſt $a^{\frac{6}{5}}$. Ces expreſſions ſont des ſignes arbitraires qu'on a déterminez à marquer les racines des puiſſances. * 153.

202. Quand les expoſans des grandeurs litterales ſont indéterminez, c'eſt à dire quand ces expoſans ſont des lettres, l'extraction de la racine ſe fait de la même maniere. Ainſi la racine m de la puiſſance a^{mn} eſt a^n. La racine m de a^n eſt $a^{\frac{n}{m}}$ la racine m de a^m eſt a^1. La racine 2e de a^n eſt $a^{\frac{n}{2}}$. La racine n de a^1 eſt $a^{\frac{1}{n}}$. Il en eſt de même des autres. C'eſt une ſuite évidente des articles 150 & 153.

REMARQUE.

203. QUAND l'expoſant de la racine eſt un diviſeur exact de l'expoſant de la puiſſance, l'expoſant de la racine étant un nombre entier, en y comprenant l'unité, il eſt clair que les racines ſont des puiſſances parfaites auſſi-bien que les puiſſances dont elles ſont les racines. Ainſi a^2, racine 3e de a^6 eſt une puiſſance parfaite. Mais quand l'expoſant de la racine n'eſt pas un diviſeur exact de l'expoſant de la puiſſance, alors l'expoſant de la racine eſt une fraction. Cependant ces racines étant marquées par des expoſans comme les puiſſances, on les nomme *des puiſſances imparfaites*. Ainſi $a^{\frac{2}{3}}$, racine 3e de a^2, ayant la fraction $\frac{2}{3}$ pour expoſant, eſt une puiſſance imparfaite. Ce ſont proprement ces puiſſances imparfaites que l'on exprime par le ſigne radical $\surd$, en mettant au deſſus l'expoſant de la racine. Ainſi $\sqrt[3]{a^2}$ eſt la même choſe que $a^{\frac{2}{3}}$. $\sqrt[n]{a^m}$ eſt la même choſe que $a^{\frac{m}{n}}$. Ces puiſſances imparfaites

ſont des grandeurs incommenſurables, dont on traitera à fond dans le ſecond Livre vers la fin.

Ainſi quand on met le ſigne $\surd$ devant une puiſſance parfaite pour en exprimer la racine, cela ne ſe fait que pour marquer en abregé qu'il faut faire l'extraction de la racine de cette puiſſance. Ainſi $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ exprime qu'en faiſant l'extraction de la racine 3e de a^6 on trouve a^2. Mais le ſigne radical devant une puiſſance, dont on ne ſçauroit exprimer la racine qu'en lui donnant pour expoſant une fraction, eſt l'expreſſion propre de cette racine. Comme $\sqrt[2]{a^3}$ eſt l'expreſſion propre de la racine 2e de a^3. Ou bien encore $a^{\frac{3}{2}}$ eſt l'expreſſion propre de la racine 2e de a^3; mais alors on la regarde comme une puiſſance. Ces expreſſions des puiſſances imparfaites, ou des racines qui ne ſont pas elles-mêmes des puiſſances parfaites, ſont des ſignes arbitraires qu'on à déterminez à repréſenter ces racines ou puiſſances imparfaites.

204. 3°. Pour extraire la racine d'une grandeur incomplexe qui contient pluſieurs lettres differentes, il faut diviſer l'expoſant de chaque lettre par celui de la racine, & écrire le quotient qui convient à chaque lettre differente au haut de cette lettre, pour lui ſervir d'expoſant, & ce ſera la racine. Par exemple, la racine 2e de $a^6b^2c^4$ eſt a^3bc^2. La racine 3e de $a^3b^2c^6$ eſt $ab^{\frac{2}{3}}c^2$. La racine 2e de ax^2 eſt $a^{\frac{1}{2}}x$. La racine m de a^nb^{mp} eſt $a^{\frac{n}{m}}b^p$. La racine n de $a^{m-n}x^p$ eſt $a^{\frac{m-n}{n}}x^{\frac{p}{n}}$. La racine n de a^nx eſt $ax^{\frac{1}{n}}$. La racine 2e de $a^{2n}b^2$ eſt a^nb; la racine n de $a^{2n}b^n$ eſt a^2b, &c.

205. 4°. Lorſqu'il faut extraire la racine d'une puiſſance litterale précedée d'un nombre, par lequel elle eſt multipliée, il faut trouver ſéparément la racine du nombre, & celle de la grandeur litterale, & écrire pour la racine qu'on cherche la racine du nombre, & au devant la racine litterale. Ainſi la racine 2e de $9a^2$ eſt $3a$. La racine cubique de $8a^3$ eſt $2a$. La racine 3e de $27a^m$ eſt $3a^n$. La racine 3e de $12a^6$ eſt $a^2 \times \sqrt[3]{12}$. On remarquera que dans le cas où la racine eſt compoſée d'une grandeur commenſurable, & d'une incommenſurable marquée par le ſigne $\surd$, qui ſont multipliées l'une par l'autre,

on écrit la partie commenſurable la premiere, & l'on écrit au devant vers la droite, la partie incommenſurable précedée du ſigne $\surd$, comme on le voit dans $a^2 \sqrt[3]{12}$, & cette expreſſion marque le produit de l'une de ces parties par l'autre. $a^2\sqrt[3]{12} = a^2 \times \sqrt[3]{12}$.

206. 5°. On remarquera ſur les ſignes $+$ & $-$, 1°, que quand on extrait la racine dont l'expoſant eſt un nombre impair, comme 3, 5, 7, &c. d'une grandeur qui a le ſigne $+$ *, le ſigne de la racine doit toujours être $+$; & que ſi la grandeur a $-$ *, la racine doit toujours avoir le ſigne $-$: 2°. Mais, lorſque l'expoſant de la racine eſt pair, comme 2, 4, 6, &c. que la racine * peut avoir le ſigne $+$, & * qu'elle peut auſſi avoir le ſigne $-$. Par exemple, $+a$ eſt la racine 2e de $+a^2$, & $-a$ eſt auſſi la racine 2e de $+a^2$. Quand il eſt neceſſaire de marquer ces deux racines poſitive & négative, on les marque ainſi, $\pm a$ eſt la racine 2e de $+a^2$. Mais comme on cherche plus ordinairement les grandeurs poſitives que les négatives, on prend d'ordinaire la racine poſitive. 3°. Enfin que ſi la grandeur litterale avoit le ſigne $-$, & que l'expoſant de la racine fût un nombre pair, * la racine ſeroit une grandeur impoſſible, qu'on nomme *imaginaire*: on expliquera dans le ſecond Livre les racines impoſſibles. Ainſi la racine 2e de $-a$ ſe marque ainſi $\sqrt[2]{-a}$. * 99. * 99. * 99. * 99. * 100.

L'extraction des racines des puiſſances litterales complexes.

PROBLÊME.

207. *TROUVER la racine d'une puiſſance litterale complexe de quelque degré que ſoit la puiſſance.*

REGLE OU OPERATION. La maniere de trouver la racine d'une puiſſance litterale complexe quelconque eſt ſemblable à la methode de trouver la racine d'une puiſſance numerique quelconque, ſi ce n'eſt qu'on ne partage pas la puiſſance litterale en tranches comme la numerique, qu'on n'y diſtingue pas les membres de l'extraction comme dans les nombres, & qu'on n'y obſerve pas non plus les rangs qui ſont particuliers aux nombres; mais on ordonne la puiſſance litterale en termes differens, par rapport à l'une des lettres de cette

puiſſance, mettant au premier terme la plus haute puiſſance de cette lettre, & les autres puiſſances qui deſcendent d'un degré de l'une à l'autre dans les termes ſuivans, obſervant de choiſir la lettre qui donnera pour premier terme une puiſſance parfaite du degré de celle dont on cherche la racine.

On trace un petit arc au devant de cette puiſſance, pour marquer la place où l'on doit écrire les parties de la racine à meſure qu'on les trouvera. On prend dans la table des puiſ-
*160. ſances * pour regle de l'extraction de la racine, la formule litterale du degré de la puiſſance litterale ſur laquelle on veut operer : & 1°, ſuppoſant que le premier terme de la formule repréſente le premier terme de la puiſſance propoſeé, on prend la racine du premier terme repréſentée par *a* de la formule, & l'on écrit pour premiere partie de la racine qu'on cherche, cette racine du premier terme de la puiſſance litterale du degré de celle que l'on cherche. On retranche la puiſſance de cette premiere partie de la racine du degré de la puiſſance propoſée, on la retranche, dis-je, du premier terme; mais comme elle eſt toujours égale à ce premier terme, on efface ſimplement le premier terme de la puiſſance litterale, ou bien l'on met un point ou zero au deſſous, pour marquer qu'on a retranché cette puiſſance.

2°. Suppoſant que *a* de la formule repréſente la premiere partie de la racine découverte par la premiere operation, & que *b* de la formule repréſente la ſeconde partie qu'on cherche, on prendra pour diviſeur la grandeur repréſentée par le ſecond terme de la formule, dont on a effacé *b*; on diviſera le ſecond terme de la puiſſance propoſée par ce diviſeur, & l'on écrira le quotient pour la ſeconde partie de la racine. Puis ſuppoſant la ſeconde partie de la racine qu'on vient de découvrir repréſentée par *b* de la formule, on formera les produits preſcrits par la formule, & on les retranchera de la puiſſance propoſée, écrivant le reſte au deſſous, & zero quand il n'y a pas de reſte.

3° Le reſte précedent joint aux grandeurs de la puiſſance propoſée, ſur leſquelles on n'a pas encore operé, eſt la grandeur litterale ſur laquelle on doit continuer l'operation; on la continuera en ſuppoſant les deux premieres parties de la racine déja découvertes repréſentées par *a* de

la formule, & la troiſiéme qu'on cherche repréſentée par b. On prendra pour diviſeur le produit repréſenté par le ſecond terme de la formule, dont on a effacé b. On diviſera celui des termes de la puiſſance, ſur leſquels on doit operer, qui contient la plus haute puiſſance de la lettre, ſuivant laquelle on a ordonné la puiſſance propoſée, par le premier terme du diviſeur. On écrira le quotient pour la troiſiéme partie de la racine; & la ſuppoſant cette troiſiéme partie repréſentée par b de la formule, on formera les produits preſcrits par la formule, on les retranchera de la puiſſance propoſée, & l'on écrira le reſte au deſſous.

4°. Ce dernier reſte & les grandeurs de la puiſſance ſur leſquelles on n'a pas encore operé, ſont la grandeur litterale ſur laquelle on doit continuer l'operation. On la continuera, en ſuppoſant les trois parties de la racine déja découvertes repréſentées par a de la formule, & la quatriéme qu'on cherche repréſentée par b; & operant comme dans l'article précedent, on trouvera la quatriéme partie de la racine, & enſuite la cinquiéme, la ſixiéme, & les autres ſuivantes juſqu'à la derniere, qui doit donner zero pour reſte, ſi la puiſſance propoſée eſt parfaite.

5°. Quand on a trouvé zero pour le dernier reſte, & qu'il n'y a plus de grandeurs ſur leſquelles on doive operer, l'operation eſt finie, la racine qu'on a trouvée eſt exacte, & la puiſſance propoſée eſt une puiſſance parfaite. Mais quand on arrive à un reſte ſur lequel on ne peut plus continuer l'operation ſans trouver pour quotient une fraction, la puiſſance propoſée eſt imparfaite, ou bien elle ne peut ſe continuer ſans fraction.

Quand on s'apperçoit que la puiſſance litterale, dont on cherche la racine, eſt imparfaite, ou bien que ſa racine que l'on cherche n'eſt pas une grandeur entiere, on ne fait point d'ordinaire l'extraction de la racine de la plus grande puiſſance parfaite du même degré contenue dans la propoſée, on ſe contente de mettre au devant de cette puiſſance le ſigne $\surd$, écrivant au deſſus de $\surd$ l'expoſant de la racine qu'on demande, & on tire une ligne du haut du ſigne $\surd$ qui va couvrir toute la puiſſance imparfaite de cette maniere $\sqrt[2]{a^2 + 2ax + x^2 - b^2}$. Mais ſi l'on a beſoin d'avoir cette racine, on trouve d'abord

la racine de la plus grande puiſſance parfaite entiere contenue dans la puiſſance imparfaite propoſée, & l'on continue l'operation pour avoir une racine autant approchée qu'on le voudra, par la methode qu'on expliquera dans le Livre ſuivant.

I. EXEMPLE.

$9c^4 + 24c^3d - 14c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4$ (racine. $3c^2 + 4cd - 5d^2$

o o o o o

$-9c^4$ diviſeurs.

$-\!-24c^3d - 16c^2d^2$ $6c^2, +4cd$

o o $-30c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4$ $6c^2 + 8cd, -5d^2$

$+30c^2d^2 + 40cd^3 - 25d^4$

o o o

POUR trouver la racine 2e ou quarrée de la grandeur $9c^4 + 24c^3d - 14c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4$, qui eſt ordonnée par rapport à la lettre c. On ſe ſervira de la formule $a^2 + 2ab + b^2$ de la 2e puiſſance; & 1°, ſuppoſant que a^2 de la formule repréſente $9c^4$, on prendra la racine 2e de $9c^4$, qui eſt $3c^2$, qu'on écrira pour la premiere partie de la racine. On ôtera $9c^4$, quarré de $3c^2$ de $9c^4$, & on écrira le reſte zero au deſſous. Cette operation ne convient qu'à la premiere partie de la racine.

2°. Suppoſant $3c^2$ repréſentée par a de la formule, $2a$ de la formule fait voir que le diviſeur qui doit ſervir à trouver la ſeconde partie de la racine eſt $6c^2$. Ainſi on écrira $6c^2$, ou ce qui revient au même dans l'extraction de la racine quarrée, on multipliera par 2 la partie $3c^2$ de la racine déja découverte, & l'on écrira le produit $6c^2$ pour le diviſeur. On diviſera $+24c^3d$ par $+6c^2$, & on écrira le quotient $+4cd$ à la racine. On écrira encore $+4cd$ devant le diviſeur, ce qui fera $6c^2 + 4cd$. Puis ſuppoſant que $+4cd$ eſt repréſentée par b de la formule, on multipliera $6c^2 + 4cd$, repréſentée par $2a + b$ de la formule, par $4cd$ repréſentée par $+b$, & on retranchera de la puiſſance propoſée, les produits $+24c^3d + 16c^2d^2$ repréſentez par la formule $2ab + b^2$, & on écrira le reſte $-30c^2d^2$ au deſſous du terme de la puiſſance $-14c^2d^2$, & on effacera les termes de la puiſſance ſur leſquels on a operé, ou bien on écrira des zeros au deſſous pour faire ſouvenir qu'ils ne doivent plus ſervir.

On

On remarquera que quand on s'eſt rendu familiere l'extraction des racines, la multiplication & la ſouſtraction, dont on vient de parler ſe font par l'eſprit ſans écrire autre choſe que le reſte de la ſouſtraction. Cette remarque ſervira pour le reſte de cet exemple, & pour les ſuivans.

3°. Pour continuer l'operation ſur le reſte précedent $-30c^2d^2$, joint aux termes de la puiſſance propoſée, ſur leſquels on n'a pas encore operé, on ſuppoſera les deux parties de la racine déja découvertes $3c^2 + 4cd$ repréſentées par a de la formule $2ab + b^2$. On formera le diviſeur $6c^2 + 8cd$, comme le preſcrit $2a$ de la formule. Et diviſant $-30c^2d^2$ par le premier terme $+6c^2$ du diviſeur, on trouvera le quotient $-5d^2$ qu'on écrira à la racine, & encore au devant du diviſeur. Puis ſuppoſant $-5d^2$ repréſentée par b de la formule, on multipliera $6c^2 + 8cd - 5d^2$ que repréſente $2a + b$ de la formule par $-5d^2$ repréſentée par b, & l'on ôtera les produits $-30c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4$, des termes qui reſtent dans la puiſſance propoſée. Et trouvant que le reſte eſt zero, & qu'il n'y a plus de termes dans la puiſſance propoſée ſur leſquels on n'ait operé; on eſt aſſuré par là que $3c^2 + 4cd - 5d^2$ eſt racine exacte de la puiſſance propoſée, qui eſt une 2e puiſſance parfaite, dont la racine eſt une grandeur entiere.

II. EXEMPLE.

B

$$\begin{array}{l|l}
4x^2y^2 - 12cx^2y + 9c^2x^2 & \text{racine.} \\
0 - 16cdxy + 24c^2dx & 2xy - 3cx - 4cd \\
\quad + 16c^2d^2 & \\
-4x^2y^2 & + 4xy - 3cx - 4cd \\
\hline
0 \quad + 12cx^2y - 9c^2x^2 & \\
\quad + 16cdxy - 24c^2dx & \\
\quad - 16c^2d^2 & \\
\hline
0 \qquad 0 &
\end{array}$$

On trouvera de même la racine quarrée de la 2e puiſſance complexe B, après l'avoir ordonnée par rapport à la lettre y.

1°. On dira la racine quarrée de $4x^2y^2$ eſt $2xy$; on écrira $2xy$ pour la premiere partie de la racine. On retranchera $4x^2y^2$ quarré de $2xy$, de $4x^2y^2$; on écrira au deſſous le reſte 0.

2°. On multipliera la racine $2xy$ par 2, & on écrira le

produit $4xy$ pour le diviſeur. On diviſera le ſecond terme $-12cx^2y - 16cdxy$ par $+4xy$, & on écrira à la racine le quotient $-3cx - 4cd$, & encore au devant du diviſeur. On multipliera $4xy - 3cx - 4cd$ par $-3cx - 4cd$; on retranchera le produit $-12cx^2y - 16cdxy + 9c^2x^2 + 24c^2dx + 16c^2d^2$ de la puiſſance B; & trouvant zero pour reſte, & qu'il n'eſt reſté aucune grandeur dans la puiſſance B; on voit par là que $2xy - 3cx - 4cd$ eſt la racine exacte de la puiſſance B, qui eſt une ſeconde puiſſance parfaite.

Remarques ſur l'extraction de la racine quarrée.

1.

208. UN quarré poſitif comme $+4x^2y^2$ pouvant avoir pour racine la même grandeur $2xy$ poſitive & négative, ſi l'on s'appercevoit dans la ſuite de l'operation qu'ayant pris la racine poſitive, l'extraction ne pût pas ſe faire; il faudroit prendre la même racine negative.

2.

209. Il peut arriver qu'en ordonnant la puiſſance dont on cherche la racine ſuivant une lettre, le premier terme ſe trouve une grandeur complexe; par exemple, ſi l'on ordonnoit la puiſſance B par rapport à la lettre c, le premier terme auroit été compoſé de trois grandeurs. Dans ce cas il faut voir s'il n'y auroit point une lettre dans la puiſſance propoſée, dont la plus haute puiſſance ne fiſt qu'une grandeur incomplexe, qui fût en même tems une puiſſance parfaite, & ordonner la puiſſance propoſée par rapport à cette lettre, comme on a fait la puiſſance B par rapport à la lettre y. Ou bien, ſi l'on ne vouloit pas prendre cette peine, ou qu'il n'y eût pas de lettre qui pût ainſi ſervir à ordonner la puiſſance propoſée, on prendroit dans le premier terme complexe de la puiſſance propoſée, pour la premiere operation, la ſeule grandeur incomplexe, qui ſeroit une puiſſance parfaite. Dans le ſecond exemple on prendroit pour la premiere operation la grandeur $+9c^2x^2$, ou la grandeur $+16c^2d^2$, qui ſont chacune une puiſſance parfaite. On écriroit la racine de l'une des ces grandeurs pour la premiere partie de la racine de la puiſſance B, & l'on continueroit l'operation comme le preſcrit la regle de l'extraction des racines. Mais l'on a vû dans le ſecond

exemple, que ſi l'on prenoit $+ 9c^2x^2$, ou bien $+ 16c^2d^2$ pour faire la premiere operation, il faudroit prendre $- 3cx$ ou $- 4cd$ negative pour la premiere partie de la racine. On pourroit cependant prendre cette premiere partie poſitive, & l'operation ne laiſſeroit pas de ſe faire exactement; on trouveroit la racine exacte $+ 3cx + 4cd - 2xy$. Quand on a acquis un peu d'habitude à extraire les racines, on voit facilement qu'en prenant pour premier terme de la puiſſance *B* la grandeur complexe $+ 9c^2x^2 + 24c^2dx + 16c^2d^2$, cette grandeur eſt une puiſſance parfaite dont la racine eſt $\pm 3cx \pm 4cd$, & l'on fait la premiere operation ſur cette puiſſance parfaite, on écrit ſa racine pour la premiere partie de la racine qu'on cherche, on ôte ſon quarré de la puiſſance *B*; c'eſt à dire, on en efface le premier terme entier, & on continue l'operation en prenant $\pm 3cx \pm 4cd$ pour la premiere partie de la racine découverte par la premiere operation.

III. EXEMPLE.

POUR trouver la racine 3e ou cubique de la grandeur ſitterale complexe *C* qu'on a ordonnée ſuivant la lettre *y*. On ſe ſervira de la formule de la 3e puiſſance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. & 1°, regardant le premier terme de *C* $27y^6$ repréſenté par a^3, on prendra la racine 3e $3y^2$, repréſentée, par *a*, du premier terme $27y^6$. On écrira $+ 3y^2$ pour la premiere partie de la racine. On retranchera $27y^6$ (3e puiſſance de $3y^2$) du premier terme $27y^6$, & on écrira le reſte zero au deſſous. a^3 de la formule ne ſert que pour cette operation.

2°. Pour trouver la ſeconde partie de la racine repréſentée par *b* de la formule, il faut effacer *b* dans le ſecond terme $3a^2b$ de la formule, & $3a^2$ fera connoître que pour avoir le diviſeur de la ſecond operation, il faut multiplier par 3 le quarré de $3y^2$ repréſentée par *a* de la formule, & l'on aura $+ 27y^4$ pour le diviſeur repréſenté par $3a^2$. Il faut diviſer $- 54cy^5$ par ce diviſeur, & écrire le quotient $- 2cy$ pour la ſeconde partie de la racine. Puis ſuppoſant $- 2cy$ repréſentée par *b* de la formule, il faut former à part le produit repréſenté par $- 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (où le premier & le troiſiéme termes ont le ſigne —, à cauſe du ſigne — de la ſeconde partie $- 2cy$ de la racine.) Ce produit eſt $- 54cy^5$

$+ 36c^2y^4 - 8c^3y^3$. On le retranchera de la puiſſance C, & l'on joindra au reſte de cette ſouſtraction les termes de C, ſur leſquels on n'a pas encore operé.

3°. On trouvera la troiſiéme partie de la racine de la même maniere qu'on a trouvé la ſeconde. On ſuppoſera que a de la formule repréſente les deux parties $3y^2 - 2cy$ de la racine déja découvertes, & que b repréſente la troiſiéme qu'on cherche. $3a^2$ fait voir qu'il faut prendre pour diviſeur le produit de 3 par le quarré de $3y^2 - 2cy$ repréſentée par a. Ainſi il faut écrire pour diviſeur $+ 27y^4 - 36cy^3 + 12c^2y^2 = 3a^2$. Il faut diviſer $+ 108c^2y^4$, qui eſt le premier des termes de C ſur leſquels on doit operer, par le premier terme $+ 27y^4$ du diviſeur; écrire le quotient $+ 4c^2$ pour la troiſiéme partie de la racine. Puis ſuppoſant $+ 4c^2$ repréſentée par b de la formule, il faut former les produits repréſentez par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ces produits ſont $+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6$. Enfin il faut retrancher ces produits des termes qui reſtent de la puiſſance C joints au reſte de l'operation précedente: & comme il reſte zero, cela fait voir que $+ 3y^2 - 2cy + 4c^2$ eſt la racine exacte de la puiſſance C, qui eſt une 3e puiſſance parfaite.

Exemple III.

Extraction de la racine cubique ou 3e.

C

$27y^6 - 54cy^5 + 144c^2y^4 - 152c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6$ ($3y^2 - 2cy + 4c^2$.

o o o o o o o

$- 27y^6$

$+ 54cy^5 - 36c^2y^4 + 8c^3y^3$

o

o $+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6$

$- 108c^2y^4 + 144c^3y^3 - 192c^4y^2 + 96c^5y - 64c^6$

o o o o o

Seconde operation.

$$3y^2 = a$$
$$+ 27y^4 \text{ diviſeur} = 3a^2$$
$$- 2cy = b$$
$$- 54cy^3 = - 3a^2b$$
$$+ 36c^2y^4 = + 3ab^2$$
$$- 8c^3y^3 = - b^3$$

$$- 54cy^3 + 36c^2y^4 - 8c^3y^3 = - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Troiſiéme operation.

$$3y^2 - 2cy = a$$
$$+ 27y^4 - 36cy^3 + 12c^2y^2 \text{ diviſeur} = 3a^2$$
$$+ 4c^2 = b$$
$$+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 48c^4y^2 = + 3a^2b$$
$$+ 144c^4y^2 - 96c^5y = 3ab^2$$
$$+ 64c^6 = b^3$$

$$+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

AVERTISSEMENT.

LES exemples qu'on vient de donner ſuffiſent pour faire clairement concevoir la methode d'extraire les racines des grandeurs litterales complexes, & la maniere d'en faire uſage. Ceux qui voudront ſe la rendre familiere, pourront ſe faire eux-mêmes tant d'exemples qu'il leur plaira. Ils n'auront qu'a prendre une grandeur complexe, la multiplier par elle-même une fois, deux fois, trois fois, &c. obſervant d'ordonner les puiſſances 2e, 3e, 4e, &c. qui viendront de ces multiplications, par rapport à une lettre qui donne pour premier terme une puiſſanee parfaite du degré de celle dont ils voudront extraire la racine. Enfin ils feront l'extraction de la racine de cette puiſſance ſuivant la regle du Problême, comme dans les exemples précedens; & s'ils ont bien ſuivi cette regle, ils trouveront zero pour le dernier reſte de l'operation.

210. *Démonſtration du Problême.* Le Problême fait découvrir, pour la racine que l'on cherche, les grandeurs dont les pro-
* 172. duits, pris dans l'ordre que preſcrit * la formation des puiſſances, compoſent la puiſſance parfaite de cette racine, & qui compoſent auſſi la grandeur propoſée, dont on a extrait la racine, puiſqu'en étant retranchez par ordre, dans l'operation, il n'y a eu aucun reſte. Le Problême fait donc découvrir la racine exacte d'une puiſſance complexe parfaite. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour s'aſſurer qu'on a ſuivi exactement la regle de l'extraction des racines, il n'y a qu'à élever la racine qu'on a découverte à la puiſſance qui à le même expoſant que cette racine; & ſi l'on a bien operé, on doit trouver la grandeur propoſée.

Axiomes ſur les puiſſances & ſur les racines.

1.

211. LES puiſſances égales du même degré ont leurs racines égales; les racines égales qui ont le même expoſant, ont leurs puiſſances du même degré égales. Par exemple, ſi $a = b$, l'on aura $a^2 = b^2$; $a^3 = b^3$; $a^4 = b^4$, en general $a^n = b^n$; & ſi $a^n = b^n$, l'on aura $a = b$.

2.

212. Les racines inégales ont leurs puiſſances du même degré inégales, & la moindre racine a une puiſſance moindre que la puiſſance du même degré de la plus grande racine; & réciproquement les puiſſances d'un même dégré étant inégales, les racines ſont inégales, & la plus grande puiſſance a une plus grande racine que la moindre puiſſance.

LA SCIENCE DU CALCUL

DES GRANDEURS EN GENERAL

LIVRE II.

Où l'on explique le calcul des grandeurs rompues, qu'on nomme auſſi fractions; tout ce qui regarde les comparaiſons des rapports ſimples; ce qu'il faut ſçavoir des rapports compoſez; & le calcul des grandeurs incommenſurables.

SECTION I.

Où l'on explique les grandeurs ſimples ou premieres, & les grandeurs compoſées; la methode pour trouver le plus grand diviſeur commun à deux & à pluſieurs grandeurs; & la methode de trouver tous les diviſeurs d'une grandeur compoſée.

213 ON a dit * au commencement du Livre précedent qu'un *nombre entier*, étoit celui qui contenoit exactement l'unité un nombre déterminé de fois, comme 4 pieds, 10 pieds: & qu'un *nombre rompu*, ou *une fraction* * exprimoit un nombre de parties égales quelconques de l'unité, ou d'un tout qui eſt regardé comme l'unité par rapport à la fraction. Par exemple, deux tiers d'un pied, trois quarts d'un pied, ſont des fractions. Trois quarts de deux pieds, quatre ſixiémes parties de deux pieds, ſont auſſi des fractions, & deux

* 9.

* 19.

pieds ſont regardez comme l'unité à laquelle ſe rapportent les deux dernieres fractions.

On a auſſi dit qu'une fraction s'exprimoit par deux nombres, dont l'un étoit ſur une ligne, & l'autre au deſſous : que la fraction deux tiers, par exemple, s'exprimoit par $\frac{2}{3}$; que le nombre 3 qui étoit ſous la ligne, ſe nommoit *le dénominateur*, & qu'il marquoit en combien de parties egales l'unité étoit conçue partagée, qu'il ſe nommoit encore *le ſecond terme*, & encore *le conſequent*, & enfin *le diviſeur* : que le nombre 2 qui étoit ſur la ligne, ſe nommoit *le numerateur*, & qu'il exprimoit combien la fraction contenoit de parties égales de l'unité déterminées par le dénominateur ; qu'il s'appelloit encore *le premier terme*, & encore l'*antecedent*, & enfin *le dividende*.

214. Cette notion d'un nombre rompu fait clairement connoître que ſi l'on regarde les parties égales de l'unité déterminées par le dénominateur, comme des unitez elles-mêmes; la fraction pourra être conſiderée comme un nombre entier qui exprime autant d'unitez qu'en contient le numerateur. Par exemple, en regardant dans la fraction $\frac{2}{3}$, les trois parties égales, dans leſquelles le dénominateur 3 marque que l'unité eſt diviſée, comme des unitez elles-mêmes; on pourra conſiderer $\frac{2}{3}$ comme un entier, qui contient deux unitez, dont chacune eſt contenue trois fois dans ſon tout qui eſt l'unité.

D'où il ſuit évidemment, 1°, que pour ajouter des fractions, qui ont le même dénominateur, comme $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$; il faut ajouter les ſeuls numerateurs, & écrire leur ſomme ſur une ligne, & le dénominateur commun au deſſous; & l'on aura la ſomme de ces fractions, qui eſt dans cet exemple $\frac{3}{3}$. 2°. Que pour ôter une fraction, comme $\frac{1}{3}$, d'une autre fraction, comme $\frac{2}{3}$, qui à le même dénominateur; il faut retrancher le numerateur de la premiere du numerateur de la ſeconde ; écrire le reſte ſur une ligne, & le dénominateur commun au deſſous; & cette fraction, qui dans cet exemple eſt $\frac{1}{3}$, ſera la difference des deux fractions.

D'où l'on voit que, quand les fractions n'ont pas le même dénominateur, il faut, pour les ajouter les unes aux autres, ou pour les retrancher les unes des autres, les réduire à avoir un même dénominateur, ſans changer leur valeur.

Cela

Cela fait déja appercevoir que le calcul des fractions contient, outre l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la diviſion, la formation des puiſſances, & l'extraction des racines, qui ſont les operations qui lui ſont communes avec le calcul des grandeurs entieres ; il contient, dis-je, de plus des operations particulieres aux nombres rompus, qu'on appelle *les réductions*.

On a fait voir dans le Livre précedent * qu'une fraction & un rapport étoient la même choſe : que la fraction $\frac{2}{3}$, par exemple, étoit la même choſe que le rapport de 2 à 3 ; car le rapport de 2 à 3 ne ſignifie autre choſe, ſinon, que le conſequent 3 étant conçu partagé en trois parties égales, l'antecedent 2 contient deux de ces parties : Mais en comparant ce rapport avec l'unité, qu'on conçoit partagée en autant de parties égales qu'en contient le dénominateur 3, le rapport lui même $\frac{2}{3}$ contient deux de ces parties, dont l'unité $(=\frac{1}{3})$ en contient 3. C'eſt en ce ſens que $\frac{2}{3}$ eſt une fraction. Cependant comme le rapport de 2 à 3 eſt le même que celui de $\frac{2}{3}$ à 1 $(=\frac{1}{3};)$ on peut dire que $\frac{2}{3}$, conſideré comme rapport & comme fraction, eſt toujours la même grandeur. C'eſt la même choſe de toute fraction $\frac{a}{b}$ exprimée en general par les lettres : cette fraction $\frac{a}{b}$, & le rapport de a à b ne ſont qu'une même choſe. * 115.

Enfin on a fait voir dans le Livre précedent * qu'une fraction $\frac{a}{b}$ exprimoit la diviſion du premier terme a par le ſecond terme b ; & que la fraction $\frac{a}{b}$ étoit le quotient de a diviſé par b. * 115.

Ainſi le calcul des fractions, des rapports, & des quotiens, (exprimez en fraction, dont le dividende eſt le premier terme, & le diviſeur le ſecond terme,) eſt le calcul des mêmes grandeurs.

Une grandeur litterale, ſoit incomplexe comme a, ab, abc, *&c.* ſoit complexe comme $a^2 + 2ab + b^2$, eſt une grandeur entiere, quand elle n'a pas de diviſeur écrit au deſſous. Mais $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}$, ſont des fractions.

On remarquera auſſi que quand une grandeur quelconque repréſentée par x, eſt écrite au devant d'une fraction vers la droite, comme $\frac{1}{3}x$, $\frac{a}{b}x$, $\frac{2a}{c}x$, cette grandeur x eſt cenſée au numerateur de la fraction. Ainſi $\frac{1x}{2} = \frac{1}{2}x$; $\frac{ax}{b} = \frac{a}{b}x$; $\frac{2ax}{c} = \frac{2a}{c}x$.

AVERTISSEMENT.

LES Commençans doivent relire ici tout ce que l'on a expliqué des rapports & des proportions dans la premiere ſection *depuis l'article* 35 *juſqu'à la fin de la premiere ſection.* Au commencement de la 3e ſection *depuis l'article* 72 *juſqu'à* 77, & au commencement de la 4e ſection depuis l'*art.* 106 *juſqu'à* 125, & ſe rendre toutes ces choſes très familieres, comme on les a avertis en ces endroits-là.

I. THEORÈME.

215. *LORSQUE deux rapports numeriques ſont égaux comme* $\frac{2}{3}$ *&* $\frac{4}{6}$, *& pour les exprimer en general* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; *celui de ces deux rapports dont l'antecedent eſt le moindre, a auſſi ſon conſequent moindre que l'autre.*

Démonſtration. Il faut démontrer que ſi a eſt moindre que c, neceſſairement b eſt moindre que d. Le conſequent b ne peut pas être égal au conſequent d; car a moindre, par la ſuppoſition que c, auroit un moindre rapport à la gran-
* 41. deur b * que ne ſeroit celui de c à la grandeur d égale à b; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Il eſt encore moins poſſible que le conſequent b ſoit plus grand que d; car le rap-
* 39. port de a * devenant plus petit à meſure que le conſequent avec lequel on le compare devient plus grand, ſi le rapport de a à une grandeur b égale à d, eſt déja moindre que le rapport de c à d, à plus forte raiſon le rapport de a à une grandeur b plus grande que d, ſeroit plus petit que le rapport $\frac{c}{d}$. Donc le rapport $\frac{a}{b}$ étant ſuppoſé égal à $\frac{c}{d}$, ſi a eſt moindre que c, il faut néceſſairement que b ſoit moindre que d. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

216. PARMI tous les rapports numeriques égaux, comme $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$, *&c.* Il y en a un ſeul, dans cet exemple, c'eſt $\frac{2}{3}$, dont l'antecedent eſt moindre (c'eſt à dire contient moins d'unitez) que l'antecedent de chacun des autres, & dont le conſequent eſt moindre que le conſequent de chacun des autres. Car les deux termes de chaque rapport étant des nombres entiers, il ne peut pas ſe trouver plus d'un rapport

égal à chacun des autres, dont les deux termes contiennent chacun le plus petit nombre d'unitez qu'il ſe puiſſe.

DE'FINITION.

CELUI d'entre pluſieurs rapports égaux qui a les moindres termes s'appellera *le moindre rapport*, *le rapport réduit aux moindres termes*, *le rapport le plus ſimple*, *la rapport primitif*, *la fraction primitive*.

COROLLAIRE II.

217. TOUT rapport ou toute fraction, dont l'unité eſt l'un des deux termes, eſt toujours un moindre rapport. Ainſi en ſuppoſant que n repréſente tel nombre entier qu'on voudra, $\frac{1}{n}$ & $\frac{n}{1}$ ſont chacun un moindre rapport. Car en toute fraction qui ſera égale à $\frac{1}{n}$ ou à $\frac{n}{1}$, il eſt évident que le terme correſpondant à 1 ſera toujours plus grand que 1; par conſequent le terme correſpondant à n * ſera plus grand que n. * 215.

D'où l'on voit que tout nombre entier $\frac{n}{1}$ *, regardé comme une fraction, dont l'unité eſt le dénominateur, eſt toujours un moindre rapport. * 215.

COROLLAIRE III.

218. TOUS les rapports, d'une ſuite infinie de rapports égaux, ſont égaux chacun au moindre rapport; & tous les rapports égaux au moindre rapport, ſont égaux entr'eux. Car tous les rapports égaux ſont des grandeurs égales, dont l'expreſſion la plus ſimple eſt celle du moindre rapport qui leur eſt égal.

II. THEORÈME.

219. *DANS une ſuite infinie qu'on peut concevoir de rapports numeriques égaux, nommant le moindre* $\frac{a}{b}$, *& chaque autre* $\frac{c}{d}$; *l'antecedent* c *de chaque rapport contient toujours exactement l'antecedent* a *du moindre rapport un certain nombre de fois qu'on nommera* n, *& le conſequent* d *du même rapport* $\frac{c}{d}$ *contient toujours exactement le conſequent* b *du moindre rapport le même nombre de fois* n, *c'eſt à dire* $\frac{c}{d} = \frac{na}{nb}$.

Démonſtration. Les deux termes du rapport $\frac{c}{d}$ * étant plus grands que les termes correſpondans du moindre rapport $\frac{a}{b}$, on peut ôter a de c, & b de d. Or qu'on ôte a de c une fois, deux fois, trois fois, & ainſi de ſuite autant qu'on le pourra; * 215.

& qu'en même temps on ôte b de d une fois, deux fois, trois fois, ainſi de ſuite ; de maniere que b ſoit retranché de d au-
* 58. tant à chaque fois que a eſt retranché de c : il eſt évident * que les rapports $\frac{c-1a}{d-1b}$, $\frac{c-2a}{d-2b}$, $\frac{c-3a}{d-3b}$, & ainſi de ſuite, formez par les reſtes, ſeront tous égaux chacun au rapport $\frac{c}{d}$, & à ſon égal $\frac{a}{b}$. On va démontrer qu'après tous ces retranchemens on arrivera à un rapport formé par les derniers reſtes, qui ſera préciſément le moindre rapport $\frac{a}{b}$.

Car, 1°, le dernier reſte ne ſçauroit avoir ſes termes plus grands que $\frac{a}{b}$, puiſqu'on pourroit encore retrancher a de l'antecedent de ce reſte, & b du conſequent de ce reſte. 2°. Le dernier reſte ne ſçauroit avoir ſon antecedent plus petit que a, & ſon conſequent moindre que b, puiſque ſi cela arrivoit, $\frac{a}{b}$ ne ſeroit pas le moindre rapport, celui que formeroient les derniers reſtes étant moindre que $\frac{a}{b}$; ce qui eſt contre la ſuppoſition. On arrivera donc neceſſairement en retranchant a de c, & en même temps b de d le même nombre de fois, & continuant de faire ces retranchemens autant qu'on pourra, à un rapport qui ſera le même que $\frac{a}{b}$. Par conſequent chacun des rapports égaux repréſentez par $\frac{c}{d}$ peut être repréſenté par $\frac{na}{nb}$; *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

220. LES deux termes d'un rapport numerique quelconque qui n'eſt pas le moindre, ont toujours un diviſeur exact * qui leur eſt commun.

COROLLAIRE II.

221. $\frac{a}{b}$ étant un moindre rapport, & $\frac{c}{d}$ repréſentant chaque rapport égal à $\frac{a}{b}$, l'antecedent a eſt toujours un diviſeur exact de c, & le conſequent b un diviſeur exact de d. Et a eſt toujours contenu dans c autant de fois que b eſt contenu dans d.

AVERTISSEMENT.

ON peut étendre à autant de nombres qu'on voudra, ce qu'on vient de démontrer de deux nombres. Par exemple, autant de nombres entiers qu'on voudra, qui ſeront repréſentez par les lettres A, B, C, D, *&c.* étant donnez, il eſt évident que les rapports qui ſont entre ces nombres ſont déterminez (on voit bien qu'il n'eſt pas neceſſaire que ces rap-

ports ſoient égaux.) On n'en prendra que trois A, B, C, & ce qu'on en dira dans le 3ᵉ Theorême & ſes Corollaires, pourra aiſément s'appliquer à tant d'autres qu'on voudra.

III. THEORÊME.

222. *LORSQUE trois nombres entiers* A, B, C, *ſont déterminez, & que trois autres*, a, b, c, *ont les mêmes rapports entr'eux qu'ont les trois* A, B, C *pris dans le même ordre, de maniere que ceux qui ſont marquez par les mêmes lettres* A, a, &c. *ſoient ceux qui ſe répondent; ſi l'un des trois derniers comme* a *eſt moindre que le correſpondant* A *des trois autres;* b *eſt auſſi moindre que* B, *&* c *moindre que* C.

Car les rapports de A, B, C étant déterminez, & les trois a, b, c ayant les mêmes rapports; il eſt évident * que a ne peut être moindre que A, que b ne ſoit auſſi moindre que B, & c moindre que C. *215.

COROLLAIRE I.

223. TROIS nombres entiers A, B, C étant déterminez, il ne peut y avoir que trois nombres a, b, c, qui ſoient les moindres qu'il ſe puiſſe, qui ayent entr'eux les mêmes rapports, qu'ont entr'eux A, B, C.

COROLLAIRE II.

224. TROIS nombres étant donnez A, B, C, qui ont entr'eux trois rapports déterminez par ces nombres; ſi l'unité eſt l'un de trois nombres donnez, par exemple ſi $A = 1$; ils ſont moindres que trois autres nombres entiers tels qu'ils puiſſent être, qui auront les mêmes rapports entr'eux qu'ont les trois nombres donnez, dont l'un eſt l'unité.

COROLLAIRE III.

225. TROIS nombres a, b, c, étant les moindres qui ayent entr'eux les rapports qu'ils ont, ſi A, B, C repréſentent trois autres nombres qui ont les mêmes rapports; a eſt autant de fois contenu dans A, que b dans B, & que c dans C. Ainſi n repréſentant le nombre de fois que a eſt dans A, on a toujours $na = A$; $nb = B$; $nc = C$.

Ce Corollaire ſe démontre comme * le ſecond Theorême. *219.

COROLLAIRE IV.

226. TROIS nombres entiers A, B, C n'étant pas les moindres qui ayent les mêmes rapports, ils ont toujours un même diviſeur commun n.

COROLLAIRE V.

227. a, b, c étant les moindres nombres entiers entre les nombres entiers qui ont les mêmes rapports, leſquels autres nombres entiers ſont ici repréſentez par A, B, C; ces trois moindres nombres a, b, c, ſont chacun un diviſeur exact de leur nombre correſpondant; & chacun des trois moindres a, b, c eſt contenu le même nombre de fois dans ſon correſpondant.

Tous ces Corollaires ſe déduiſent évidemment du troiſiéme Theorême, comme l'on a déduit les ſemblables propoſitions ſur le moindre rapport, du I. Theorême.

DE'FINITION.

228. UN nombre qui n'a aucun diviſeur exact que lui-même & l'unité, s'appelle un nombre *ſimple*, & encore un nombre *premier*. Ainſi 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, &c. ſont des nombres *premiers* ou *ſimples*.

DE'FINITION.

229. DEUX ou pluſieurs nombres s'appellent *premiers entr'eux*, lorſqu'ils n'ont aucun diviſeur commun que l'unité. On nomme auſſi le diviſeur d'un nombre la *meſure* de ce nombre-là. Ainſi deux ou pluſieurs nombres premiers entr'eux n'ont aucune autre meſure commune que l'unité. Par exemple 2 & 3 ſont premiers entr'eux. 12 & 25 ſont auſſi premiers entr'eux: car quoique 12 & 25 ayent chacun ſeparément des diviſeurs, cependant ils n'en ont aucun de commun que l'unité.

COROLLAIRE.

230. DEUX nombres qui ſont chacun un nombre premier, ſont toujours premiers entr'eux; car chacun n'ayant aucun diviſeur commun que lui-même & l'unité, ils ne peuvent avoir aucun diviſeur commun.

DE'FINITION.

231. DEUX ou plusieurs nombres qui ont quelque diviseur commun, s'appellent *composez*, l'un par rapport à l'autre. Quand même un nombre seroit premier, s'il est lui-même un diviseur exact d'un ou de plusieurs autres; ce nombre premier & les autres dont il est diviseur, ne sont pas premiers entr'eux, mais ils sont des nombres composez. Ainsi 5 & 15 sont des nombres composez. 3 & 6 sont des nombres composez. 3, 6, 30 sont des nombres composez.

IV. THEORÊME.

232. *LES deux nombres qui sont les termes d'un moindre rapport, sont premiers entr'eux: Et deux nombres premiers entr'eux sont toujours un moindre rapport.*

Démonstration de la premiere partie. Car s'ils avoient un diviseur commun, en divisant chaque terme par ce commun diviseur, les deux quotients * auroient le même rapport, qui seroit pourtant en moindres termes. Ainsi le rapport proposé ne seroit pas un moindre rapport, ce qui est contre la supposition. *109.

Démonstration de la seconde partie. Deux nombres, qui ne sont pas un moindre rapport, * ont toujours un diviseur commun: Donc deux nombres qui n'ont pas de diviseur commun, sont un moindre rapport. *220.

REMARQUES.

233. IL y a aussi parmi les grandeurs litterales des grandeurs premieres, des grandeurs premieres entr'elles & des grandeurs composées. Une grandeur litterale, soit incomplexe comme a, b, c, &c. soit complexe d'une ou de plusieurs dimensions, comme les grandeurs lineaires $a + b$; $a - b$, $a + b - c$; les grandeurs de deux dimensions $a^2 + b^2$, $a^2 + ab + cc$; les grandeurs de trois dimensions $x^3 + a^3$, $x^3 - ax^2 + a^2b$, & ainsi des autres; chacune de ces grandeurs litterales est nommée *premiere* ou *simple*, quand elle n'a aucun diviseur exact qu'elle-même ou l'unité, comme sont chacune des grandeurs qu'on vient de marquer.

Deux ou plusieurs grandeurs litterales incomplexes ou complexes, d'une seule dimension ou de plusieurs dimensions,

ſont nommées *premieres entr'elles*, quand elles n'ont aucun diviſeur commun, & que la moindre de ces grandeurs n'eſt pas un diviſeur exact des autres. Ainſi a^2 & b^2 ſont premieres entr'elles. $a + b - c$, & $a - b + d$, ſont premieres entr'elles. $a^2 + ab + b^2$, & $a^2 - ab + c^2$, ſont premieres entr'elles.

Deux ou pluſieurs grandeurs litterales ſont compoſées, quand elles ont quelque diviſeur commun. Ainſi a^2 & ab, qui ont a pour diviſeur commun, ſont compoſées. $a^2 - b^2$, & $a + b$, qui ont $a + b$ pour diviſeur commun, ſont compoſées.

AXIOMES *ſur les diviſeurs des grandeurs.*

1.

234. UNE grandeur (par exemple d) qui eſt un diviſeur exact de chacune des parties ad, bd, cd d'un tout $ad + bd + cd$, eſt auſſi un diviſeur exact du tout $ad + bd + cd$.

2.

235. Un diviſeur exact (qu'on repréſentera par d) d'une grandeur a, eſt auſſi un diviſeur exact de toute grandeur, dont a eſt un diviſeur exact, c'eſt à dire, qui eſt multiple de a, comme de $2a$, $3a$, $4a$, en general de na, en ſuppoſant que n repréſente tel nombre entier qu'on voudra.

3.

236. Un diviſeur exact d d'une grandeur entiere $ad + bd$, & de l'une de ſes deux parties ad, eſt auſſi diviſeur exact de l'autre partie bd.

4.

237. Un diviſeur exact d d'un nombre a, eſt premier à l'égard de tout nombre b, avec qui a eſt un nombre premier. Car il eſt évident que ſi b avoit un diviſeur commun avec d, il auroit un diviſeur commun avec a, dont d eſt diviſeur; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

V. THEORÈME.

238 *SI un nombre* c *eſt premier à l'égard de chacun de deux autres* a *&* b, *ce nombre* c *& le produit* ab *des deux autres, ſont premiers entr'eux.*

Démonſtration,

Démonſtration. Si ab & c pouvoient avoir un diviſeur commun d, que q ſoit le quotient de ab diviſé par ce diviſeur d commun à c & à ab. L'on en déduira * $ab = dq$; ce qui donnera * $\frac{a}{d} = \frac{q}{b}$. Mais c étant premier avec a par la ſuppoſition ; d diviſeur de c, & a, ſont * premiers entr'eux. Par conſequent * $\frac{a}{d}$ eſt un moindre rapport : d'où il ſuivra * que c & b auront d pour diviſeur commun. Mais cela * détruit la ſuppoſition que c & b n'ont aucun diviſeur commun. Par conſequent il ne ſe peut pas faire que c & le produit ab ne ſoient pas premiers entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 107. * 120. * 237. * 232. * 221. * 237.

COROLLAIRE I.

239. SI les nombres a & b ſont premier l'un & l'autre à chacun des nombres c & d; les produits ab & cd ſont premiers entr'eux.

Car a & b étant premiers avec c; * ab & c ſont premiers entr'eux. Par la même raiſon a & b étant premiers avec d; * ab & d ſont premiers entr'eux. Ainſi ab eſt premier avec c & avec d : par conſequent * ab & cd ſont premiers entr'eux.

* 238. * 238. * 238.

COROLLAIRE II.

240. SI deux nombres a & b ſont premiers entr'eux, toutes les puiſſances a^2, a^3, a^4, *&c.* du premier a n'ont aucun diviſeur commun avec le ſecond b, ni avec ſes puiſſances.

Démonſtration. Car a & a ſont chacun par la ſuppoſition un nombre premier avec b ; donc * a^2 & b ſont premiers entr'eux : par conſequent a^2 eſt premier à l'égard de b & de b ; d'où il ſuit que * a^2 & b^2 ſont premiers entr'eux. Il eſt évident qu'on peut continuer d'appliquer ſucceſſivement cette démonſtration à toutes les puiſſances de a & de b, & faire voir que a, & chacune de ſes puiſſances, n'ont point de diviſeur commun avec b, ni avec chacune des puiſſances de b.

* 238. * 238.

COROLLAIRE III.

241. LES termes a & b d'un moindre rapport $\frac{a}{b}$ * étant premiers entr'eux ; chacun des rapports à l'infini $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, en general $\frac{a^m}{b^m}$ (en ſuppoſant que m repréſente un nombre entier quelconque) dont les termes ſont les ſemblables puiſ-

* 232.

*232. ſances de a & de b; ſont * un moindre rapport; car les deux
*240. termes de chacun de ces rapports * ſont premiers entr'eux.

COROLLAIRE IV.

242. SI $\frac{a}{b}$ eſt un moindre rapport, & que chacun des rapports
*241. égaux à $\frac{a}{b}$ ſoit repréſenté par $\frac{c}{d}$; le rapport $\frac{a^m}{b^m}$ (qui *eſt toujours un moindre rapport) formé de deux puiſſances du même degré de a & de b, dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque repréſenté par m, eſt égal au rapport $\frac{c^m}{d^m}$ des deux termes c & d élevez à la même puiſſance dont m eſt l'expoſant.

Démonſtration. a & b étant contenus, le premier dans c,
*221. le ſecond en d *, le même nombre de fois qu'on nommera n;
*107. il eſt évident que $c = * an$, & $d = bn$. Anſi $\frac{c}{d} = \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$
*211. Par conſequent * $\frac{c^m}{d^m} = \frac{a^m n^m}{b^m n^m}$. Mais $\frac{a^m n^m}{b^m n^m} = * \frac{a^m}{b^m}$. Donc *
*75. & 109. $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$.
*52.

COROLLAIRE V.

243. SI chacun des termes d'une fraction $\frac{a}{b}$ eſt une puiſſance numerique parfaite du même degré, par exemple, chacun un quarré parfait $\frac{a^2}{b^2}$ ou une 3e puiſſance parfaite $\frac{a^3}{b^3}$, ou une 4^e $\frac{a^4}{b^4}$, ou en general $\frac{a^m}{b^m}$; & que cette fraction ſoit égale à un nombre entier qu'on repréſentera par $\frac{n}{1}$; ce nombre entier ſera neceſſairement une puiſſance parfaite du degré de la puiſſance de chaque terme de la fraction.

Démonſtration. Si la fraction numerique $\frac{a}{b}$ n'eſt pas un moindre rapport; que la fraction numerique $\frac{e}{f}$ ſoit le moindre rapport égal à $\frac{a}{b}$. (Si $\frac{a}{b}$ eſt un moindre rapport, ce que l'on va démontrer par rapport à $\frac{e}{f}$, conviendra auſſi à $\frac{a}{b}$.)
*241. Puiſque $\frac{e}{f}$ eſt un moindre rapport, $\frac{e^m}{f^m}$ * eſt auſſi un moindre
*242. rapport. Mais $\frac{e^m}{f^m}$ * eſt égale à $\frac{a^m}{b^m}$ qui eſt égale par la ſuppoſition au nombre entier $\frac{n}{1}$, & ce nombre entier $\frac{n}{1}$ eſt tou-

jours * un moindre rapport: ainſi $\frac{e^m}{f^m}$ qui eſt le même moindre rapport, ne differe point de * $\frac{n}{1}$. Par conſequent f^m eſt l'unité, & $e^m = n$. Or e^m eſt la puiſſance parfaite d'un nombre entier e, laquelle puiſſance a pour expoſant le nombre entier repréſenté par m. Le nombre entier n, égal par la ſuppoſition à la fraction $\frac{a^m}{b^m}$, eſt donc une puiſſance numerique parfaite, dont l'expoſant eſt m. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 217.

* 216.

AVERTISSEMENT.

ON déduira de là, *art.* 305. *& les ſuivans*, la démonſtration qui fait voir qu'il y a des grandeurs incommenſurables; quand on aura expliqué le calcul des grandeurs rompues.

COROLLAIRE VI.

244. SOIENT tant de nombres premiers qu'on voudra repréſentez par a, b, c, d, *&c.* Soit un autre nombre premier repréſenté par f; le produit de tous les nombres premiers $abcd$, ou de telles puiſſances qu'on voudra de chacun de ces nombres premiers, qu'on peut repréſenter en general par $a^m b^n c^p d^q$, ne ſçauroit avoir, pour un de ſes diviſeurs exacts, aucun autre nombre premier, comme f, different des nombres premiers qui compoſent le produit; ni aucune puiſſance f^r du nombre premier f.

Démonſtration. 1°. a, b & f étant chacun un nombre premier; ab & f * ſont premiers entr'eux. A préſent ab, & le nombre premier c, ſont premiers avec f. Ainſi * abc & f, ſont premiers entr'eux. Enfin abc, & le nombre premier d, ſont premiers avec f; par conſequent * $abcd$ & f ſont premiers entr'eux. 2°. a & a ſont, par la ſuppoſition, premiers avec f; par conſequent * a^2 & f ſont premiers entr'eux: a^2 & a ſont donc premiers avec f, par conſequent a^3 & f ſont premiers entr'eux. Il eſt facile d'étendre la démonſtration à toutes les puiſſances de a & de f. Ainſi on peut ſuppoſer dêmontré, que a^m & f ſont premiers entr'eux. 3°. a^m & b ſont premiers avec f; donc $a^m b$ & f ſont premiers entr'eux. Ainſi $a^m b$ & b ſont premiers avec f; par conſequent $a^m b^2$ & f ſont premiers entr'eux; & comme il eſt évident que la même démonſtra-

* 238. * 238. * 238. * 240.

tion peut s'étendre au produit de a^m par toutes les puiſſances de b, qu'on peut repréſenter par $a^m b^n$; il eſt clair qu'on peut regarder comme démontré que $a^m b^n$ & f ſont premiers entr'eux. Ainſi $a^m b^n$, & le nombre premier c, ſont premiers avec f; par conſequent $a^m b^n c$ & f ſont premiers entr'eux. D'où l'on voit clairement que la démonſtration convient au produit $a^m b^n c^p d^q$, par rapport à f, & aux puiſſances de f; & que $a^m b^n c^p d^q$ eſt premier avec f, & encore avec f^t. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE VII.

245. SI deux nombres, repréſentez par a & b, ſont premiers entr'eux ; leur produit ab, eſt le plus petit de tous les nombres, qui ont a & b pour diviſeurs exacts.

Démonſtration. Si ab n'étoit pas le moindre nombre qui eût a & b pour diviſeurs, il faudroit qu'il y eût un autre nombre, qu'on nommera c, qui fût moindre que ab, & qui eût a & b pour diviſeurs. On va démontrer que ce nombre c, qu'on prétendroit ſuppoſer moindre que ab, eſt neceſſairement plus grand que ab.

Que le quotient de c diviſé par a ſoit q ; & le quotient
* 107. de c, diviſé par b, ſoit r. On aura donc * $aq = c = br$. Ce
* 120. qui donnera * $\frac{a}{b} = \frac{r}{q}$. Mais a & b étant premiers entr'eux,
* 232. $\frac{a}{b}$ eſt * un moindre rapport. Par conſequent * a eſt un divi-
* 221. ſeur de r : ainſi a eſt moindre que r. Par la même raiſon, b eſt moindre que q. Si donc l'on met dans $aq = br = c$, b à la place de q, & a à la place de r, l'on aura ab & ba chacun moindre que aq, & que br, c'eſt à dire, moindre que c. On a donc démontré que c eſt plus grand que ab.

COROLLAIRE VIII.

246. LE plus petit nombre, qu'on nommera d, qui a pour diviſeurs exacts, les deux nombres a & b, eſt un diviſeur exact de tout autre nombre, qu'on repréſentera par c, qui a pour diviſeurs exacts a & b.

Démonſtration. Puiſque d eſt ſuppoſé le moindre nombre qui ait a & b pour diviſeurs exacts; le nombre c, qui a auſſi a & b pour diviſeurs exacts, doit être plus grand que d; ainſi qu'on ôte d de c autant de fois qu'on pourra ; ſi après le dernier retranchement l'on a zero pour reſte, d eſt un diviſeur

exact de c : *ce qu'il falloit prouver*. Si après la derniere ſouſtraction, on trouve un reſte, qu'on nommera r, qui doit être moindre que d, & que n marque le nombre de fois que l'on aura ôté d de c, l'on aura * $nd + r = c$. Mais a & b étant des diviſeurs exacts de d & de c, a & b ſont auſſi des diviſeurs exacts * de nd multiple de d, & * du reſte r. Si donc ce reſte r eſt moindre que d; le nombre r, moindre que d, aura pour diviſeurs a & b: ce qui détruit la ſuppoſition qu'on a faite, que d étoit le plus petit nombre qui avoit pour diviſeurs a & b. Il ne ſe peut donc pas faire que le plus petit nombre d, qui a pour diviſeurs a & b, ne ſoit pas un diviſeur exact de tout nombre c, qui a pour diviſeurs a & b. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 107.
* 235.
* 236.

COROLLAIRE IX.

247. QU'ON ſuppoſe telle ſuite de nombres qu'on voudra a, b, c, d, *&c.* qui ſoient premiers entr'eux; leur produit $abcd$ ſera le plus petit nombre qui ait pour ſes diviſeurs les mêmes nombres a, b, c, d.

Démonſtration. Le moindre nombre qui aura pour diviſeurs a, b, c, doit avoir pour diviſeur * ab, qui * eſt le moindre nombre qui ait a & b pour diviſeurs. Puis donc qu'il doit avoir ab & c pour diviſeurs, & que ab & c * ſont premiers entr'eux; il eſt évident que abc * étant le plus petit nombre qui ait ab & c pour diviſeurs, il eſt auſſi le plus petit nombre qui ait a, b, c pour diviſeurs.

* 246.
* 245.
* 239.
* 245.

Il eſt évident qu'on peut appliquer cette démonſtration par ordre aux produits $abcd$, $abcde$, *&c.* des nombres, a, b, c, d, e, *&c.* qu'on ſuppoſe premiers entr'eux.

COROLLAIRE X.

248. LE moindre nombre, qui a pour diviſeurs exacts tant de nombres a, b, c, d, qu'on voudra, eſt un diviſeur exact de tout autre nombre, qui a les mêmes nombres pour diviſeurs.

La démonſtration eſt ſemblable à celle du 8e Corollaire *. * 246.

REMARQUE.

249. LES propoſitions qu'on vient de demontrer ſur les nombres, ſont des axiomes par rapport aux grandeurs litterales; & les expreſſions litterales en font clairement voir la verité.

PROBLÊME.

250 *TROUVER le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs numeriques ou litterales.*

Regle ou operation Nommant la premiere celle des deux grandeurs qui eſt la plus grande, & l'autre la ſeconde; 1°. Il faut diviſer la premiere qu'on nommera *A*, par la ſeconde qu'on nommera *B*. Si la diviſion ſe peut faire exactement, la ſeconde grandeur *B* eſt évidemment le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

2°. Si la diviſion ne peut ſe faire ſans un reſte, qu'on nommera *C*; il faut négliger le quotient de la diviſion, & diviſer la ſeconde grandeur *B* par le reſte *C*. Si la diviſion eſt exacte; *C* eſt le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

3°. Si la diviſion laiſſe un reſte *D*, il faut négliger le quotient, & diviſer le premier reſte *C* par le ſecond *D*; & ſi la diviſion laiſſe un reſte *E*, diviſer le ſecond reſte *D* par le troiſiéme *E*; & continuer ainſi de diviſer (en négligeant les quotients) le reſte précedent par le ſuivant, juſqu'à ce qu'on trouve un reſte qui faſſe la diviſion exactement. Ce reſte ſera le plus grand diviſeur commun. Si l'on arrivoit à l'unité, & qu'on ne trouvât que l'unité pour diviſeur commun; les deux grandeurs propoſées n'auroient pas d'autre diviſeur commun que l'unité.

Exemples ſur les grandeurs numeriques.

I. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de 35 & de 7; On diviſera 35 par 7; & la diviſion étant exacte, il eſt évident que 7 eſt le plus grand diviſeur commun que l'on cherchoit.

II. EXEMPLE.

ON trouvera de même le plus grand diviſeur commun de 255 & de 80. 1°. En diviſant 255 par 80, on trouvera le quotient 3, qu'on négligera, & le reſte 15. 2°. On diviſera la ſeconde grandeur 80 par 15, & l'on trouvera le quotient 5, qu'on négligera, & le reſte 5. 3°. On diviſera le premier reſte 15 par le ſecond reſte 5; & la diviſion étant exacte, le ſecond reſte 5 eſt le plus grand diviſeur commun de 255 & de 80 que l'on cherchoit.

III. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de 6503 & de 3010, 1°. On diviſera 6503 par 3010, on trouvera le quotient 2, qu'on négligera, & le reſte 483. 2°. On diviſera 3010 par le premier reſte 483. On trouvera le quotient 6, qu'on négligera, & le reſte 112. 3°. On diviſera le premier reſte 483 par le ſecond reſte 112; & l'on trouvera le quotient 4, qu'on négligera, & le reſte 35. 4°. On diviſera le ſecond reſte 112 par le troiſiéme reſte 35; & on trouvera le quotient 3; qu'on négligera, & le reſte 7. Enfin on diviſera le troiſiéme reſte 35 par le quatriéme reſte 7; & la diviſion étant exacte, le dernier reſte 7, qui eſt un diviſeur exact du reſte précedent, eſt le plus grand diviſeur qu'on cherchoit.

Methode pour les grandeurs litterales.

I. *Pour les grandeurs incomplexes.*

251. REGLE. Quand les grandeurs ſont incomplexes, il eſt inutile de ſuivre la regle du Problême; il ſuffit de prendre le produit de toutes les lettres communes à chacune des grandeurs, dont on cherche le plus grand diviſeur commun; ce produit de toutes les lettres communes eſt le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

Par exemple pour trouver le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs $a^3b^3c^4de$, $a^3bc^3d^3f$, il faut prendre le produit a^3bc^3d de toutes les lettres communes; il eſt évident que ce produit eſt le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

II. *Pour les grandeurs complexes.*

252. REGLE *ou methode*. Il faut ſuivre la regle du Problême; mais les grandeurs litterales complexes ayant encore quelque choſe qui leur eſt propre, on va mettre ici la methode entiere qui leur convient. Il faut d'abord ordonner les termes de chacune des grandeurs, dont on cherche le plus grand diviſeur commun, par rapport à une même lettre. Quand ces grandeurs contiennent quelque lettre qui marque une grandeur inconnue, il faut les ordonner par rapport à cette lettre. Quand les lettres ſont toutes connues, on peut ordonner les termes de ces grandeurs, par rapport

à celle des lettres qu'on voudra. On mettra dans les exemples les deux grandeurs complexes toutes ordonnées par rapport à la lettre qui en diſtinguera les termes, & cet article n'eſt que pour en avertir. 1°. Si les termes de chacune des deux grandeurs complexes ſont tous multipliez par quelque grandeur litterale ou numerique, il faut les diviſer tous par cette grandeur, qui en eſt un diviſeur commun; & écrire à part ce diviſeur commun; & quand on aura trouvé le plus grand diviſeur commun des deux quotients, il faudra le multiplier par ce diviſeur commun qu'on aura trouvé d'abord; & le produit fera le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs propoſées.

2°. On nommera *A* celle des deux grandeurs propoſées, qui doit ſervir de dividende dans la recherche du plus grand diviſeur commun; *B*, celle qui doit ſervir de diviſeur; *C*, le reſte qu'on peut trouver après avoir diviſé *A* par *B*; *D*, le reſte qui peut ſe rencontrer après avoir diviſé *B* par le premier reſte *C*; & ainſi de ſuite. Quand on apperçoit, avant de diviſer ſoit *A* par *B*; ſoit *B* par *C*, ſoit *C* par *D*, *&c.* que tous les termes du diviſeur de quelqu'une de ces diviſions ſont multipliez par une même grandeur qui en eſt un diviſeur commun, mais qui n'eſt pas en même temps un diviſeur commun de tous les termes du dividende, & qui par conſequent ne doit pas entrer dans le plus grand diviſeur commun; il faut toujours abreger l'expreſſion du diviſeur, en diviſant tous ſes termes par le diviſeur qui leur eſt commun à tous, & prendre le quotient qui en viendra pour le diviſeur. Quand ce ſont tous les termes du dividende qui ont un diviſeur commun entr'eux, mais qui n'eſt pas commun au diviſeur, & qui par conſequent ne doit pas entrer dans le plus grand diviſeur commun; on doit auſſi abreger l'expreſſion du dividende, en le diviſant par le diviſeur commun à tous les termes, quand cela n'empêche pas de faire la diviſion de ce dividende par le diviſeur, c'eſt à dire, quand ce diviſeur commun à tous les termes du dividende, ne contient point la lettre qui en diſtingue les termes.

3°. Il faut diviſer celle des deux grandeurs complexes propoſées, dans laquelle la lettre, qui en diſtingue les termes, a le plus de dimenſions dans le premier terme (qu'on a nommée *A*) par l'autre grandeur qu'on a nommée *B*; & ſi le premier

premier terme de chacune de ces deux grandeurs complexes contient une égale puiſſance de la lettre qui diſtingue les termes, on prendra celle des deux qu'on voudra pour dividende *A*, & l'autre pour diviſeur *B*. Si la diviſion eſt exacte, la grandeur *B*, qui a ſervi de diviſeur, ſera elle-même le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

Si la diviſion de tous les termes du dividende ne ſe peut faire exactement, on la continuera toujours juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte *C* dans le 1er terme du quel reſte *C*, la lettre qui diſtingue les termes, ſoit d'un moindre degré, que dans le premier terme du diviſeur *B*. On négligera le quotient, & l'on diviſera la grandeur *B* par le reſte *C*. Si la diviſion eſt exacte, le reſte *C* eſt le plus grand diviſeur commun qu'on cherche.

Si la diviſion de *B* par le reſte *C* donne un reſte *D*; on négligera le quotient, & on diviſera le premier reſte *C* par le ſecond reſte *D*; & ſi la diviſion laiſſe un reſte *E*, on diviſera le ſecond reſte *D* par le troiſiéme *E*; & l'on continuera de diviſer ainſi le reſte précedent par le ſuivant, juſqu'à ce qu'on ait trouvé un reſte qui diviſe exactement le precedent. Le dernier reſte, qui ſera un diviſeur exact du précedent, ſera le plus grand diviſeur commun qu'on cherchoit.

4°. Si l'on arrive à un reſte qui ſoit une grandeur ſimple ou premiere, c'eſt à dire, qui n'ait point d'autre diviſeur qu'elle-même & l'unité; & que ce reſte ne ſoit pas un diviſeur exact du reſte précedent, & que l'on n'ait pas trouvé par le premier article de diviſeur commun à tous les termes de l'une & de l'autre des deux grandeurs propoſées, elles n'ont point de plus grand diviſeur commun que l'unité.

5°. Quand en faiſant les diviſions que preſcrit cette méthode, on trouve une fraction pour quotient; il faut préparer le dividende de maniere que la diviſion donne une grandeur entiere pour quotient. Voici comment ſe fait cette préparation. On efface du quotient qui eſt une fraction, dont le numerateur eſt le premier terme du dividende, & le dénominateur eſt le premier terme du diviſeur; on efface, dis-je, les lettres communes, ou le diviſeur qui eſt commun au numerateur & au dénominateur, * ce qui ne change point la valeur de la fraction. Enſuite on multiplie tous les termes du dividende par le dénominateur de la fraction, qu'on a

* 109.

trouvée pour quotient, ainſi abregée. Après cette préparation du dividende, on trouvera, en faiſant la diviſion, une grandeur entiere pour quotient de cette diviſion.

Quand on ſçaura la diviſion des fractions, qu'on expliquera dans la ſuite; on pourra faire la diviſion ſans cette préparation, laquelle neanmoins rend le calcul plus facile.

I. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $a^3b^2 - a^3c^2$ & $adb - acd$, qui ſont ordonnées par rapport à la lettre b 1°. Voyant que a eſt un diviſeur commun de ces deux grandeurs, je l'efface de tous les termes de l'une & de l'autre; & les deux grandeurs ſur leſquelles je dois operer, ſont $a^2b^2 - a^2c^2$ & $db - dc$. Et quand j'aurai trouvé leur plus grand diviſeur commun, il faudra le multiplier par a, pour avoir le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs propoſées.

$a^3b^2 - a^3c^2$	diviſeur commun a
$adb - acd$	plus grand diviſeur commun $ab - ac$

2°. Je remarque que tous les termes du diviſeur $db - cd$ ont d pour diviſeur commun; mais n'étant pas un diviſeur commun des termes du dividende $a^2b^2 - a^2c^2$, il ne doit point entrer dans le plus grand diviſeur commun. J'efface d, & la grandeur qui doit ſervir de diviſeur eſt réduite à $b - c$. Je remarque auſſi que a^2 eſt un diviſeur commun de tous les termes du dividende $a^2b^2 - a^2c^2$; mais n'étant pas commun aux termes du diviſeur, il ne doit pas entrer dans le plus grand diviſeur commun; & comme ce diviſeur a^2, commun à tous les termes du dividende, ne contient point la lettre b qui en diſtingue les termes, je diviſe le dividende $a^2b^2 - a^2c^2$ par a^2, & le dividende eſt réduit à l'expreſſion plus ſimple $b^2 - c^2$.

3°. Je diviſe $b^2 - c^2$ par $b - c$; & je trouve que la diviſion eſt exacte. Ainſi $b - c$ eſt le plus grand diviſeur commun de $b^2 - c^2$, & de $b - c$; & le multipliant par le diviſeur commun a aux deux grandeurs propoſées trouvé par la premiere operation, le produit $ab - ac$ eſt le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs propoſées $a^3b^2 - a^3c^2$, $adb - acd$.

REMARQUE.

SI $b - c$ n'eût pas été un diviſeur exact de $b^2 - c^2$; comme $b - c$ eſt une grandeur ſimple qui ne peut avoir de diviſeur qu'elle & l'unité, les deux grandeurs propoſées n'auroient point eu d'autre plus grand diviſeur commun que a, que l'on a trouvé par le premier article de l'operation.

AVERTISSEMENT.

ON a mis dans ce premier exemple, qui eſt très ſimple, la pratique des deux premiers articles de la methode; afin que les Commençans les conçuſſent clairement, leur attention n'étant partagée par aucune autre choſe.

II. EXEMPLE.

SOIT propoſé de trouver le plus grand diviſeur commun de $a^2x^2 - c^2x^2 - a^2c^2 + c^4$, & de $4a^2x - 4acx - 2ac^2 + 2c^3$, qui ſont ordonnées par rapport à la lettre x. Appercevant que le premier terme de l'une & l'autre de ces deux grandeurs complexes propoſées, eſt une grandeur complexe; j'examine ſi la grandeur complexe $a^2 - c^2$ qui eſt multiplicateur de la plus haute puiſſance x^2 de la premiere grandeur dans ſon premier terme, n'eſt point un diviſeur commun de tous les termes de la premiere grandeur, je trouve qu'elle en eſt un diviſeur exact: mais pour voir ſi je dois diviſer le dividende par ce diviſeur exact $a^2 - c^2$, je cherche ſi la même grandeur $a^2 - c^2$ ou quelqu'un de ſes diviſeurs n'eſt point auſſi un diviſeur exact de la ſeconde grandeur. Je vois d'abord que $a^2 - c^2$ n'eſt pas elle-même un diviſeur exact de la ſeconde grandeur, & qu'ainſi $a^2 - c^2$ n'eſt pas un diviſeur commun aux deux grandeurs propoſées. Mais je cherche s'il n'y a point de diviſeur exact de $a^2 - c^2$ qui le ſoit auſſi de la ſeconde grandeur propoſée. Et pour cela je cherche le plus grand diviſeur commun de $a^2 - c^2$, & de la grandeur $4a^2 - 4ac$, par laquelle la plus haute puiſſance de x, qui eſt x même, eſt multipliée dans le premier terme de la ſeconde grandeur propoſée, & je verrai enſuite plus facilement ſi ce plus grand diviſeur

$$\begin{array}{l} a^2x^2 - a^2c^2 \\ -c^2x^2 + c^4 \\ \\ 4a^2x - 2ac^2 \\ -4acx + 2c^3 \end{array}$$

commun ou quelqu'un de ſes diviſeurs, ne ſera point auſſi un diviſeur commun des deux grandeurs propoſées.

J'opere donc d'abord ſur $a^2 - c^2$, & $4a^2 - 4ac$; & voyant que $4a^2 - 4ac$ a pour diviſeur $4a$, qui n'eſt point un diviſeur commun à $a^2 - c^2$, je la diviſe par $4a$, & elle devient $a - c$. Comme $a - c$ eſt une grandeur ſimple ou premiere, je cherche ſi elle n'eſt point un diviſeur de $a^2 - c^2$, & trouvant, en faiſant la diviſion, qu'elle en eſt un diviſeur exact; je cherche ſi chacune des deux grandeurs propoſées $a^2x^2 - c^2x^2 - a^2c^2 + c^4$, & $4a^2x - 4acx - 2ac^2 + 2c^3$ peut ſe diviſer exactement par $a - c$; & je trouve, en faiſant les deux diviſions, que $a - c$ en eſt un diviſeur exact, que le quotient de la premiere eſt $ax^2 + cx^2 - ac^2 - c^3$, & celui de la ſeconde $4ax - 2c^2$, j'écris à part le diviſeur commun $a - c$.

Je cherche à préſent le plus grand diviſeur commun de $ax^2 + cx^2 - ac^2 - c^3$, & de $4ax - 2c^2$. Mais je remarque que la premiere de ces grandeurs peut ſe diviſer par $a + c$ qui n'eſt point un diviſeur de la ſeconde. Je diviſe donc la premiere par $a + c$, & le quotient eſt $x^2 - c^2$. Je remarque auſſi que la ſeconde $4ax - 2c^2$ peut ſe diviſer par 2, & le quotient eſt $2ax - c^2$. Ainſi je cherche le plus grand diviſeur commun de $x^2 - c^2$, & de $2ax - c^2$. Mais voyant que la grandeur $2ax - c^2$, qui doit ſervir de diviſeur, eſt une grandeur premiere ou ſimple ; & qu'elle n'eſt pas un diviſeur exact de $x^2 - c^2$, cela me fait connoître que les deux grandeurs propoſées n'ont pas d'autre plus grand diviſeur commun que $a - c$ que j'ai trouvé d'abord.

AVERTISSEMENT.

ON a mis cet exemple pour faire voir aux Commençans, quand le premier terme de chacune des grandeurs complexes propoſées eſt lui même une grandeur complexe, comment on réduit en pratique dans ce cas le premier article de la methode pour découvrir s'il n'y a point de diviſeur commun à tous les termes de l'une & de l'autre des grandeurs propoſées.

On va voir dans les exemples ſuivans la pratique du 3e & du 5e article de la methode.

III. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4$, & de $x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4$, je diviſe la premiere par la ſeconde; je trouve le quotient 1 que je néglige, & le reſte $- ax^3 - a^2x^2 - 4a^3x - 12a^4$. Je diviſe ce reſte par $- a$, ce qui réduit ce reſte à $x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3$.

Je diviſe la ſeconde grandeur propoſée $x^4 - 3ax^3 +$ &c. par ce reſte $x^3 + ax^2 +$ &c. Je trouve le quotient $x - 4a$ que je néglige, & le reſte $+ 12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4$. Je diviſe ce reſte par $+ 12a^2$, & je le réduis par-là à $x^2 - ax + 6a^2$.

Je diviſe le premier reſte $x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3$ par le ſecond reſte $x^2 - ax + 6a^2$, & la diviſion étant exacte, le dernier reſte $x^2 - ax + 6a^2$ eſt le plus grand diviſeur commun qu'il falloit trouver.

IV. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6$, & de $- 12x^2 + 30x - 18$, 1°. Je diviſe chacune de ces grandeurs par 3 qui en eſt un diviſeur commun; la premiere eſt réduite à $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, & la ſeconde à $- 4x^2 + 10x - 6$. J'écris à part ce diviſeur commun 3.

2°. Je diviſe la ſeconde grandeur $- 4x^2 + 10x - 6$ par 2 qui eſt un diviſeur commun de tous ſes termes, & elle eſt réduite à $- 2x^2 + 5x - 3$. Mais ce diviſeur 2 de la ſeconde grandeur n'étant pas commun à la premiere, il ne doit point entrer dans le plus grand diviſeur commun.

3°. Je diviſe la premiere grandeur réduite à $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ par $- 2x^2 + 5x - 3$. Mais le quotient étant $\frac{x^3}{-2x^2} = \frac{x}{-2}$, je multiplie, ſuivant le 5e article de la methode, la premiere grandeur $x^3 - 4x^2$, &c. par le dénominateur $- 2$, & j'ai la premiere grandeur préparée $- 2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$. Je la diviſe par la ſeconde grandeur $- 2x^2 + 5x - 3$; & je trouve d'abord le quotient $+ x$: & continuant la diviſion, parceque la puiſſance x^2 n'eſt pas moindre dans le dividende que dans le diviſeur, je trouve pour ſecond quotient la fra-

ction $\frac{1}{-2}$. Ainſi, ſuivant le cinquieme article, je prepare le dividende $+3x^2-7x+4$, en le multipliant par le denominateur -2; & j'ai le dividende préparé $-6x^2+14x-8$, que je diviſe par le diviſeur $-2x^2+5x-3$, & je trouve le quotient 3, & le reſte $-x+1$. Je néglige les quotients $x+3$; & je diviſe la ſeconde grandeur propoſée réduite à $-2x^2+5x-3$ par le reſte $-x+1$. La diviſion ſe fait exactement: ainſi multipliant par 3 le reſte $-x+1$, ou bien $+x-1$ (en changeant les ſignes, ce qui ne change point le diviſeur,) j'ai $-3x+3$ ou $+3x-3$, pour le plus grand diviſeur commun, *qu'il falloit trouver*.

V. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun de $x^3-2ax^2-bx^2+a^2x+2abx-a^2b$, & de $-2ax^2-bx^2+2a^2x+4abx-3a^2b$, je diviſe la premiere par la ſeconde; & trouvant pour premier quotient la fraction $\frac{x}{-2a-b}$, je multiplie, ſuivant le cinquiéme article de la methode, le dividende par le dénominateur $-2a-b$, & j'ai le dividende préparé $-2ax^3-bx^3+4a^2x^2+4abx^2+b^2x^2-2a^3x-5a^2bx-2ab^2x+2a^3b+a^2b^2$.

Je le diviſe par la ſeconde grandeur $-2ax^2-bx^2$, *&c.* & je trouve d'abord le quotient x; & continuant la diviſion, je trouve pour quotient la fraction $\frac{2a^2+b^2}{-2a-b}$; ainſi je prépare le reſte du dividende, en le multipliant par le dénominateur $-2a-b$; ce qui me donne le dividende préparé $-4a^3x^2-2a^2bx^2-2ab^2x^2-b^3x^2+4a^4x+6a^3bx+6a^2b^2x+2ab^3x-4a^4b-4a^3b^2-a^2b^3$. Je le diviſe par le diviſeur $-2ax^2-bx^2$, *&c.* & je trouve le quotient $2a^2+b^2$, & le reſte $-2a^3bx+4a^2b^2x-2ab^3x+2a^4b-4a^3b^2+2a^2b^3$.

Je néglige les quotients x & $2a^2+b^2$, & je diviſe le reſte précedent par $-2a^3b+4a^2b^2-2ab^3$; ce qui le réduit à $x-a$. Et je diviſe la ſeconde grandeur $-2ax^2-bx^2$, *&c.* qui a ſervi juſqu'ici de diviſeur, par le reſte qui a été réduit à $x-a$; la diviſion ſe fait exactement; par conſéquent le reſte $x-a$ eſt le plus grand diviſeur commun *qu'il falloit trouver*.

Préparation pour la démonſtration.

On ſuppoſera que la premiere grandeur A numerique ou litterale étant diviſée par la ſeconde B, l'on trouve le quotient m & le reſte C. Ainſi $A = mB + C$; que la ſeconde B, étant diviſée par le premier reſte C, on trouve le quotient n, & le reſte D. Ainſi $B = nC + D$. Qu'enfin, en diviſant le premier reſte C par le ſecond reſte D, on trouve le quotient exact p; ainſi $C = pD$. Il faut démontrer que D eſt le plus grand diviſeur commun de A & de B.

Premiere.	Seconde.
A	B
$A = mB + C$	
$B = nC + D$	
$C = pD$	

Démonſtration du Problême.

253. 1°. D eſt un diviſeur commun de A & de B. Car D étant un diviſeur de C, par la ſuppoſition, * eſt un diviſeur de nC multiple de C; & étant auſſi diviſeur de lui-même, il eſt diviſeur de $nC + D$; & par conſequent de $B = nC + D$. D * eſt donc auſſi diviſeur de mB multiple de B; & l'étant de C, il eſt auſſi diviſeur de $mB + C$; & par conſequent de $A = mB + C$. Il reſte à démontrer que D eſt le plus grand diviſeur commun de A & de B. * 235. * 235.

2°. Le plus grand diviſeur commun de A & de B, étant diviſeur de $A = mB + C$, & de la premiere partie mB, qui eſt un multiple de B, eſt auſſi diviſeur * de la ſeconde partie C; & par conſequent * de nC multiple de C; & nC étant la premiere partie de $nC + D = B$, le plus grand diviſeur commun de A & de B, doit être diviſeur * de la ſeconde partie $+ D$. D'où l'on voit que le plus grand diviſeur commun de A & de B doit néceſſairement être un diviſeur exact du dernier reſte D; c'eſt à dire du dernier reſte qui diviſe exactement le reſte précedent. * 236. * 235. * 236.

Il faut donc que le plus grand diviſeur commun de A & B, ne ſoit pas different du dernier reſte D, qu'on a demontré être un diviſeur commun de A & de B; puiſqu'autrement D ſeroit un diviſeur commun de A & de B, qui ſurpaſſeroit le plus grand diviſeur commun de A & de B. Ce qui détruiroit la ſuppoſition.

Démonſtration pour le cas où il faut préparer le dividende.

Premiere. Seconde.

254. SUPPOSE', qu'en diviſant la premiere grandeur A par la ſeconde B, on trouve une fraction dont le dénominateur ſoit f; il faut, *par le cinquiéme article de la methode*, multiplier A par f, pour avoir le dividende preparé fA. Qu'en diviſant enſuite fA par B, on trouve le quotient m & le reſte C; l'on aura * $fA = mB + C$. Diviſant enſuite B par le reſte C, qu'on trouve une fraction dont le dénominateur ſoit g; il faut multiplier B par g, pour avoir le dividende préparé gB. Diviſant enſuite gB par C, que le quotient ſoit n, & le reſte D. L'on aura * $gB = nC + D$. Enfin que le dernier reſte D ſoit un diviſeur du précedent C, & que p marque combien de fois D eſt dans C. Cela donnera * $C = pD$.

A	B
$fA = mB + C$	
$gB = nC + D$	
$C = pD$	

252. 107. 107. 107.

Il eſt évident que le plus grand diviſeur commun de A & de B * eſt diviſeur de fA, & par conſequent de $mB + C =$ fA. Il eſt auſſi diviſeur de * gB & de mB; & par conſequent de * C. Il eſt donc auſſi diviſeur de * nC & de * D. Mais le dernier reſte D eſt ſuppoſé un diviſeur exact de C, ainſi le plus grand diviſeur de A & de B, étant un diviſeur de D, il faut que D ne ſoit pas different de ce plus grand commun diviſeur de A & de B, ou du moins qu'il le contienne, & qu'il en ſoit un multiple: & s'il en étoit un multiple, il y auroit un commun multiplicateur de tous ſes termes. Ainſi en le diviſant par ce commun multiplicateur de tous les termes, on auroit le plus grand diviſeur commun de A & de B.

235. 235. 236. 235. 236.

Enfin il eſt évident que quand, en cherchant le plus grand commun diviſeur de A & de B, on trouve, *par le premier article de la methode*, un diviſeur commun de A & de B, il faut multiplier le plus grand diviſeur commun, qu'on aura trouvé à la fin de l'operation, par ce commun diviſeur trouvé par le premier article, & le produit ſera le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs propoſées.

I. COROLLAIRE.

255. DEUX grandeurs numeriques ou litterales étant diviſées par le plus grand diviſeur commun, les deux quotients n'ont plus aucun diviſeur commun.

Dé-

Démonſtration. Que A & B, étant diviſez par leur plus grand diviſeur commun D, les quotients ſoient E & F; il faut démontrer que E & F n'ont aucun diviſeur commun. Si E & F pouvoient avoir un diviſeur commun, qu'on le nomme d; qu'on nomme m le quotient de E diviſé par d; & n le quotient de F diviſé par d. D'où l'on aura * $md = E$, & $nd = F$. *107.
L'on a auſſi * $ED = A$, & $FD = B$. En mettant md à la *107.
place de E dans $ED = A$, & nd à la place de F dans $FD = B$, l'on aura $mdD = A$, & $ndD = B$. Mais il eſt évident que $mdD = A$, & $ndD = B$ ont pour diviſeur commun dD plus grand que D. Il s'enſuivroit donc, ſi les quotients E & F avoient un diviſeur commun, que D ne ſeroit pas le plus grand diviſeur de A & de B, ce qui détruiroit la ſuppoſition. Par conſequent E & F n'ont aucun diviſeur commun.

COROLLAIRE II.

256. D'où il ſuit que deux grandeurs numeriques ou litterales étant diviſées par leur plus grand diviſeur commun, les deux quotients * ſont premiers entr'eux, & par conſequent * un moindre rapport. *229. *232.

COROLLAIRE III.

257 TOUT diviſeur commun de deux grandeurs numeriques ou litterales, eſt auſſi un diviſeur du plus grand diviſeur commun de ces deux grandeurs.

Démonſtration. Il eſt évident par la démonſtration du Problême * que tout diviſeur des deux grandeurs A & B eſt diviſeur de $mB + C = A$, de * mB, de * C, de $nC + D = B$, * de nC, & enfin * de D qu'on a démontré être le plus grand diviſeur commun de A & de B. *253. *235. *236. *235. *236.

La propoſition réciproque, que tout diviſeur du plus grand diviſeur commun de A & de B, eſt auſſi un diviſeur de chacune de ces grandeurs A & B, eſt évident par l'axiome de l'*article* 235.

PROBLÊME.

258. *TROUVER le plus grand diviſeur commun de trois grandeurs numeriques ou litterales, A, B, C; de quatre A, B, C, D; & ainſi de ſuite.*

*250.252. *Operation.* 1°. Il faut trouver * le plus grand diviſeur commun de *A* & de *B*, on le nommera *d*. 2°. Il faut enſuite trouver le plus grand diviſeur commun qu'on nommera *e* de *d* & de *C*: Et *e* ſera le plus grand diviſeur commun des trois grandeurs *A*, *B*, *C*. 3°. S'il y a quatre grandeurs *A*, *B*, *C*, *D*; après avoir trouvé le plus grand diviſeur commun *e* des trois *A*, *B*, *C*; il faut trouver le plus grand diviſeur commun *f* de *e* & de *D*: *f* ſera le plus grand diviſeur de *A*, *B*, *C*, *D*. On trouvera de même, en continuant l'operation, le plus grand diviſeur de *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; de *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *&c.*

*257. *Démonſtration.* Il eſt évident * que le plus grand diviſeur commun *e*, que fait trouver la methode, eſt un diviſeur commun de *A*, *B*, *C*. 2°. Le plus grand diviſeur commun de *A*, *B*, *C*, *257. * devant être un diviſeur de *d* & de *C*, * eſt neceſſairement *257. un diviſeur de *e*. Par conſequent ce plus grand diviſeur commun de *A*, *B*, *C* ne peut pas être different de *e*; puiſqu'autrement *e* ſeroit un diviſeur de *A*, *B*, *C* qui ſurpaſſeroit le plus grand commun diviſeur de *A*, *B*, *C*; ce qui détruiroit la ſuppoſition.

Cette démonſtration peut aiſément s'appliquer au plus grand diviſeur commun *f* des quatre grandeurs *A*, *B*, *C*, *D*, que fait découvrir le Problême, au plus grand diviſeur commun des cinq grandeurs *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, & ainſi de ſuite.

COROLLAIRE I.

259. TANT de grandeurs qu'on voudra *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *&c.* étant diviſées par leur plus grand diviſeur commun; les quotients n'ont plus entr'eux tous aucun diviſeur commun.

La démonſtration eſt ſemblable à celle de l'*article* 255.

COROLLAIRE II.

260. TANT de grandeurs qu'on voudra, étant diviſées par leur plus grand diviſeur commun, les quotients ſont les moindres *223.& 226. grandeurs, * qui ayent entr'elles les mêmes rapports qui ſont entre les dividendes.

COROLLAIRE III.

261. TOUT diviſeur de tant de grandeurs qu'on voudra *A*, *B*, *C*, *&c.* eſt un diviſeur du plus grand diviſeur commun de ces grandeurs.

La démonſtration eſt ſemblable à celle de l'*article* 257.

PROBLÈME.

262. *TROUVER la plus petite grandeur numerique ou litterale, qui ait pour diviſeurs deux grandeurs numeriques ou litterales qui ſont données.*

Regle ou operation. Soient les deux grandeurs propoſées numeriques ou litterales repreſentées par A, B. 1°. Si A & B ſont premieres entr'elles, il faut prendre leur produit AB: ce ſera * la plus petite grandeur qui ait A & B pour diviſeurs. * 245.

2°. Si A & B ne ſont pas premieres entr'elles, il faut trouver * leur plus grand diviſeur commun, qu'on nommera d: les diviſer enſuite par ce diviſeur commun, & trouver les quotients, qu'on ſuppoſera être a pour la premiere, & b pour la ſeconde; c'eſt à dire $\frac{A}{d} = a$; $\frac{B}{d} = b$. D'où l'on aura * $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Il faut enfin multiplier A par b, ou B par a, & l'on aura $Ab = aB$: chacun de ces deux produits égaux ſera le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs A & B. * 250, 252. * 256. & 218.

EXEMPLES.

POUR trouver le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 5 & 7 qui ſont premiers entr'eux; il ne faut que les multiplier l'un par l'autre, & leur produit 35 *, ſera le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 5 & 7. De même le produit ab des deux grandeurs litterales a & b premieres entr'elles *, eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs a & b. * 245. * 245.

De même le produit $\overline{a^2 - ab} \times \overline{a + b} = a^3 - ab^2$ des deux grandeurs litterales $a^2 - ab$, & $a + b$ qui ſont premieres entr'elles, eſt * la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs ces mêmes grandeurs. * 245.

Pour trouver le moindre nombre qui ait pour diviſeurs 30 & 36; on cherchera leur plus grand diviſeur commun, que l'on trouvera être 6. On diviſera 30 par 6, & 36 par 6; & l'on aura les quotients 5 & 6, & on écrira ces deux fractions égales $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ à côté l'une de l'autre. Enfin on multipliera en croix 30 par 6, ou 36 par 5, & chacun des produits égaux 180 & 180, ſera le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 30 & 36.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les grandeurs litterales a^2b & ad: je les diviſe par leur plus grand diviſeur commun a, & j'ai les quotients ab & d: j'écris $\frac{a^2b}{ad} = \frac{ab}{d}$ à côté l'une de l'autre, & je multiplie a^2b par d, ou ad par ab, & chacun des produits égaux a^2bd, & a^2bd, eſt la plus petite grandeur que je cherche.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les grandeurs litterales $\overline{a+b}^2 = a^2+2ab+b^2$ & $a+b \times a-b = a^2-b^2$ Je cherche leur plus grand diviſeur commun $a+b$; je les diviſe chacune par $a+b$; & ayant trouvé les quotients $a+b$ & $a-b$, j'écris $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{a-b}$. Enfin je prens le produit $\overline{a^2+2ab+b^2} \times \overline{a-b}$, ou $\overline{a^2-b^2} \times \overline{a+b} = a^3+a^2b-ab^2-b^3$; c'eſt la grandeur que je cherche.

263. *Démonſtration*. Le premier article de la methode a déja
*245. été démontré *; il faut démontrer le ſecond. Soient A, B les grandeurs propoſées, d leur plus grand diviſeur commun; a le quotient de A diviſée par d; b le quotient de B diviſée par d. Il faut démontrer que Ab ou ſon égale aB, eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs A & B. Suppoſé qu'il y en eût une autre plus petite, on la nommera C; que le quotient de C diviſée par A ſoit q; & le quotient de C diviſée par B ſoit r, on aura $C = Aq = Br$. On va démontrer que cette grandeur C, qu'on ſuppoſe plus petite que Ab ou aB, ſurpaſſe néceſſairement chacune de ces grandeurs.

*119. Puiſque $C = Aq = Br$, l'on aura * $\frac{A}{B} = \frac{r}{q} = $ * $\frac{a}{b}$. Mais
*218. $\frac{a}{b}$ eſt * un moindre rapport; par conſequent a * eſt un divi-
*256. ſeur de r, & b eſt un diviſeur de q: d'où il ſuit que a eſt
*221. moindre que r, & b moindre que q: mettant donc dans $C = Aq = Br$, a au lieu de r, & b au lieu de q; on aura C plus grande que Ab & que aB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

264. LA plus petite grandeur, qu'on nommera E, qui a pour diviſeurs A & B, eſt un diviſeur de toute autre grandeur, qu'on nommera F, qui a pour diviſeurs A & B.

Car qu'on ôte autant de fois qu'il ſe pourra E de F, (laquelle F ſurpaſſe E par la ſuppoſition:) le reſte, qu'on nommera R, ſera ou égal à E, & dans ce cas E, ſera un di-

viſeur de F, *ce qu'il falloit démontrer.* Ou bien le reſte R ſera moindre que E; & dans ce cas, que n marque le nombre de fois que l'on a pû ôter E de F; on aura $nE + R = F$. Mais A & B, étant diviſeurs de E par la ſuppoſition, ſeroient auſſi diviſeurs de * nE; & étant auſſi diviſeurs de $F = nE + R$; A & B * ſeroient diviſeurs de R. D'où il ſuivroit que R, qui auroit pour diviſeurs A & B, ſeroit plus petite que E, ce qui détruiroit la ſuppoſition. Par conſequent E eſt égale à R, & E eſt un diviſeur de F. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 235. * 236.

PROBLÈME.

265. *TROUVER la plus petite grandeur numerique ou litterale qui ait pour diviſeurs tant de grandeurs numeriques ou litterales déterminées qu'on voudra.*

Methode ou operation. Soient les grandeurs numeriques ou litterales données A, B, C, D, *&c.* 1°. Il faut trouver * la plus petite grandeur qu'on nommera E, qui ait pour diviſeurs les deux premieres A & B. Si la troiſiéme C eſt auſſi un diviſeur de E; il eſt évident que E eſt la plus petite grandeur qu'on cherche, étant démontré que E eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs A & B. 2°. Si E n'a pas C pour diviſeur; il faut trouver * la plus petite grandeur qu'on nommera F qui ait pour diviſeur E & C. Cette grandeur F ſera la plus petite qui ait pour diviſeurs A, B, C. 3°. S'il y a quatre grandeurs A, B, C, D. Après avoir trouvé la plus petite grandeur F, qui a pour diviſeurs les trois premieres A, B, C; il faut voir ſi F a auſſi pour diviſeur la quatriéme D; car dans ce cas, F eſt la plus petite grandeur qu'on cherche. Mais ſi D n'eſt pas un diviſeur de F, il faut trouver * la plus petite grandeur G, qui ait pour diviſeurs F & la quatriéme D. Et G ſera la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les quatre grandeurs A, B, C, D. On trouvera de même, en allant de ſuite, la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs cinq grandeurs données, ſix grandeurs, &c. * 262. * 262. * 262.

EXEMPLES.

POUR trouver le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs les nombres donnez 30, 36 & 45; on cherchera le plus petit

nombre 180 qui a pour diviſeurs 30 & 36 : & 180 ayant auſſi pour diviſeur le troiſiéme nombre 45, c'eſt le plus petit nombre qu'on cherche.

Pour trouver le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 30, 36 & 40; 1°. Je cherche le plus petit nombre 180 qui ait pour diviſeurs 30 & 36. 2°. 180 n'ayant pas 40 pour diviſeur, je cherche * le plus petit nombre qui ait pour diviſeurs 180 & 40, & je trouve 360. C'eſt le plus petit nombre que je cherche.

* 262.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 + b^3$. 1°. Je cherche * la plus petite grandeur $\overline{a^2 - b^2} \times \overline{a + b} = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, qui ait les deux premieres pour diviſeurs. 2°. Cette grandeur n'ayant pas la troiſiéme pour diviſeur, je cherche la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, & la troiſiéme $a^3 + b^3$, & je trouve $a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5$. C'eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les trois grandeurs propoſées.

* 262.

Démonſtration du Problême. Il faut démontrer que la grandeur F, que l'on trouve par le Problême, eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les trois grandeurs données A, B, C. 1°. Il eſt évident que E ayant pour diviſeurs A & B, & étant elle-même un diviſeur de F, auſſi-bien que C; * les trois grandeurs A, B, C ſont diviſeurs de F. 2°. E * doit être un diviſeur de toute grandeur qui aura A & B pour diviſeurs. Ainſi la plus petite grandeur qui aura pour diviſeurs A, B, C, ayant E pour diviſeur, eſt neceſſairement la grandeur F qui eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs E & C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 235.
* 246.

Il eſt évident qu'on peut appliquer la même démonſtration aux grandeurs G, H, *&c.* que le Problême fera découvrir pour les plus petites grandeurs qui ayent pour diviſeurs quatre grandeurs, cinq grandeurs, &c.

COROLLAIRE.

266. LA plus petite grandeur, qui a pour diviſeurs tant de grandeurs données qu'on voudra, eſt un diviſeur de toute autre grandeur qui a les mêmes grandeurs pour diviſeurs.

Ce Corollaire eſt le même que dans l'*article* 248. On ne

le met ici que pour faire remarquer qu'il n'eſt pas borné aux ſeules grandeurs numeriques, & qu'il convient auſſi aux grandeurs litterales.

PROBLÊME.

TROUVER tous les diviſeurs d'une grandeur litterale ou numerique.

La methode de reſoudre ce Problême contient deux parties. 1°. Il faut trouver tous les diviſeurs ſimples ou premiers de la grandeur propoſée. 2°. Ayant tous les diviſeurs premiers, il faut trouver tous les diviſeurs compoſez de la grandeur propoſée.

Premiere partie du Problême.

267. POUR trouver tous les diviſeurs premiers d'une grandeur, il faut la diviſer d'abord par la grandeur premiere la plus ſimple dont elle peut être compoſée; & diviſer le quotient par la même grandeur, & continuer de prendre la même grandeur pour diviſeur des quotients, juſqu'à ce qu'elle ne puiſſe plus ſervir de diviſeur exact. Il faut enſuite diviſer le dernier quotient par une autre grandeur premiere; & continuer de diviſer les quotients par la même grandeur premiere, juſqu'à ce qu'elle ne puiſſe plus ſervir de diviſeur exact. Il faut continuer de diviſer le dernier quotient par une troiſiéme grandeur premiere; & le dernier quotient par une quatriéme, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on trouve un quotient qui ſoit lui-même une grandeur premiere : ce dernier quotient ſera le dernier diviſeur ſimple de la grandeur propoſée. Il faut écrire à part tous les diviſeurs premiers; & quand un même diviſeur ſert à pluſieurs fois, il faut l'écrire autant de fois, qu'il a ſervi de diviſeur exact : joindre à ces diviſeurs le dernier quotient, & l'on aura tous les diviſeurs premiers de la grandeur propoſée.

I. EXEMPLE.

Sur une grandeur litterale incomplexe, qui ſervira de formule pour trouver tous les diviſeurs ſimples, & tous les compoſez.

POUR trouver tous les diviſeurs premiers de $a^3b^2c^3d^2$. On diviſera cette grandeur par le diviſeur premier a; & le quo-

tient $a^3b^2c^1d^2$ encore par a; & le quotient $ab^2c^1d^2$ encore par a; & a n'étant pas un diviſeur exact du dernier quotient $b^2c^1d^2$, on diviſera ce dernier quotient par le diviſeur premier b; & le quotient bc^1d^2 encore par b; & b n'étant plus diviſeur du dernier quotient c^1d^2, on le diviſera par c; & le quotient c^1d^2 encore par c; & le quotient cd^2 encore par c. Mais c n'étant plus un diviſeur exact du dernier quotient d^2; on le diviſera par d; & le dernier quotient d étant une grandeur premiere, ce ſera le dernier diviſeur premier de la grandeur propoſée, dont tous les diviſeurs premiers ſont $a, a, a, b, b, c, c, c, d, d$.

On n'a mis cet exemple des grandeurs incomplexes, dont tous les diviſeurs ſimples s'apperçoivent ſans operation, que pour faire clairement concevoir la methode, & pour ſervir de formule.

II. EXEMPLE.

Sur les diviſeurs des nombres.

POUR trouver tous les diviſeurs premiers de 441000; on diviſera ce nombre par le diviſeur premier 2; & le quotient 220500 encore par 2; & le quotient 110250 encore par 2: Le quotient 55125 ne pouvant plus ſe diviſer ſans reſte par 2, on le diviſera par le diviſeur premier 3; & le quotient 18375 encore par 3. Le quotient 6125 ne pouvant plus ſe diviſer par 3, on le diviſera par un autre diviſeur premier 5, & le quotient 1225 encore par 5; & le quotient 245 encore par 5. Le quotient 49 ne pouvant plus ſe diviſer exactement par 5, on le diviſera par un autre diviſeur premier 7; & le quotient étant le nombre premier 7, c'eſt le dernier diviſeur premier de 441000, dont tous les diviſeurs premiers ſont 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7.

Remarque pour les nombres.

ON remarquera ſur les nombres que leurs diviſeurs premiers ne ſont pas toujours de ſuite les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, *&c.* Mais que dans la recherche de tous les diviſeurs premiers, il faut tenter la diviſion par les nombres premiers les plus ſimples; & quand ils ne réuſſiſſent pas, il faut prendre de ſuite pour diviſeurs les nombres premiers ſuivant l'ordre naturel qui eſt entr'eux, n'allant de ſuite aux plus grands,

grands, qu'après avoir employé par ordre les plus petits.

Les Exemples ſuivans ſont ſur les grandeurs litterales complexes.

AVERTISSEMENT.

IL faut toujours, avant l'operation, ordonner la grandeur complexe donnée par rapport à l'une des lettres qu'elle contient.

III. EXEMPLE.

SI l'on veut chercher tous les diviſeurs premiers de $b^2a^5 - a^3b^4$; on verra d'abord que a, a, a, b, b, ſont les diviſeurs premiers incomplexes, & que le dernier quotient eſt $a^2 - b^2$ dont les diviſeurs premiers ſont complexes. On diviſera ce quotient par le diviſeur premier $a - b$, & l'on aura le quotient $a + b$, qui eſt auſſi premier. Ainſi tous les diviſeurs premiers qu'on cherchoit ſont a, a, a, b, b, $a - b$, $a + b$.

IV. EXEMPLE.

SI l'on veut découvrir tous les diviſeurs premiers de $b^2a^8 + b^4a^7 - b^6a^5 - b^8a^4$; on verra d'abord que les diviſeurs premiers incomplexes qui multiplient tous les termes ſont a, a, a, b, b, & que le dernier quotient eſt $a^6 + b^2a^4 - b^4a^2 - b^6$. On diviſera ce quotient par le diviſeur premier complexe d'une dimenſion $a + b$, & le quotient $a^5 - a^4b + 2a^3b^2 - 2a^2b^3 + ab^4 - b^5$ ne pouvant plus être diviſé ſans reſte par $a + b$, on le diviſera par $a - b$. Le quotient $a^4 + 2a^3b^2 + b^4$, ne pouvant plus être diviſé par $a - b$, ni par aucun diviſeur premier complexe d'une dimenſion, on le diviſera par le diviſeur premier complexe $a^2 + b^2$ de deux dimenſions; & le quotient $a^2 + b^2$ étant une grandeur premiere, c'eſt le dernier diviſeur ſimple de la grandeur propoſée, dont tous les diviſeurs premiers ſont, a, a, a, b, b, $a + b$, $a - b$, $a^2 + b^2$, $a^2 + b^2$.

REMARQUE.

ON apperçoit d'abord tous les diviſeurs premiers d'une grandeur litterale incomplexe; comme auſſi tous les diviſeurs premiers incomplexes qui multiplient tous les termes d'une grandeur litterale complexe. On trouve auſſi facilement tous les diviſeurs premiers d'un nombre, en allant de ſuite

des plus petits aux plus grands. Il n'y a de difficile que la recherche des diviſeurs premiers complexes, ſoit d'une dimenſion, ſoit de pluſieurs dimenſions, d'une grandeur complexe litterale. Mais comme le plus grand uſage de cette recherche eſt pour l'Analyſe, l'on a donné les principales methodes pour découvrir ces diviſeurs premiers complexes dans les trois premieres ſections du 4e Livre de l'*Analyſe démontrée*, en particulier dans l'*article* 70. C'eſt le lieu où elles doivent être expliquées & démontrées. Les Lecteurs n'en ayant beſoin que quand ils s'appliqueront à l'Analyſe, & quand ils feront uſage de cette ſcience, on a cru qu'il ſeroit inutile d'arrêter ici les Commençans à ces methodes, qui ne leur ſeroient pas de grand uſage dans la ſcience du calcul, & qui détourneroient l'application qu'ils doivent donner à bien apprendre les calculs qui leur ſont néceſſaires pour entendre l'Analyſe & toutes les Mathematiques. De plus on ne ſçauroit démontrer exactement ces methodes de trouver les diviſeurs premiers complexes, qu'en y employant les methodes de l'Analyſe.

Seconde Partie du Problême.

268. QUAND on a découvert tous les diviſeurs premiers d'une grandeur numerique ou litterale, par la premiere partie du Problême; voici la methode pour trouver tous les diviſeurs compoſez de la même grandeur. On l'appliquera à un exemple d'une grandeur litterale incomplexe, pour ſervir de formule, & pour faire clairement concevoir la methode. Tous les diviſeurs ſimples de $a^1b^2c^3d^2$ étant $a, a, a, b, b, c, c, c, d, d$, il faut écrire, dans un premier rang ou dans la premiere ligne, l'unité & toutes les puiſſances de ſuite de l'un des diviſeurs premiers, (il n'importe lequel; mais pour ſe faire un ordre, il eſt bon de prendre, dans les grandeurs litterales, celle qui eſt des premieres de l'alphabet; & dans les nombres, le plus petit diviſeur premier) juſqu'à celle qui a autant de dégrez, que ce diviſeur a ſervi de fois. Ainſi, dans l'exemple, le premier rang contient les diviſeurs 1, a, a^2, a^3. Il faut enſuite multiplier tous les diviſeurs du premier rang par le ſecond diviſeur premier, qui eſt ici b; ce qui donne le ſecond rang de diviſeurs b, ab, a^2b, a^3b. Quand le ſecond diviſeur a ſervi plus d'une fois, & qu'il eſt repeté pluſieurs fois, comme

* Voyez l'Exemple à la page ſuivante.

EXEMPLE.

Grandeur dont il faut trouver tous les diviſeurs.

$a^3b^2c^3d^2$

Les diviſeurs ſimples.

1. a, a, a. b, b. c, c, c. d, d.

Tous les diviſeurs de la même grandeur ſimples & compoſez dans l'ordre qu'on les trouve.

1er rang. $1, a, a^2, a^3$.

2e rang. b, ab, a^2b, a^3b.

3^e rang. $b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2$.

4^e rang. c, ac, a^2c $a^3c.bc, abc, a^2bc, a^3bc.b^2c, ab^2c, a^2b^2c, a^3b^2c$.

5^e rang. $c^2, ac^2, a^2c^2, a^3c^2.bc^2, abc^2, a^2bc^2, a^3bc^2.b^2c^2, ab^2c^2, a^2b^2c^2, a^3b^2c^2$.

6^e rang. c^3, ac^3 $a^2c^3, a^3c^3.bc^3, abc^3, a^2bc^3, a^3bc^3.b^2c^3, ab^2c^3, a^2b^2c^3, a^3b^2c^3$.

7^e rang. $d, ad, a^2d, a^3d.bd, abd, a^2bd, a^3bd.b^2d, ab^2d, a^2b^2d, a^3b^2d.cd, acd, a^2cd,$
$a^3cd.bcd, abcd, a^2bcd, a^3bcd.b^2cd, ab^2cd, a^2b^2cd, a^3b^2cd.c^2d, ac^2d, a^2c^2d,$
$a^3c^2d.bc^2d, abc^2d, a^2bc^2d, a^3bc^2d.b^2c^2d, ab^2c^2d, a^2b^2c^2d, a^3b^2c^2d.c^3d,$
$ac^3d, a^2c^3d, a^3c^3d.bc^3d, abc^3d, a^2bc^3d, a^3bc^3d.b^2c^3d, ab^2c^3d, a^2b^2c^3d, a^3b^2c^3d.$

8^e rang. $d^2, ad^2, a^2d^2, a^3d^2.bd^2, abd^2, a^2bd^2, a^3bd^2.b^2d^2, ab^2d^2, a^2b^2d^2, a^3b^2d^2.cd^2, acd^2,$
$a^2cd^2, a^3cd^2.bcd^2, abcd^2, a^2bcd^2, a^3bcd^2.b^2cd^2, ab^2cd^2, a^2b^2cd^2, a^3b^2cd^2.$
$c^2d^2, ac^2d^2, a^2c^2d^2, a^3c^2d^2.bc^2d^2, abc^2d^2, a^2bc^2d^2, a^3bc^2d^2.b^2c^2d^2, ab^2c^2d^2.$
$a^2b^2c^2d^2, a^3b^2c^2d^2.c^3d^2, ac^3d^2, a^2c^3d^2, a^3c^3d^2.bc^3d^2, abc^3d^2, a^2bc^3d^2,$
$a^3bc^3d^2.b^2c^3d^2, ab^2c^3d^2, a^2b^2c^3d^2, a^3b^2c^3d^2$.

Grandeur numerique repréſentée par $a^3b^2c^3d^2$ *dont on trouve tous les diviſeurs de la même maniere, en ſuppoſant les diviſeurs ſimples numeriques repréſentez par les diviſeurs ſimples litteraux.*

$441000 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2$

---

me ici b, b; il faut multiplier par ce même diviſeur b, non les diviſeurs du premier rang, mais les ſeuls diviſeurs du rang précedent; ce qui donnera le 3e rang b^2, ab^2, a^2b^2, a^3b^2.

Si *b* étoit repeté encore une fois, on multiplieroit par *b* le rang précedent, & non les autres.

Quand on paſſe au troiſiéme diviſeur premier *c*, il faut multiplier par *c* tous les rangs précedens ; ce qui fera le quatriéme rang des diviſeurs, comme on le voit dans l'exemple. Il faut enſuite, à cauſe du troiſiéme diviſeur *c* repeté, multiplier par le ſecond *c*, non les diviſeurs de tous les rangs, mais les diviſeurs du ſeul 4ᵉ rang précedent. Et à cauſe du 3ᵉ diviſeur *c* repeté une 3ᵉ fois, il faut encore multiplier par le 3ᵉ *c* les diviſeurs du 5ᵉ rang précedent.

Le troiſiéme diviſeur *c* n'étant plus repeté, il faut paſſer au 4ᵉ diviſeur *d*, & multiplier par *d* les diviſeurs de tous les rangs précedens, ce qui fera le 7ᵉ rang ; il faut enſuite, à cauſe du 4ᵉ diviſeur *d* repeté deux fois, multiplier le ſeul 7ᵉ rang précedent par le ſecond *d*.

Comme il n'y a plus de diviſeurs premiers, l'operation eſt finie ; & tous les diviſeurs tant ſimples que compoſez ſont ceux qu'on a trouvez, & qui occupent tous les rangs.

S'il y avoit un plus grand nombre de diviſeurs premiers, il faudroit, quand on arrive à chacun des diviſeurs premiers, multiplier par ce diviſeur premier tous les diviſeurs de tous les rangs précedens ; mais quand le même diviſeur premier eſt repeté pluſieurs fois, il ne faut multiplier par ce diviſeur à chaque fois qu'il eſt repeté, que les ſeuls diviſeurs du rang qui précede.

REMARQUE.

L'ENONCE' de la methode & l'application que l'on en a faite en l'expliquant à trouver tous les diviſeurs d'une grandeur litterale incomplexe, ſuffiſent pour apprendre aux Commençans la maniere de découvrir eux-mêmes tous les diviſeurs d'une grandeur numerique ou litterale, ſans qu'il ſoit neceſſaire d'en mettre d'autres exemples. Ils pourront s'exercer à trouver tous les diviſeurs compoſez des exemples de la premiere partie du Problême, dont tous les diviſeurs premiers ſont découverts.

Quand on a trouvé par la methode tous les diviſeurs d'une grandeur, on peut enſuite, ſi l'on veut, les écrire ſuivant l'ordre de leurs dimenſions, de façon que les diviſeurs d'une dimenſion ſoient les premiers, ceux de deux dimenſions les ſeconds, & ainſi de ſuite.

Démonſtration du Problême. Il eſt évident * que le produit de tous les diviſeurs premiers, comme $a, a, a, b, b, c, c, c, d, d$ d'une grandeur propoſée $a^3b^2c^3d^2$, qui ſe découvrent par la premiere partie du Problême, eſt préciſement la grandeur même propoſée; & qu'ainſi * cette grandeur ne peut pas avoir parmi ſes diviſeurs, ſoit premiers ſoit compoſez, d'autres grandeurs premieres, ni les produits, ni les puiſſances d'autres grandeurs premieres. Tous les diviſeurs compoſez de la grandeur propoſée doivent donc être les produits des diviſeurs premiers découverts par la premiere partie du Problême, & les puiſſances de ces diviſeurs premiers. Mais il eſt évident qu'en ſuivant l'ordre preſcrit par la methode de la ſeconde partie du Problême, on découvre tous les diviſeurs compoſez de la grandeur propoſée, ſans qu'il en manque un ſeul. Le Problême fait donc découvrir tous les diviſeurs premiers & compoſez d'une grandeur propoſée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 107.

* 244.

SECTION II.

Où l'on explique les réductions des grandeurs rompues.

PROBLÊME I.

269. *REDUIRE une fraction ou un rapport aux moindres termes; c'eſt à dire trouver la moindre fraction qui lui ſoit égale.*

Si les deux termes de la fraction propoſée ſont premiers entr'eux, * elle eſt elle-même la moindre fraction. Si les deux termes ſont des grandeurs compoſées, voici la maniere de les réduire aux moindres termes.

* 232.

Opération. 1°. Il faut trouver * le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction. 2°. Il faut diviſer chaque terme par leur plus grand diviſeur commun; & la fraction faite des deux quotients ſera la moindre fraction qu'on cherchoit.

* 250, 251 & 252.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{a^2bc}{a^2cd}$ aux moindres termes: 1°. Je trouve le plus grand diviſeur commun a^2c des deux termes. 2°. Je di-

viſe les deux termes par a^2c ; & je fais des deux quotients la fraction $\frac{b}{d}$: c'eſt la fraction que je cherche.

Quand chaque terme de la fraction propoſée eſt une grandeur litterale incomplexe, il eſt viſible qu'il ne faut qu'effacer les lettres communes aux deux termes, & que les lettres reſtantes ſont la moindre fraction qu'on cherche.

Pour réduire la fraction $\frac{15}{7}$ aux moindres termes, il faut diviſer les deux termes par leur plus grand diviſeur commun 7, & l'on aura $\frac{5}{1}$ pour la moindre fraction.

Pour reduire $\frac{255}{850}$ aux moindres termes ; il faut diviſer ſes deux termes par leur plus grand diviſeur commun 5 ; & l'on aura $\frac{51}{170}$ pour la moindre fraction.

Pour réduire la fraction $\frac{aab - acd}{a^3b^2 - a^3c^2}$ aux moindres termes : 1°. Il faut trouver le plus grand diviſeur commun $ab - ac$ des deux termes. 2°. Diviſer les deux termes par $ab - ac$, & écrire les quotients en fraction, & l'on aura $\frac{d}{a^2b + a^2c}$ pour la moindre fraction qu'on cherchoit.

Démonſtration du Problême. 1°. La fraction que fait découvrir le Problême * eſt égale à la propoſée. 2°. Les deux termes de la fraction, que l'on trouve par le Problême, * ſont premiers entr'eux. Par conſequent le Problême fait découvrir * la moindre fraction égale à la propoſée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 109.
* 255.
* 232.

PROBLÊME II.

270. *REDUIRE deux fractions ou deux rapports à avoir un même dénominateur ou un même ſecond terme, ſans changer leur valeur.*

Regle generale ou operation. Il faut multiplier les deux termes de chacune des fractions propoſées par le dénominateur de l'autre ; les produits ſeront les fractions de même valeur réduites au même dénominateur. Cette regle eſt generale.

Regle qui abrege en des cas particuliers. 1°. Quand le dénominateur de l'une eſt un diviſeur du dénominateur de l'autre, comme dans cet exemple $\frac{ab}{cd}, \frac{b}{c}$; il faut multiplier par le quotient, qui vient de la diviſion des dénominateurs, les deux termes de la fraction dont le dénominateur eſt le diviſeur de l'autre dénominateur ; & elle ſera réduite à avoir le même déno-

minateur que l'autre fraction, ſans que ſa valeur ait été changée. Dans cet exemple, le quotient cd diviſé par c eſt d. Il faut multiplier les deux termes de $\frac{b}{c}$ par le quotient d, & la fraction $\frac{bd}{cd}$, ſans avoir changé de valeur, aura le même dénominateur que l'autre fraction $\frac{ab}{cd}$. 2°. Quand les dénominateurs des deux fractions ont un diviſeur commun, comme $\frac{a^2b}{cd}$, $\frac{b^2}{cf}$; il faut multiplier les deux termes de la premiere $\frac{a^2b}{cd}$ par le quotient f qui vient de la diviſion du dénominateur cf de la ſeconde par le diviſeur commun c; & multiplier de même les deux termes de la ſeconde $\frac{b^2}{cf}$ par le quotient d, qui vient de la diviſion du dénominateur cd de la premiere par le diviſeur commun c; & les nouvelles fractions $\frac{a^2bf}{cdf}$ & $\frac{b^2d}{cdf}$ ſeront les fractions réduites au même dénominateur, ſans que leur valeur ſoit changée.

EXEMPLES.

POUR reduire les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$ au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la premiere par le dénominateur 4 de la ſeconde, & multiplier les deux termes de la ſeconde par le dénominateur 3 de la premiere, & l'on aura les fractions $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, qui ſont reduites au même dénominateur.

Pour réduire $\frac{1}{5}$ & $\frac{2}{7}$ au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la premiere par 7, & multiplier les deux termes de la ſeconde par 5, & l'on aura $\frac{7}{35}$ & $\frac{10}{35}$.

Pour réduire $\frac{1}{12}$ & $\frac{2}{3}$ au même dénominateur; on remarquera que le dénominateur 3 eſt un diviſeur du dénominateur 12, & qu'en diviſant 12 par trois le quotient eſt 4. Dans ce cas il faut ſeulement multiplier les deux termes de $\frac{2}{3}$ par 4, & l'on aura $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ qui a le même dénominateur que $\frac{1}{12}$.

Pour réduire $\frac{4}{3}$ *, qui eſt la même choſe que l'entier 4, & $\frac{2}{3}$ à un même dénominateur, on remarquera que 1, dénominateur de la premiere, eſt diviſeur de 3, dénominateur de la ſeconde, & que 3 eſt le quotient de 3 diviſé par 1; & par conſequent qu'il faut multiplier les deux termes de la premiere par 3, dénominateur de la ſeconde; & l'on aura $\frac{4}{1} = \frac{12}{3}$. * 117.

Pour réduire $\frac{ab}{1}$, * qui eſt la même choſe que l'entier ab, & $\frac{ac-bc}{a+b}$ à un même dénominateur; on fera attention que le dé- * 117.

nominateur de la premiere eſt diviſeur du dénominateur $a+b$ de la ſeconde, & que le quotient de $a+b$ diviſé par 1 eſt $a+b$; & par conſequent qu'il faut multiplier les deux termes de $\frac{ab}{1}$ par $a+b$, & l'on aura $\frac{ab}{1}=\frac{a^2b+ab^2}{a+b}$.

Si l'on veut réduire $\frac{a^3}{a^2b-b^2}$ & $\frac{b^2}{a^2-ab}$ à un même dénominateur; on remarquera que les dénominateurs ont $a-b$, pour diviſeur commun; que le quotient de a^2b-b^2 diviſé par $a-b$ eſt $ab+b^2$; & le quotient de a^2-ab par $a-b$ eſt a; c'eſt pourquoi on multipliera les deux termes de la premiere par a; & les deux termes de la ſeconde par $ab+b^2$, & l'on trouvera $\frac{a^3}{a^2b-ab^2}$ & $\frac{ab^2+b^3}{a^2b-ab^2}$, qui ont un même denominateur, & qui ſont équivalentes aux fractions propoſées.

Pour réduire les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la premiere par d; & multiplier les deux termes de la ſeconde par b; & l'on aura $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$.

AVERTISSEMENT.

IL eſt inutile de mettre ici des exemples fort compoſez, ne s'agiſſant que de faire clairement concevoir le Problême: les Commençans peuvent eux-mêmes faire tels exemples qu'il leur plaira.

Démonſtration du Problême. Les fractions, que fait découvrir le Problême, n'étant que les fractions propoſées dont
*75. les termes ont été multipliez, par une même grandeur, * elles ont les mêmes valeurs que les fractions propoſées, & elles ont auſſi chacune pour leur dénominateur commun, le produit des dénominateurs des fractions propoſées quand on ſuit la regle generale; & il eſt évident qu'elles ont auſſi toujours le même dénominateur dans la regle particuliere qu'on a donnée pour abreger, dans les cas auxquels elle convient.

III. PROBLÊME.

271. *REDUIRE tel nombre de fraction qu'on voudra, à avoir un même dénominateur, ſans changer leur valeur.*

Regle ou operation. Il faut multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres; les fractions faites des produits ſeront les fractions qu'on demande.

EXEMPLES.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ à un même dénominateur, ſans changer leur valeur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{a}{b}$ par le produit df des dénominateurs des autres; les deux termes de $\frac{c}{d}$ par bf; & les deux termes de $\frac{e}{f}$ par bd; & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$ égales aux propoſées, & qui ont le même dénominateur.

Pour réduire $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$ à un même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{2}$ par $4 \times 7 = 28$; les deux termes de $\frac{3}{4}$ par $2 \times 7 = 14$, & les deux termes de $\frac{5}{7}$ par $2 \times 4 = 8$; & l'on aura $\frac{28}{56}$, $\frac{42}{56}$, $\frac{40}{56}$.

Pour réduire les fractions $3 = \frac{3}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$ à un même dénominateur, il faut multiplier les deux termes de $\frac{3}{1}$ par $3 \times 5 \times 7 = 105$; les deux termes de $\frac{2}{3}$ par $1 \times 5 \times 7 = 35$; les deux termes de $\frac{4}{5}$ par $1 \times 3 \times 7 = 21$; & les deux termes de $\frac{2}{7}$ par $1 \times 3 \times 5 = 15$, & l'on aura $\frac{315}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{30}{105}$.

Pour réduire les fractions $ab = \frac{ab}{1}$, $\frac{cd}{a-b}$, $\frac{bc}{a+b}$ à un même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{ab}{1}$ par $\overline{a-b} \times \overline{a+b} = a^2 - b^2$, les deux termes de $\frac{cd}{a-b}$ par $1 \times \overline{a+b}$; & les deux termes de $\frac{bc}{a+b}$ par $1 \times \overline{a-b} = a-b$; & l'on aura $\frac{a^3b-ab^3}{a^2-b^2}$, $\frac{acd+bcd}{a^2-b^2}$, $\frac{abc-b^2c}{a^2-b^2}$.

La démonſtration de ce troiſiéme Problême n'eſt pas differente de celle du ſecond.

REMARQUE.

272. LE ſecond & le troiſiéme Problême peuvent ſervir à faire connoître facilement le rapport qu'ont entr'elles deux ou pluſieurs fractions ou rapports; car les ayant réduites à avoir le même dénominateur, elles ont *entr'elles les mêmes rapports que les numerateurs. * 116.

PROBLÈME IV.

273. *REDUIRE deux fractions, trois fractions, en un mot, tant de fractions qu'on voudra, au même dénominateur qui ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible, ſans changer leur valeur.*

Regle ou operation. 1°. Il faut réduire chacune des fractions * 269.

* 265. propoſées aux moindres termes. 2°. Il faut trouver * la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs tous les dénominateurs des fractions propoſées réduites aux moindres termes ; ce ſera le dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut diviſer cette plus petite grandeur, ou ce dénominateur commun, par le dénominateur de chacune des fractions réduites aux moindres termes ; & multiplier le numerateur de chaque fraction réduite aux moindres termes par le quotient qui eſt venu de la diviſion du dénominateur commun qu'on vient de trouver par le dénominateur de cette fraction réduite aux moindres termes ; les produits ſeront les numerateurs des fractions qu'on cherche.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{10}$, au même dénominateur qui ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible ; 1°. Il faut les réduire chacune aux moindres termes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 10 qui ait pour diviſeurs les deux dénominateurs 2 & 5 des moindres fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, & 10 ſera le plus petit dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut diviſer ce dénominateur commun par 2 dénominateur de $\frac{1}{2}$; & multiplier le numerateur de $\frac{1}{2}$ par le quotient 5 ; & l'on aura le numerateur de la premiere fraction qu'on cherche. Il faut de même diviſer le dénominateur commun 10 par 5, dénominateur de $\frac{2}{5}$, & multiplier le numerateur de $\frac{2}{5}$ par le quotient 2, & l'on aura 4 pour le numerateur de la ſeconde fraction ; & les deux fractions qu'on cherchoit ſont $\frac{5}{10}$ & $\frac{4}{10}$.

Pour réduire $\frac{15}{18}$ & $\frac{20}{25}$ au même plus petit dénominateur ſans changer leur valeur, 1°., il faut les réduire aux moindres termes $\frac{5}{6}$ & $\frac{4}{5}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 30 qui ait pour diviſeurs les deux dénominateurs 6 & 5, ce ſera le plus petit dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut multiplier par le quotient 5 de 30 diviſé par 6 le numerateur 5, & le produit 25 ſera le numerateur de la premiere fraction. Il faut enſuite multiplier par le quotient 6 qui eſt venu de 30 diviſé par 5, le numerateur 4 ; & le produit 24 ſera le numerateur de la ſeconde fraction. Les deux fractions qu'on cherchoit ſont $\frac{25}{30}$ & $\frac{24}{30}$.

Pour réduire $\frac{15}{18}$, $\frac{20}{25}$, $\frac{17}{45}$ au même plus petit dénomina-

teur, ſans changer leur valeur; 1°. Il faut les réduire aux moindres termes $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 210 qui ait pour diviſeurs les dénominateurs 6, 5, 7. 3°. Ayant trouvé les quotients 35, 42, & 30 de 210 diviſé par 6, 5, 7; il faut multiplier 5 par 35, 4 par 42, & 6 par 30; & les produits 175, 168, 180 ſeront les numerateurs qu'on cherche. $\frac{175}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, ſont les trois fractions qu'on cherchoit.

Pour réduire $\frac{ab}{bc}$, $\frac{cd}{d^2}$, $\frac{ad}{ac}$ au même plus petit dénominateur ſans changer leur valeur; 1°. Il faut les réduire aux moindres termes $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$. 2°. Il faut trouver la plus petite grandeur *cde* qui ait pour diviſeurs c, d, e; ce ſera le plus petit dénominateur qu'on cherche. 3°. Il faut diviſer ce dénominateur commun *cde* par les dénominateurs c, d, e; & multiplier par les quotients de, ce, cd, les numerateurs a, c, d qui leur répondent; & les produits ade, c^2e, cd^2 ſeront les numerateurs qu'on cherche. Ainſi $\frac{ade}{cde}$, $\frac{c^2e}{cde}$, $\frac{cd^2}{cde}$, ſeront les fractions qu'on cherchoit.

Démonſtration du Problême. Les fractions propoſées qu'on peut repréſenter par $\frac{ab}{bc}$, $\frac{cd}{d^2}$, $\frac{ad}{ac}$ étant réduites aux moindres termes $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, n'ont pas changé de valeur. Or celles qu'on trouve par le problême, qui ſont $\frac{ade}{cde}$, $\frac{c^2e}{cde}$, $\frac{cd^2}{cde}$ ſont formées des fractions réduites aux moindres termes, en multipliant les deux termes de chacune par une même grandeur, & par conſequent elles leur ſont égales. Les fractions, qu'on trouve par le Problême, ſont donc égales aux fractions propoſées. Il reſte à démontrer que le dénominateur commun des fractions, que fait découvrir le Problême, eſt le moindre qui ſoit poſſible. Le plus petit dénominateur commun, auquel les fractions propoſées peuvent être réduites, * doit avoir pour diviſeurs les dénominateurs c, d, e, de ces fractions réduites aux moindres termes. Mais le commun dénominateur *cde*, que fait découvrir le Problême, * eſt la plus petite grandeur qui ait pour diviſeurs les dénominateurs c, d, e. Le Problême fait donc trouver le plus petit dénominateur auquel on puiſſe réduire les fractions propoſées, ſans changer leur valeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 271.

* 265.

V. PROBLÊME.

274 *REDUIRE une fraction à avoir un dénominateur donné, ſans changer ſa valeur.*

Par exemple, une toiſe contient ſix pieds; ainſi un pied eſt une ſixiéme partie d'une toiſe: l'on a $\frac{2}{3}$ d'une toiſe; pour en découvrir la valeur en pieds, il faut réduire $\frac{2}{3}$ à une autre fraction qui ait 6 pour dénominateur, ſans pourtant que la fraction $\frac{2}{3}$ d'une toiſe change de grandeur; & quand on aura trouvé cette autre fraction, que l'on verra dans la ſuite être $\frac{4}{6}$, on ſçaura que $\frac{2}{3}$ d'une toiſe valent $\frac{4}{6}$ d'une toiſe, c'eſt à dire 4 pieds.

AVERTISSEMENT.

CE cinquiéme Problême eſt de grand uſage dans la pratique de l'Arithmetique, dans laquelle réduire une fraction à avoir un dénominateur donné, ſans changer ſa valeur, s'appelle *évaluer une fraction*, & la pratique de cette réduction ſe nomme l'*évaluation d'une fraction*. On en va mettre la regle que l'on appliquera à pluſieurs exemples, pour en faire voir l'uſage dans la pratique.

Regle ou operation. 1°. Il faut multiplier le numerateur de la fraction propoſée par le dénominateur donné. Par exemple, pour réduire $\frac{2}{3}$ d'une toiſe à avoir 6 pour dénominateur, il faut multiplier 2 par 6, ce qui donne 12.

2°. Il faut diviſer le produit, qu'on vient de former, par le dénominateur de la fraction propoſée; le quotient ſera le numerateur de la nouvelle fraction, ſous lequel il faut écrire le dénominateur donné. Dans l'exemple qu'on a pris, il faut diviſer 12 par 3, & écrire le quotient 4 pour numerateur, & 6 pour dénominateur de la fraction qu'on cherchoit, qui eſt $\frac{4}{6}$.

3°. Quand la diviſion marquée dans le ſecond article donne pour quotient un entier & de plus une fraction; il faut écrire au numerateur l'entier, & cette fraction au devant de l'entier en plus petits chifres, & le dénominateur donné au deſſous de ce numerateur compoſé d'un entier & d'une fraction. On verra, dans les exemples, l'uſage qu'on fait de cette fraction du numerateur, quand il y en a une.

EXEMPLES.

POUR voir combien la fraction $\frac{2}{3}$ d'un écu, (en ſuppoſant que l'écu eſt de 60 ſols) vaut de ſous; il faut réduire la fraction $\frac{2}{3}$ d'un écu à avoir pour dénominateur 60, ſans changer de valeur; ainſi il faut multiplier le numerateur 2 par le dénominateur donné 60, & diviſer le produit 120 par 3, & écrire le quotient 40 pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & 60 pour ſon dénominateur; & la fraction qu'on cherche eſt $\frac{40}{60}$ d'un écu, c'eſt à dire 40 ſous.

Pour réduire $\frac{4}{7}$ d'une toiſe à avoir 6 pour dénominateur, ce qui fera connoître combien la fraction $\frac{4}{7}$ vaut de pieds; 1°. Il faut multiplier 4 par 6. 2°. Diviſer le produit 24 par le dénominateur 7 de la fraction $\frac{4}{7}$. 3°. Ecrire le quotient $3\frac{3}{7}$ pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, à laquelle il faut donner 6 pour dénominateur, & cette fraction ſera $\frac{3\frac{3}{7}}{6}$.

REMARQUES.

I.

LA fraction $\frac{3\frac{3}{7}}{6}$ contenant l'entier 3, qui vaut trois ſixiémes d'une toiſe ou trois pieds, & de plus trois ſeptiémes d'une ſixiéme de toiſe, c'eſt à dire $\frac{3}{7}$ d'un pied; il faut réduire la fraction $\frac{3}{7}$ d'un pied en pouces, en la réduiſant, ſans changer ſa valeur, à une autre fraction qui ait 12 pour dénominateur, parcequ'un pouce eſt une douziéme d'un pied. Ainſi il faut multiplier par 12 le numerateur 3 de $\frac{3}{7}$ d'un pied, & diviſer le produit 36 par 7; écrire le quotient $5\frac{1}{7}$ pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, à laquelle on donnera 12 pour dénominateur, & cette fraction, qu'on cherche, ſera $\frac{5\frac{1}{7}}{12}$ d'un pied, c'eſt à dire 5 pouces & $\frac{1}{7}$ d'une douziéme d'un pied, c'eſt à dire $\frac{1}{7}$ d'un pouce.

On peut de même réduire la fraction $\frac{1}{7}$ d'un pouce en lignes, en lui donnant, ſans changer ſa valeur, pour dénominateur 12; parcequ'une ligne eſt la douziéme partie d'un pouce. On multipliera donc par 12 le numerateur 1 de la fraction $\frac{1}{7}$ d'un pouce; on diviſera le produit 12 par le déno-

minateur 7 de $\frac{5}{7}$ d'un pouce ; on écrira 1 $\frac{5}{7}$ pour le numerateur de la nouvelle fraction, & 12 pour ſon dénominateur ; & l'on aura $\frac{1\frac{5}{7}}{12}$ d'un pouce pour la fraction équivalente à $\frac{5}{7}$ d'un pouce ; c'eſt à dire une douziéme de pouce ou une ligne, & de plus $\frac{5}{7}$ d'une ligne ou d'une douziéme de pouce. Ainſi la fraction $\frac{4}{7}$ d'une toiſe vaut $\frac{1}{2}$ d'une toiſe + $\frac{5}{12}$ d'un pied + $\frac{1}{12}$ d'un pouce, & elle vaut encore de plus $\frac{5}{7}$ d'une douziéme d'un pouce ; c'eſt à dire la fraction $\frac{4}{7}$ d'une toiſe vaut 3 pieds 5 pouces 1 ligne & $\frac{5}{7}$ d'une ligne.

D'où l'on voit que le cinquiéme Problême ſert, quand on a une fraction de quelque grandeur ſenſible comme d'une longueur, à trouver la valeur de cette fraction exprimée par les meſures ordinaires de cette grandeur juſqu'à la plus petite.

2.

275. Quand en faiſant ces réductions on ne trouve pas une valeur exacte comme dans l'exemple précedent, où l'on voit qu'il reſte encore $\frac{5}{7}$ d'une ligne ; on néglige d'ordinaire la fraction reſtante qui eſt moindre que la plus petite eſpece ou la plus petite meſure ; dans l'exemple précedent on néglige $\frac{5}{7}$ d'une ligne comme une grandeur inſenſible.

Cependant, pour rendre cette erreur la moins ſenſible qu'il ſe puiſſe, on remarque ſi la fraction eſt moindre que la moitié d'une meſure de la derniere eſpece, ou ſi elle eſt plus grande, ce que l'on reconnoît par la comparaiſon du numerateur de la derniere fraction à ſon dénominateur. Car ſi le numerateur eſt moindre que la moitié du dénominateur, la fraction eſt moindre que la moitié d'une derniere eſpece : s'il ſurpaſſe cette moitié comme dans $\frac{5}{7}$ d'une ligne, cette fraction eſt plus grande que la moitié d'une ligne. Dans le cas où la derniere fraction eſt moindre que la moitié, on néglige ordinairement cette derniere fraction : dans le cas où elle ſurpaſſe la moitié, on ajoute une unité afin que l'erreur ſoit plus petite. Ainſi on écrit pour la valeur de $\frac{4}{7}$ d'une toiſe, 3 pieds, 5 pouces, 2 lignes.

Uſages du Problême cinquiéme dans les grandeurs décimales.

I. USAGE.

276. QUAND on a une fraction quelconque, comme $\frac{5}{9}$ d'une grandeur, on peut la réduire en parties décimales par ce Problême. 1°. Il faut ajouter au numerateur autant de zeros qu'on voudra; plus on en met & plus l'erreur eſt inſenſible, quand la diviſion ne peut pas ſe faire ſans qu'il reſte une fraction. Cette addition de zeros eſt la même choſe * que de multiplier le numerateur par l'unité précedée d'autant de zeros qu'on en ajoute au numerateur. 2°. Il faut diviſer ce numerateur précedé de ces zeros par le dénominateur, & le quotient eſt la fraction propoſée réduite en parties décimales. 3°. Si le numerateur de la fraction propoſée ſurpaſſoit le dénominateur, elle contiendroit un nombre entier, par exemple $\frac{25}{9}$. Dans ce cas il faudroit écrire dans le quotient, à la droite du nombre entier du quotient, le point qui diſtingueroit l'entier d'avec les parties décimales, & écrire au devant de ce point, en allant de gauche à droite, toutes les parties décimales du quotient. Mais ſi le numerateur de la fraction propoſée eſt moindre que le dénominateur, il faut d'abord écrire au quotient o pour marquer le lieu des entiers; un point à la droite de ce zero pour diſtinguer les parties décimales; & écrire au devant de ce point, en allant vers la droite, tout le quotient à meſure qu'on le trouve. * 122.

Ainſi pour réduire $\frac{5}{9}$ en parties décimales, 1°, on ajoutera, par exemple, cinq zeros au numerateur pour réduire la fraction en cent milliémes. 2°. On diviſera 500000 par 9, & l'on écrira o à la premiere place du quotient pour marquer le lieu des entiers; un point à la droite de ce o, pour diſtinguer les parties décimales, & le quotient à meſure qu'on le trouvera au devant de ce point en allant vers la droite, & l'on aura 0. 55555 pour la fraction propoſée $\frac{5}{9}$ réduite en cent milliémes.

L'on trouve à la fin de cette diviſion un reſte, qui eſt 5 à diviſer par 9, ce qui vaut cinq neuviémes d'une cent milliéme; comme ce reſte ſurpaſſe la moitié d'une cent-milliéme

partie, on ajoute une unité au dernier chifre, afin que l'erreur ſoit plus inſenſible; ainſi $\frac{5}{9} = 0.55556$.

II. USAGE.

277. LE calcul des parties décimales eſt moins embarraſſant que celui des fractions ordinaires, ce calcul étant le même que celui des nombres entiers; c'eſt la raiſon pourquoi dans la pratique on ſe ſert du calcul décimal; mais quand on a trouvé la grandeur que l'on cherchoit exprimée en parties décimales; on veut ſçavoir quelle eſt ſa valeur exprimée par les meſures ordinaires. C'eſt à quoi ſert auſſi ce cinquiéme Problême. Par exemple, on aura trouvé dans un calcul 0. 55556 de toiſe, on veut ſçavoir combien cette grandeur, qui eſt moindre qu'une toiſe, vaut de pieds, de pouces & de lignes. Il faut regarder la grandeur décimale * comme une fraction $\frac{55556}{100000}$, dont le dénominateur eſt l'unité précedée d'autant de zeros qu'il y a de rangs de parties décimales, & la réduire à une fraction équivalente, qui ait pour dénominateur le nombre qui exprime combien de fois la meſure à laquelle on veut la réduire eſt contenue dans la meſure principale, de la maniere que le preſcrit le cinquiéme Problême; c'eſt à dire, ſi la fraction décimale exprime des parties décimales de toiſes, il faut la réduire au dénominateur 6; afin de la réduire à des pieds qui ſont des ſixiémes de toiſe, la toiſe étant la meſure principale. Ainſi il faut multiplier les parties décimales 0. 55556 par 6; diviſer le produit 3. 33336 par le dénominateur ſous-entendu 100000 de la fraction propoſée; ce qui ſe fait ſimplement, en retranchant vers la droite autant de rangs du produit qu'il y avoit de rangs de parties décimales dans le numerateur de la fraction propoſée; dans cet exemple, il faut retrancher cinq rangs, & le quotient ſera 3. Enfin il faut écrire $\frac{1}{6}$ de toiſe + 0. 33336 d'une ſixiéme de toiſe. C'eſt à dire 3 pieds & 0. 33336 de pied.

*122.

Pour réduire 0. 33336 de pied en pouces qui ſont des douziémes d'un pied, un pied étant la meſure principale par rapport aux pouces; 1°, il faut multiplier 0. 33336 par 12; 2°, retrancher cinq rangs du produit 4. 00032; l'on aura $\frac{4}{12}$ d'un pied + 0. 00032 d'une douziéme de pied ou d'un pouce; c'eſt à dire 4 pouces 0. 00032 d'une douziéme de pied ou d'un

d'un pouce. Comme la fraction qui reſte ne vaut pas une ligne, on la néglige.

Dans la pratique, la réduction des grandeurs décimales aux meſures ordinaires des grandeurs ſenſibles, ſe fait très aiſément. On ne fait que la multiplication de la grandeur décimale par le nombre qui exprime combien de fois la meſure, à laquelle on veut réduire la grandeur decimale, eſt contenue dans la meſure plus grande qui la précede immédiatement : & ce qui ſe trouve de grandeurs entieres dans le produit qui vient de cette multiplication, eſt le nombre qu'on cherche.

Par exemple, pour réduire 0. 55556, qui exprime les parties décimales d'une toiſe, en pieds ; enſuite en pouces, & enfin en lignes. 1°. On multiplie ce nombre décimal par 6, qui exprime qu'un pied eſt 6 fois dans une toiſe ; on trouve le produit 3. 33336, dans lequel la grandeur entiere 3, marque que le nombre propoſé contient 3 pieds ; & de plus la fraction 0. 33336 qui contient les parties décimales d'un pied. 2°. Pour la réduire en pouces, on la multiplie par 12 ; on trouve le produit 4. 00032, dans lequel la grandeur entiere 4 marque que la fraction 0. 33336, qui contient les parties décimales d'un pied, vaut 4 pouces ; & de plus la fraction 0. 00032, qui contient les parties décimales d'un pouce. 3°. Enfin pour réduire cette derniere fraction en lignes, on la multiplie par 12, & l'on trouve le produit 0. 00384. Ce produit n'ayant pas de grandeur entiere, la fraction décimale 0. 00032, ne vaut pas une ligne entiere ; elle contient ſeulement autant de parties décimales d'une ligne, qu'en exprime le nombre décimal 0. 00384. Ainſi le nombre décimal propoſé 0. 55556, qui contient les parties décimales d'une toiſe, étant réduit aux meſures ordinaires de la toiſe, vaut 3 pieds, 4 pouces & 0. 00384 d'une ligne : on neglige dans la pratique cette fraction, qui eſt plus petite que la moitié d'une ligne.

Quand la derniere fraction décimale qu'on neglige ſurpaſſe la moitié d'une unité ; c'eſt à dire, quand le chifre qui eſt immediatement à la droite du point qui ſepare les parties décimales, ſurpaſſe 5 ; on ajoute 1 à l'entier du dernier quotient. Quand elle eſt moindre, on la neglige ; quand elle eſt égale à la moitié d'une unité, on peut ajouter ou ne pas

ajouter une unité au dernier quotient, l'erreur étant égale, ſoit qu'on ajoute une unité, ſoit qu'on ne l'ajoute pas.

Par exemple, ſi dans une derniere réduction on trouvoit 3. 72048, on ajouteroit 1 à l'entier 3, & on prendroit 4 pour la grandeur entiere, qui eſt de très peu de choſe plus grande qu'il ne faut. Si la derniere fraction étoit 3. 42048, on prendroit ſeulement la grandeur entiere 3, & on negligeroit le reſte. Enfin, ſi la derniere fraction étoit 3. 52048, on pourroit prendre ſeulement la grandeur entiere 3, & negliger le reſte; ou bien ajouter 1 à l'entier 3, & prendre la grandeur 4 qui ſeroit de très peu de choſe plus grande qu'il ne faut.

Démonſtration du cinquiéme Problême. On remarquera que l'on n'a mis dans la regle du Problême que les operations neceſſaires dans la pratique; & qu'il faut concevoir dans le premier article qu'on multiplie le numerateur & le dénominateur de la fraction propoſée par le dénominateur donné; * ce qui donne une ſeconde fraction équivalente: & que dans le ſecond article il faut entendre qu'on diviſe le numerateur & le dénominateur de la ſeconde fraction équivalente, chacun par le dénominateur de la fraction propoſée, * ce qui donne une troiſiéme fraction équivalente à chacune des deux précedentes, à laquelle il reſte pour le ſecond terme le dénominateur donné. Ainſi pour réduire $\frac{2}{3}$ d'une toiſe en pieds ou ſixiemes de toiſes, l'on doit concevoir que la premiere operation donne la ſeconde fraction équivalente $\frac{2\times6}{3\times6} = \frac{12}{3\times6} = \frac{1\times4}{3\times6}$; & que la ſeconde operation donne la troiſiéme fraction $\frac{\frac{1\times4}{1}}{\frac{1\times6}{3}} = \frac{4}{6}$ * qui eſt équivalente à chacune des deux premieres. D'où il ſuit que le Problême fait découvrir une fraction nouvelle, égale à la propoſée, & qui a pour ſecond terme le dénominateur donné. *Ce qu'il falloit démontrer*.

* 75.

* 109.

* 109.

Quand on trouve que le numerateur de la nouvelle fraction qu'on cherche contient un entier & une fraction, (comme ſi l'on vouloit réduire $\frac{1}{8}$ de toiſe en ſixiémes de toiſe, on trouveroit $3\frac{6}{8}$) il eſt évident que l'entier 3 exprimant trois ſixiémes d'une toiſe, la fraction $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, exprime ſix huitiémes ou trois quarts d'une ſixiéme de toiſe.

PROBLÊME VI.

278. *REDUIRE une grandeur entiere à une fraction équivalente qui ait un dénominateur donné.*

Ce Problême eſt contenu dans le précedent, & on en a déja vû des exemples dans le ſecond Problême. Mais à cauſe de ſon grand uſage dans les calculs, on s'eſt déterminé à le mettre en particulier.

Regle. Il faut prendre le produit de l'entier propoſé par le dénominateur donné, pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & écrire pour ſon dénominateur le dénominateur donné.

EXEMPLES.

POUR réduire 25 entiers en quatriémes, ou à une fraction qui ait 4 pour dénominateur; il faut multiplier 25 par 4, & écrire le produit 100 pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & 4 pour dénominateur.

Pour réduire l'entier b à une fraction qui ait a pour dénominateur, il faut écrire $\frac{ab}{a}$.

Pour réduire $a + b$ à une fraction qui ait $c + d$ pour dénominateur, il faut multiplier $a + b$ par $c + d$; & écrire le produit pour premier terme de la fraction qu'on cherche, à laquelle on donnera $c + d$ pour ſecond terme, cette fraction ſera $\frac{ac + ad + bc + bd}{c + d}$.

Démonſtration. Tout nombre entier peut être repréſenté par une lettre b, * qu'on peut ainſi écrire en fraction $\frac{b}{1}$; en multipliant le premier & le ſecond terme par une même grandeur a, elle devient $\frac{ab}{1 \times a} = \frac{ab}{a}$, ce qui * n'en change point la valeur. Or c'eſt ce que preſcrit le Problême qui eſt de multiplier l'entier propoſé par le dénominateur donné a, & d'écrire au deſſous de ce produit le dénominateur donné a; ce qui eſt la même choſe que de multiplier l'unité, ſecond terme de la fraction propoſée $\frac{b}{1}$, par a. Ainſi le Problême preſcrit la maniere de reduire un entier à une fraction dont le dénominateur ſoit donné, ſans en changer la valeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 117.

* 75.

REMARQUE.

ON réduit par ce Problême les plus grandes eſpeces aux moindres. Par exemple, pour réduire 4 toiſes en pieds, qui ſont des ſixiémes de toiſes; il faut multiplier 4 par 6, & le produit 24, ſous lequel on écrit, ſi l'on veut, le dénominateur 6, exprime que 4 toiſes valent 24 pieds ou 24 ſixiémes de toiſe.

PROBLÊME VII.

279. *QUAND une fraction contient un nombre entier; c'eſt à dire,* * *quand le premier terme ſurpaſſe le ſecond, la réduire à l'entier.*

* 111. à la fin.

Regle ou operation. Il faut diviſer le numerateur par le dénominateur, le quotient exprimera les entiers.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{20}{5}$ à l'entier, il faut diviſer 20 par 5, le quotient 4 eſt le nombre entier que vaut la fraction $\frac{20}{5}$.

Pour réduire $\frac{ab}{b}$ à l'entier, il faut diviſer ab par b, & le quotient ſera l'entier $a = \frac{ab}{b}$.

Pour réduire $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ à l'entier; il faut diviſer $a^2 - b^2$ par $a - b$, & le quotient ſera l'entier $a + b = \frac{a^2-b^2}{a-b}$.

Pour réduire $\frac{22}{5}$ à l'entier, il faut diviſer 22 par 5, & le quotient 4 $\frac{2}{5}$ marque l'entier 4 qui eſt contenu en $\frac{22}{5}$, & il y a de plus la fraction $\frac{2}{5}$; c'eſt à dire $4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$.

Démonſtration. Suppoſons une fraction qui contient un nombre entier comme $\frac{20}{5}$, ou en general $\frac{ab}{b}$. Il eſt évident que la fraction $\frac{5}{5}$, ou en general la fraction $\frac{b}{b}$, (dont le premier & le ſecond terme ſont chacun égal au dénominateur de la fraction ſuppoſée,) peut être regardée comme une unité de la grandeur entiere que contient la fraction ſuppoſée $\frac{20}{5} = \frac{5+5+5+5}{5}$, ou $\frac{ab}{b}$. Or le quotient qui vient de la diviſion du numerateur 20 ou ab de la fraction propoſée par ſon dénominateur 5 ou b, marque combien de fois $\frac{5}{5}$ ou $\frac{b}{b}$ eſt contenue dans la fraction propoſée. Ainſi ce quotient exprime combien la fraction propoſée contient d'unitez entieres. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Quand le quotient contient un entier & une fraction,

comme $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$, ou $\frac{4b+c}{b} = 4 + \frac{c}{b}$; il eſt évident que la fraction propoſeé contient autant d'unitez entieres qu'en marque le quotient 4, & de plus autant des parties de l'unité qu'en marque la fraction du quotient $\frac{2}{5}$ ou $\frac{c}{b}$.

REMARQUES.

1.

ON réduit par ce Problême les petites eſpeces aux plus grandes. Par exemple pour réduire 30 pieds, ou $\frac{30}{6}$ de toiſe, en toiſes; il faut diviſer le nombre 30, qui exprime une plus petite eſpece, par le nombre 6 qui marque combien de fois cette plus petite eſpece eſt contenue dans la plus grande à laquelle on veut réduire la petite; & le quotient 5 fait connoître que 30 pieds valent 5 toiſes.

2.

Quand le nombre de la plus petite eſpece eſt moindre que le nombre qui marque combien de fois elle eſt contenue dans la plus grande; alors la réduction ne donne qu'une fraction ſans aucun entier. Par exemple, pour réduire 5 pouces en pieds; on trouve pour quotient la ſeule fraction $\frac{5}{12}$ ſans entier. De même pour réduire 5 pouces en toiſes, on trouve la ſeule fraction $\frac{5}{72}$ ſans entier.

PROBLÊME VIII.

280. *REDUIRE une grandeur compoſée d'un entier & d'une fraction à une ſeule fraction.*

Regle ou operation. 1°. Il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction. 2°. Il faut écrire le produit qu'on vient de trouver augmenté du numerateur de la fraction, pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & lui donner pour dénominateur celui de la fraction.

EXEMPLES.

POUR réduire $4\frac{2}{5}$ en une ſeule fraction, 1°, il faut multiplier l'entier 4 par 5. 2°. Ajouter au produit 20 le numerateur 2 de la fraction; & la ſomme 22 ſera le numerateur de

la fraction qu'on cherche, qui aura 5 pour dénominateur. Cette fraction ſera donc $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$.

Pour réduire $a + \frac{c^2}{b}$ à une ſeule fraction, il faut écrire $\frac{ab + c^2}{b}$.

* 279. Ce Problême n'eſt qu'un Corollaire du précedent, * on y rétablit par la multiplication l'expreſſion que le précedent avoit fait changer par la diviſion. Ainſi il n'a pas beſoin de nouvelle démonſtration.

PROBLÊME IX.

281. *TROUVER une fraction qui ſoit double, triple, en un mot, qui ſoit un multiple quelconque d'une fraction donnée.*

Regle ou operation. Il faut multiplier le numerateur de la fraction donnée par 2, ſi l'on en veut le double; par 3, ſi on en veut le triple; par 4, ſi l'on en veut le quadruple, &c. écrire ce produit pour le premier terme de la fraction qu'on cherche, & lui donner pour ſecond terme le dénominateur de la fraction donnée.

EXEMPLES.

POUR trouver une fraction double de $\frac{1}{4}$, il faut écrire $\frac{2 \times 1}{4} = \frac{2}{4}$.

Pour trouver une fraction triple de $\frac{a}{b}$, il faut écrire $\frac{1 \cdot a}{b}$.

Démonſtration. On ſuppoſera, pour rendre la démonſtration generale, que le nombre qui exprime le multiple quelconque de la fraction donnée, eſt repréſenté par m. Par exemple, quand on demande le double de la fraction donnée, $m = 2$; quand on demande le triple, $m = 3$, &c. Ainſi $\frac{ma}{b}$ repréſentera la fraction multiple quelconque de la fraction
* 118. $\frac{a}{b}$ que le Problême fait découvrir. Cela ſuppoſé. * Un rapport eſt à un autre rapport, comme le produit des extrêmes eſt
* 109. au produit des moiens. Par conſequent $\frac{ma}{b} . \frac{a}{b} :: mab . 1ab ::$ * $m . 1$. En mettant 2 au lieu de m, on aura $\frac{2a}{b} . \frac{a}{b} :: 2ab . 1ab :: 2 . 1$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLÊME X.

282. *TROUVER une fraction qui ſoit la moitié, le tiers, le quart, la cinquiéme partie; en un mot, qui ſoit la partie déterminée quelconque d'une fraction donnée.*

Regle ou operation. 1°. Il faut multiplier le dénominateur de la fraction donnée par 2, ſi l'on en veut la moitié; par 3, ſi on en veut le tiers; par 4, ſi on en veut le quart, &c. 2°. Il faut écrire le produit pour le dénominateur de la fraction qu'on cherche; & pour numerateur, le numerateur de la fraction donnée.

EXEMPLE.

POUR avoir la moitié de $\frac{1}{5}$, il faut multiplier 5 par 2, ce qui donnera 10; & écrire $\frac{1}{10}$. C'eſt la moitié de $\frac{1}{5}$.

Pour avoir le quart de $\frac{1}{3}$, il faut multiplier 3 par 4; le produit ſera 12: il faut écrire $\frac{1}{12}$ pour le quart de $\frac{1}{3}$.

Pour avoir la cinquiéme partie de $\frac{a}{b}$, il faut écrire $\frac{a}{5b}$.

Démonſtration. On ſuppoſera, pour rendre la démonſtration generale, que n repréſente 2 quand on veut la moitié d'une fraction; 3, quand on veut le tiers; 4, quand on veut le quart, &c. Ainſi $\frac{a}{b}$ repréſentant la fraction propoſée; $\frac{a}{nb}$ repréſentera en general celle que le Problême fait découvrir. Cela ſuppoſé. * Un rapport eſt à un autre rapport, comme le produit des extrêmes eſt au produit des moyens. Ainſi $\frac{a}{nb}. \frac{a}{b} :: 1ab. nab ::$ * $1. n$. C'eſt à dire, ſi n vaut 2, $\frac{a}{nb}$ ſera $\frac{a}{2b}$; ſi n vaut 3, $\frac{a}{nb} = \frac{a}{3b}$. *&c.* L'on aura donc $\frac{a}{2b}. \frac{a}{b} :: 1ab. 2ab ::$ * $1. 2$. &c. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 118. * 109. * 109.

PROBLÊME XI.

283. *REDUIRE une fraction de fraction à une ſeule fraction.*

Par exemple, réduire les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ à une ſeule fraction.

Regle ou operation. Il faut former une fraction, qui ait pour premier terme le produit des numerateurs des deux fractions données, & pour ſecond terme le produit des dénominateurs de ces deux fractions. Ce ſera la fraction qu'on cherche.

EXEMPLES.

POUR réduire les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ en une ſeule fraction; il faut écrire $\frac{2 \times 1}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$.

Pour réduire $\frac{2}{5}$ de $\frac{9}{10}$ en une ſeule fraction, il faut écrire $\frac{2 \times 9}{5 \times 10} = \frac{18}{50}$.

Démonſtration. On appliquera la démonſtration à un exemple pour la rendre plus claire. Réduire $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ à une ſeule fraction, c'eſt comparer ou rapporter immediatement à l'unité deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité; c'eſt à dire, trouver qu'elle eſt la fraction, qui ne contient que des parties de l'unité, & qui ſoit pourtant les deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité. Or en multipliant 5, dénominateur de $\frac{4}{5}$ de l'unité, par 3 dénominateur de $\frac{2}{3}$ de quatre cinquiémes de l'unité, & écrivant le produit 15 pour le dénominateur d'une fraction dont le numerateur ſoit le numerateur 4 de $\frac{4}{5}$
* 282. de l'unité; il eſt évident par le Problême précedent * que cette fraction $\frac{4}{15}$ de l'unité ſera un tiers de la fraction $\frac{4}{5}$ de l'unité. Par conſequent ſi on prend cette fraction deux fois; ou, ce qui revient au même, ſi on multiplie ſon numerateur 4 par 2, numerateur de $\frac{2}{3}$ de quatre cinquiémes de l'unité, on
* 281. aura la fraction $\frac{2\times4}{15} = \frac{8}{15}$ de l'unité, qui vaudra * deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité. Le Problême fait donc réduire une fraction de fraction à une fraction de l'unité qui eſt égale à cette fraction de fraction. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

284 POUR réduire une fraction de fraction de fraction; par exemple $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$; c'eſt à dire, la moitié de deux tiers de quatre cinquiémes de l'unité, à une ſeule fraction; il faut écrire le produit $1 \times 2 \times 4 = 8$ des numerateurs pour le premier terme de la fraction qu'on cherche; & pour ſecond terme, le produit $2 \times 3 \times 5 = 30$ de trois dénominateurs, & la fraction qu'on cherche ſera $\frac{8}{30}$.

* 283. *Démonſtration.* On a démontré * que $\frac{2\times4}{3\times5} = \frac{8}{15}$ étoit la valeur de la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de l'unité. D'où il
* 282. ſuit que $\frac{1\times8}{2\times15} = \frac{1\times2\times4}{2\times3\times5} = \frac{8}{30}$, qui eſt la valeur * de la moitié de $\frac{8}{15}$ de l'unité; eſt par conſequent la valeur de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de l'unité. D'où l'on voit qu'on peut trouver de la même maniere, par la multiplication des numerateurs & par la multiplication des dénominateurs, une ſeule fraction de l'unité égale à une fraction de fraction de fraction de fraction, &c. On peut nommer ces fractions de fraction de fraction, &c. des fractions compoſées.

COR-

COROLLAIRE.

285. IL ſuit des Problêmes précedens & de leurs Corollaires, qu'il n'y a point de nombre, qu'on ne puiſſe réduire à être une ſimple fraction de l'unité.

Car tout nombre eſt ou un nombre entier, ou un nombre rompu, c'eſt à dire, ou une fraction. Toute fraction eſt ou une fraction ſimple de l'unité, ou une fraction compoſée, c'eſt à dire, une fraction de fraction, &c. de l'unité; ou bien, c'eſt une fraction ſimple ou compoſée, c'eſt à dire, fraction, de fraction, &c. d'un nombre entier quelconque; comme $\frac{2}{3}$ de 60, $\frac{4}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de 60, ſont des fractions du nombre 60, la premiere ſimple, la ſeconde compoſée.

Or, 1°, tout nombre entier peut être réduit en une ſimple fraction de l'unité, en l'écrivant en fraction, par exemple $\frac{60}{1}$, & multipliant enſuite ſes deux termes * par un nombre tel qu'on voudra, comme par 10, 100, &c. car on aura $\frac{600}{10} = \frac{60}{1}$. * 278.

2°. Toute fraction ſimple de l'unité eſt par elle-même ſans réduction, une ſimple fraction de l'unité: & toute fraction compoſée; c'eſt à dire, toute fraction de fraction, &c. de l'unité, peut ſe réduire à une fraction ſimple de l'unité *par les articles* 283, 284.

3°. Enfin toute fraction d'un nombre entier quelconque tant ſimple que compoſée, c'eſt à dire, qui ſoit une fraction de fraction, &c d'un nombre entier quelconque, peut ſe réduire à une ſimple fraction de l'unité. Car il n'y a qu'à réduire, *par l'article* 278, le nombre entier lui-même en ſimple fraction de l'unité, & la fraction ſoit ſimple ſoit compoſée; c'eſt à dire, la fraction de fraction, &c. du nombre entier, deviendra, par cette réduction, une fraction compoſée; c'eſt à dire, une fraction de fraction, &c. de l'unité. Elle pourra donc être réduite *par les articles* 283 & 284, à une ſimple fraction de l'unité.

COROLLAIRE.

ON voit clairement par le Corollaire précedent, qu'il n'y a point de nombre poſſible, ſoit entier, ſoit rompu, qui n'ait une meſure commune ou aliquote commune avec l'u-

nité. D'où il ſuit que tous les nombres poſſibles peuvent avoir entr'eux une meſure commune.

SECTION III.

Où l'on explique l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion des fractions, la formation de leurs puiſſances, & l'extraction de leurs racines.

L'Addition & la Souſtraction des fractions ou rapports.

I. PROBLÈME.

286. *AJOUTER enſemble deux ou pluſieurs fractions données, & retrancher une ou pluſieurs fractions données d'une ou de pluſieurs autres fractions données.*

Regle ou operation. 1°. Il faut réduire toutes les fractions * 270. données * à un même dénominateur. 2°. S'il faut les ajouter, & 271. on prendra la ſomme de tous les numerateurs des fractions réduites pour le numerateur d'une fraction, & le dénominateur commun pour ſon dénominateur; & cette fraction ſera la ſomme des fractions données. 3°. S'il faut retrancher l'une de l'autre, on retranchera le numerateur de la fraction qui eſt la réduite de celle qu'on veut retrancher, on le retranchera dis-je, du numerateur de la réduite de l'autre, & l'on formera une fraction qui ait la difference des numerateurs pour premier terme, & le dénominateur commun pour ſecond terme; & elle ſera la difference qu'on cherche. 4°. S'il faut retrancher pluſieurs fractions d'une ou de pluſieurs autres; après les avoir toutes réduites au même dénominateur, on ajoutera toutes celles qu'il faut retrancher dans une fraction qui en ſoit la ſomme, & toutes les autres auſſi en une fraction qui en ſoit la ſomme; & l'on retranchera le numerateur de la premiere du numerateur de la ſeconde. On ſera une fraction qui ait pour premier terme la difference des numerateurs qui vient d'être découverte, & pour ſecond terme le dénominateur commun. Ce ſera la fraction qu'on * 269. cherche. 5°. On peut, avant d'operer, réduire * chacune des fractions données aux moindres termes pour rendre l'o-

peration plus ſimple. On peut auſſi, après l'operation ; reduire aux moindres termes la fraction, qui eſt la ſomme ou la difference, pour la rendre plus ſimple.

Exemples de l'Addition des fractions.

POUR trouver la ſomme de $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, 1°, on les réduit au même dénominateur, & l'on trouve $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$. 2°. On prend la ſomme 17 des numerateurs des fractions réduites, pour le premier terme, & le dénominateur commun 12 pour le ſecond terme de la fraction $\frac{17}{12}$, qui eſt la ſomme des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$.

Pour trouver la ſomme de $15 = \frac{15}{1}$ & $\frac{3}{5}$, on leur donne le même dénominateur, & elles deviennent $\frac{75}{5}$ & $\frac{3}{5}$. 2°. On prend la ſomme $75 + 3 = 78$ des numerateurs pour le premier terme, & le dénominateur commun 5 pour le ſecond terme de la fraction $\frac{78}{5}$, qui eſt la ſomme de $\frac{15}{3}$ & de $\frac{3}{5}$.

Pour trouver la ſomme de $3\frac{1}{2}$ & de $4\frac{2}{3}$, 1°, On les réduit à un même dénominateur, & l'on trouve $\frac{21}{6}$ & $\frac{28}{6}$. 2°. On ajoute les numerateurs, & l'on fait de la ſomme 49 le premier terme, & du dénominateur commun 6, le ſecond terme de la fraction $\frac{49}{6}$, qui eſt la ſomme qu'on cherche.

Quand il y a des entiers & des fractions, comme dans les deux exemples précedens ; on peut, ſi l'on veut, ajouter les entiers à part, & les fractions à part, & écrire la ſomme des entiers, & au devant, en moindres chifres, la ſomme des fractions. Ainſi on peut écrire $15\frac{1}{5}$ pour la ſomme de 15 & de $\frac{1}{5}$; & $7\frac{7}{8}$ ou $8\frac{1}{8}$ pour la ſomme de $3\frac{1}{2}$ & de $4\frac{2}{3}$.

Soit propoſée d'ajouter les trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$. 1°. Voyant que le dénominateur 2 de la premiere eſt un diviſeur du dénominateur 4 de la ſeconde, je réduis la prémiere $\frac{1}{2}$ * au dénominateur de la ſeconde, & les trois fractions ſont $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$, qui ſe réduiſent, en ajoutant enſemble les deux premieres, à $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$. Je les réduis au même dénominateur, & elles deviennent $\frac{15}{28}$ & $\frac{20}{28}$. 2°. J'ajoute les numerateurs, & j'écris $\frac{35}{28}$ pour la ſomme de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}$. * 270.

Pour ajouter $\frac{1}{64}$, $\frac{21}{16}$, $-1\frac{15}{16} = -\frac{31}{16}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, en multipliant ſeulement les deux

termes de chacune des deux dernieres par 4, à cauſe de $4 \times 16 = 64$: & je trouve $\frac{31}{16} = \frac{92}{64}$ & $\frac{31}{16} = \frac{124}{64}$. 2°. J'ajoute les deux poſitives $\frac{1}{64} + \frac{92}{64} = + \frac{93}{64}$. Et comme la négative $- \frac{124}{64}$ ſurpaſſe la poſitive, je retranche le numerateur 93 du numerateur 124, la difference eſt 31, laquelle eſt negative; j'écris — 31 pour le premier terme, & 64 pour le ſecond terme de la fraction $- \frac{31}{64}$, qui eſt la ſomme des trois propoſées.

On remarquera que quand on ajoute des fractions poſitives & négatives, l'addition des négatives aux poſitives eſt une veritable ſouſtraction; & ſi les négatives ſurpaſſent les poſitives, la ſomme aura le ſigne —; ſi les poſitives ſurpaſſent les négatives, la ſomme aura +; mais quand on ajoute des ſeules grandeurs négatives, c'eſt ſimplement une addition.

Pour ajouter enſemble $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, 1°, je les réduis au même ſecond terme, & elles deviennent $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$. 2°. J'ajoute les numerateurs, & j'écris $\frac{adf + bcf + bde}{bdf}$ pour la ſomme de $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$.

Pour ajouter $\frac{a^2 - c^2}{a - b}$ & $\frac{a^2b - a^2c}{ac - bc}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, en multipliant ſimplement les deux termes de la premiere par c, qui eſt le quotient de $ac - bc$ diviſé par $a - b$, & je trouve $\frac{a^2 - c^2}{a - b} = \frac{a^2c - c^3}{ac - bc}$, qui a le même dénominateur que la ſeconde. 2°. J'ajoute enſuite les numerateurs des deux fractions qui ont le même dénominateur, & j'écris leur ſomme pour le premier terme, & le dénominateur commun pour le ſecond terme de la fraction $\frac{a^2c - c^3 + a^2b - a^2c}{ac - bc}$ qui eſt la ſomme des deux propoſées.

Pour ajouter $\frac{a^4}{a^3b - b^4}$ & $\frac{b^3}{a^3 - ab^3}$, 1°. je les réduis au même dénominateur, en remarquant qu'il ſuffit (à cauſe de $a - b$, diviſeur commun des dénominateurs $a^3b - b^4 = \overline{a - b} \times \overline{ab + b^3}$, & $a^3 - ab^3 = \overline{a - b} \times a$) de multiplier les deux termes de la premiere par a, & les deux termes de la ſeconde par $ab + b^3$, & je trouve $\frac{a^4}{a^3b - b^4} = \frac{a^5}{a^4b - ab^4}$, & $\frac{b^3}{a^3 - ab^3} = \frac{ab^3 + b^5}{a^4b - ab^4}$. 2°. J'ajoute les numerateurs des fractions réduites au même dénominateur, & j'écris leur ſomme pour le premier terme, & le dénominateur commun pour le ſecond terme

de la fraction $\frac{a^3+ab^2+b^3}{a^2b-ab^2}$ qui eſt la ſomme des deux propoſées.

Exemples de la Souſtraction des fractions.

POUR retrancher $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, & je trouve $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$. 2°. Je retranche 8 de 9, & j'écris la difference 1 pour le premier terme, & le dénominateur commun 12 pour le ſecond terme de la fraction $\frac{1}{12}$ que je cherche.

Pour ôter $\frac{5}{8}+\frac{6}{12}$ de $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$. 1°. Je trouve la ſomme des deux premieres réduites aux moindres termes $\frac{9}{8}$, & la ſomme des deux autres $\frac{5}{4}$. 2°. Je multiplie les deux termes de $\frac{5}{4}$ par 2, & j'ai $\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$. J'ôte enſuite le numerateur 9 du numerateur 10, & j'écris la difference 1 pour le premier terme & le dénominateur commun pour le ſecond terme de la fraction $\frac{1}{8}$ que je cherche.

Lorſque les fractions à retrancher ſont négatives & les autres poſitives, la ſouſtraction eſt une addition; car pour retrancher les négatives il faut les rendre poſitives, & les ajouter aux autres poſitives.

Lorſque les fractions à retrancher ſont poſitives & les autres négatives, la ſouſtraction eſt encore une addition; car pour retrancher les poſitives il faut les rendre négatives, & enſuite les ajouter aux autres négatives.

Pour retrancher $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$, 1°, je les réduis au même dénominateur, & je trouve $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$. 2°. J'ôte le numerateur de la premiere du numerateur de la ſeconde, & j'écris $\frac{bc-ad}{bd}$ pour la fraction que je cherche.

Pour rétrancher $\frac{-a^2+b^2}{a-b}$ de $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$, 1°, je les réduis au même dénominateur en multipliant ſeulement les deux termes de la premiere par $a+b$ qui eſt le quotient de $a^2-b^2=\overline{a-b}\times\overline{a+b}$ diviſé par $a-b$, & je trouve $\frac{-a^2+b^2}{a-b}=\frac{-a^3-a^2b+ab^2+b^3}{a^2-b^2}$. 2°. Je retranche le numerateur de cette derniere fraction du numerateur a^3+b^3; j'écris leur difference pour le premier terme & le dénominateur commun pour le ſecond terme de la fraction $\frac{2a^3+a^2b-ab^2}{a^2-b^2}$ qui eſt celle que je cherche.

Pour ôter $a-\frac{ab}{c}$ de $b-\frac{ac}{b}$, 1°, je réduis $a-\frac{ab}{c}$ à $\frac{ac-ab}{c}$, & $b-\frac{ac}{b}$ à $\frac{b^2-ac}{b}$, & je leur donne enſuite le même dénomi-

nateur, & je trouve $\frac{abc-ab^2}{bc}$ & $\frac{b^2c-ac^2}{bc}$. 2°. Je retranche le numerateur de la premiere réduite du numerateur de la ſeconde réduite, & j'écris la difference pour le premier terme & le dénominateur commun pour le ſecond de la fraction $\frac{b^2c-ac^2-abc+ab^2}{bc}$, qui eſt la fraction que je cherche, qu'on peut réduire à $b - a \frac{-ac+ab}{bc}$.

Quand il y a des entiers & des fractions à retrancher d'autres entiers joints auſſi à des fractions, on peut retrancher à part les entiers des entiers, & les fractions des fractions, en écrivant les entiers du reſte, & au devant les fractions du reſte que fait découvrir la ſouſtraction.

REMARQUE.

QUAND le numerateur eſt complexe, chaque grandeur incomplexe de ce numerateur peut être regardée comme un numerateur particulier, qui a pour dénominateur celui de la fraction, dont le numerateur eſt complexe.

Par exemple $\frac{b^2c-abc-ac^2+ab^2}{bc} = \frac{b^2c}{bc} - \frac{abc}{bc} - \frac{ac^2}{bc} + \frac{ab^2}{bc}$. Et l'on peut abreger celles de ces fractions qui le peuvent être en diviſant leurs deux termes par une même grandeur. Par exemple, la fraction précedente ſe peut réduire à $b - a - \frac{ac^2}{bc} + \frac{ab^2}{bc}$.

* 214. *Démonſtration du Problême.* On a fait voir clairement * que les fractions qui ont le même dénominateur, peuvent être regardées comme des unitez. Par exemple, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, peuvent être regardées comme des unitez qui ſont chacune une troiſiéme partie de l'unité à laquelle elles ont rapport. Les numerateurs expriment le nombre de ces unitez; ainſi en ajoutant les numerateurs, ou les retranchant les uns des autres, il eſt évident que la fraction qui a pour premier terme la ſomme ou la difference des numerateurs, & pour ſecond terme le dénominateur commun, eſt la ſomme ou la difference de ces fractions.

La Multiplication des fractions.

II. PROBLÊME.

287. *MULTIPLIER deux ou pluſieurs fractions les unes par les autres, & en trouver le produit.*

Regle ou operation. Il faut multiplier les numerateurs les uns par les autres, & écrire le produit pour le premier terme de la fraction qu'on cherche. Il faut multiplier enſuite les dénominateurs, & en écrire le produit pour le ſecond terme de la fraction qu'on cherche.

EXEMPLES.

POUR multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faut écrire $\frac{2\times4}{3\times5} = \frac{8}{15}$ pour le produit qu'on cherche.

Pour multiplier $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ les unes par les autres, il faut écrire $\frac{1\times2\times3}{2\times3\times4} = \frac{6}{24}$ pour le produit qu'on cherche, qui devient $\frac{1}{4}$, en le réduiſant aux moindres termes.

Pour multiplier $3 = \frac{3}{1}$ par $\frac{2}{5}$, il faut écrire le produit $\frac{3\times2}{1\times5} = \frac{6}{5}$.

Pour multiplier $2\frac{1}{4}$ par $4\frac{2}{5}$, il faut réduire * chaque entier & ſa fraction en une ſeule fraction, & l'on aura $\frac{11}{4}$ à multiplier par $\frac{22}{5}$; il faut enſuite écrire pour leur produit $\frac{11\times22}{4\times5} = \frac{242}{20}$, qui devient, en le réduiſant, * $12\frac{2}{20}$, ou * $12\frac{1}{10}$. * 280. * 279. * 269.

REMARQUE.

288. QUAND il y a des entiers & des fractions à multiplier par des entiers & des fractions, comme $2\frac{1}{4}$ par $4\frac{2}{5}$; on pourra faire la multiplication par parties. On multipliera d'abord les entiers par les entiers, comme dans cet exemple 2 par 4, & l'on aura 8; enſuite chaque entier par la fraction de l'autre entier, & l'on aura $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$, & $4 \times \frac{1}{4} = \frac{12}{4}$: enfin la fraction par la fraction, & l'on aura $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$. On prendra enſuite la ſomme de tous ces produits $8 + \frac{4}{5} + \frac{12}{4} + \frac{6}{20} = 12\frac{1}{10}$. Il eſt évident que ce ſera le produit qu'on cherchoit.

Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, il faut écrire le produit des numerateurs ac pour le premier terme, & le produit bd des dénominateurs pour le ſecond terme de la fraction $\frac{ac}{bd}$ que l'on cherche.

Pour multiplier $ab = \frac{ab}{1}$ par $\frac{a^2+b^2}{a-b}$. Il faut écrire $\frac{ab\times(a^2+b^2)}{1\times(a-b)} = \frac{a^3b+ab^3}{a-b}$ pour le produit.

Si l'on veut multiplier $a + \frac{a^2}{b}$ par $a - \frac{a^2}{b}$, on peut faire la

multiplication de ces deux manieres. 1°. On prendra par parties les quatre produits $a \times a = a^2$; $a \times -\frac{c^2}{b} = -\frac{ac^2}{b}$; $a \times \frac{a^2}{b} = \frac{a^3}{b}$; $+\frac{a^2}{b} \times -\frac{c^2}{b} = -\frac{a^2c^2}{b^2}$ & leur ſomme $a^2 - \frac{ac^2}{b} + \frac{a^3}{b} - \frac{a^2c^2}{b^2}$ ſera le produit qu'on cherche. 2. Ou bien on réduira $a + \frac{a^2}{b}$ *280. à $*\frac{ab+a^2}{b}$, & $a - \frac{c^2}{b}$ à $\frac{ab-c^2}{b}$. Enſuite on fera la multiplication $\frac{ab+a^2}{b} \times \frac{ab-c^2}{b} = \frac{a^2b^2+a^3b-ab c^2-a^2c^2}{b^2}$ (qu'on pourra réduire à $a^2 + \frac{a^3}{b} - \frac{ac^2}{b} - \frac{a^2c^2}{b^2}$.) & l'on aura le produit qu'on cherche.

Démonſtration du Problême. Il faut démontrer qu'en multipliant deux fractions quelconques repréſentées par $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, *72. leur produit eſt $\frac{ac}{bd}$. (C'eſt à dire, il faut démontrer que * 1. *113. *75. $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$.) 1 . $\frac{a}{b} :: *b . a :: *bc . ac :: * \frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$. Par conſequent *109. * 1 . $\frac{a}{b} :: \frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$. Mais $\frac{bc}{bd} = * \frac{c}{d}$. C'eſt pourquoi ſi l'on met *52. *75. dans 1 . $\frac{a}{b} :: \frac{bc}{bd} . \frac{ac}{bd}$, la fraction $\frac{c}{d}$ à la place de ſon égale $\frac{bc}{bd}$, l'on aura 1 . $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

Autre démonſtration. On aura démontré que 1 . $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$ ſi l'on fait voir que $\frac{c}{d} . \frac{ac}{bd} :: 1 . \frac{a}{b}$. En voici la démonſtra- *118. *75. tion $\frac{c}{d} . \frac{ac}{bd} :: *bcd . acd :: *b . a :: * 1 . \frac{a}{b}$. Par conſequent * *113. *52. $\frac{c}{d} . \frac{ac}{bd} :: 1 . \frac{a}{b}$. *Ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE.

289. QUAND les deux fractions qu'on multiplie l'une par l'autre ſont chacune moindre que l'unité, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, leur produit $\frac{6}{12}$ eſt moindre que l'unité. Car ſuppoſant ces deux fractions repréſentées par $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, & leur produit par $\frac{ac}{bd}$, on *72. aura * 1 $\frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . \frac{ac}{bd}$; mais le conſequent $\frac{a}{b}$ du premier rapport eſt ſuppoſé moindre que l'antecedent 1 ; le conſequent $\frac{ac}{bd}$ du ſecond rapport eſt donc moindre que ſon antecedent $\frac{c}{d}$, qu'on a ſuppoſé plus petit que l'unité.

REMARQUE.

ON voit à préſent la raiſon pourquoi une grandeur écrite à la droite d'une fraction eſt cenſée être au numerateur : car $\frac{a}{b} \times x = \frac{a}{b} x = \frac{ax}{b}$.

La Diviſion des fractions.

PROBLÊME III.

290. *DIVISER une fraction* $\frac{a}{b}$ *par une autre* $\frac{c}{d}$, *& en trouver le quotient.*

Regle ou operation. Il faut multiplier le numerateur *a* du dividende $\frac{a}{b}$ par le dénominateur *d* du diviſeur $\frac{c}{d}$; le produit *ad* ſera le premier terme du quotient qu'on cherche. Il faut enſuite multiplier le dénominateur *b* du dividende $\frac{a}{b}$ par le numerateur *c* du diviſeur $\frac{c}{d}$, le produit *bc* ſera le ſecond terme du quotient qu'on cherche, qui eſt $\frac{ad}{bc}$.

Ceux qui commencent, peuvent écrire le diviſeur à la droite du dividende, & multiplier en croix $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$; le quotient ſera $\frac{ad}{bc}$. Ou bien, ayant écrit le dividende le premier, & le diviſeur le ſecond, il n'y a qu'à prendre le produit des extrêmes pour le numerateur, & le produit des moyens pour le dénominateur de la fraction qui eſt le quotient.

Pour diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faut multiplier 2 par 5, le produit 10 ſera le premier terme du quotient. Il faut enſuite multiplier 3 par 4, le produit 12 ſera le ſecond terme du quotient qui eſt $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Pour diviſer $3 = \frac{3}{1}$ par $\frac{2}{5}$, il faut écrire pour le quotient $\frac{3 \times 5}{1 \times 2} = \frac{15}{2}$.

Pour diviſer $\frac{2}{5}$ par $3 = \frac{3}{1}$, il faut écrire pour le quotient $\frac{2 \times 1}{5 \times 3} = \frac{2}{15}$.

Pour diviſer $5\frac{2}{3}$ par $6\frac{3}{4}$, il faut réduire chaque entier & ſa fraction à une ſeule fraction, & l'on aura $\frac{17}{3}$ à diviſer par $\frac{27}{4}$. Il faut enſuite former le quotient $\frac{17 \times 4}{3 \times 27} = \frac{68}{81}$.

Pour diviſer $a = \frac{a}{1}$ par $\frac{b}{c}$, il faut écrire $\frac{a \times c}{1 \times b} = \frac{ac}{b}$.

Pour diviſer $\frac{b}{c}$ par $a = \frac{a}{1}$, il faut écrire $\frac{b \times 1}{c \times a} = \frac{b}{ac}$.

Pour diviſer $a + \frac{b^2}{c}$ par $d + \frac{e^2}{f}$, il faut réduire chaque entier & ſa fraction à une ſeule fraction, & l'on aura $\frac{ac + b^2}{c}$ à diviſer par $\frac{df + e^2}{f}$. Il faut enſuite former le quotient $\frac{\overline{ac + b^2} \times f}{c \times \overline{df + e^2}} = \frac{acf + b^2 f}{cdf + ce^2}$.

Démonſtration du Problême. Il faut démontrer qu'en fai-

ſant la diviſion d'une fraction quelconque repréſentée par $\frac{a}{b}$ par une autre fraction quelconque repreſentée par $\frac{c}{d}$, le
* 106. quotient eſt $\frac{ad}{bc}$: ce qui ſera démontré * ſi l'on fait voir que
* 118. $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bc} . 1$. En voici la démonſtration $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} ::$ * $ad . bc ::$
* 111. * $\frac{ad}{bc} . 1$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUES.

1.

291. QUAND le numerateur du diviſeur eſt un diviſeur exact du numerateur du dividende, & que le dénominateur du diviſeur eſt en même temps un diviſeur exact du denominateur du dividende, comme s'il falloit diviſer $\frac{ab}{cd}$ par $\frac{b}{d}$; dans ce cas, on pourra prendre le quotient qui vient de la diviſion du numerateur du dividende par le numerateur du diviſeur pour le premier terme du quotient qu'on cherche, & le quotient qui vient de la diviſion du dénominateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, pour le ſecond terme du quotient qu'on cherche. Pour diviſer $\frac{ab}{cd}$ par $\frac{b}{d}$, on peut écrire pour quotient $\frac{a}{c}$.

De même pour diviſer $\frac{12}{20}$ par $\frac{2}{5}$, on prendra pour le premier terme du quotient qu'on cherche, le quotient 6 de 12 diviſé par 2 ; & pour ſecond terme du quotient qu'on cher-
* 269. che, le quotient 4 de 20 diviſé par 5, & l'on aura $\frac{6}{4} =$ * $\frac{3}{2}$ pour le quotient qu'on cherche.

* 287. La démonſtration eſt évidente. Car * $1 . \frac{a}{c} :: \frac{b}{d} . \frac{ab}{cd}$. Par
* 55. conſequent les rapports inverſes ſont égaux ; & l'on aura *
* 106. $\frac{ab}{cd} . \frac{b}{d} :: \frac{a}{c} . 1$. D'où il ſuit * que $\frac{a}{c}$ eſt le quotient de $\frac{ab}{cd}$ diviſé par $\frac{b}{d}$.

2.

On n'a pas mis d'exemples de fractions dont les numerateurs & les dénominateurs fuſſent des grandeurs complexes ; parceque n'y ayant aucune difficulté particuliere dans ces exemples ; les plus ſimples exemples ſervent mieux à faire concevoir clairement les regles de la multiplication & de la diviſion, que les Commençans peuvent eux-mêmes appliquer aux exemples les plus compoſez.

3.

On peut, si l'on veut, réduire aux moindres termes, les fractions avant la multiplication & la division, & cela rendra ces operations plus simples. On peut aussi réduire encore les produits & les quotients qu'on trouve aux moindres termes pour les rendre plus simples.

4.

292. La division des fractions peut servir à faire connoître le rapport d'une fraction $\frac{a}{b}$ à une autre $\frac{c}{d}$. Car le quotient de la division d'un rapport par un autre rapport * est un rapport égal à celui qui est entre ces deux rapports; par exemple, le rapport de $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{d}$ est égal au quotient $\frac{ad}{bc}$. Car $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}::$ * $\frac{ad}{bc}.1::$ * $ad.bc$. * 118. * 290. * 111.

5.

293. Comme l'on marque la division d'une grandeur a par une grandeur b de cette maniere $\frac{a}{b}$; on peut aussi marquer quelquefois la division de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, en écrivant $\frac{a}{b}$ sur une ligne, & $\frac{c}{d}$ au dessous de cette façon $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$: & pour réduire cette expression à une plus simple, on fait la division que marque cette expression, & l'on trouve le quotient $\frac{ad}{bc}$.

Quand on a cette autre expression $\frac{a+\frac{ab}{c}}{b+\frac{bd}{c}}$; on la réduit * d'abord à $\frac{ac+ab}{bc+bd}$; & faisant ensuite * la division, on la réduira à $\frac{acc+abc}{bcc+bdc}$. * 280. * 290.

Si l'on avoit cette autre expression $\frac{a+c}{b+\frac{d}{d}}$; il faudroit d'abord réduire * le diviseur $b+\frac{cd}{d}$ à $\frac{bd+cd}{d}$, & ensuite * diviser $a+c=\frac{a+c}{1}$ par $\frac{bd+cd}{d}$, & le quotient seroit $\frac{ad+cd}{bd+cd}$, qu'on peut réduire * à $\frac{a+c}{b+c}$. * 280. * 290. * 269.

Cette autre expression toute seule $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ est équivoque. Car elle peut marquer ces deux divisions differentes, 1°, ou bien que l'entier $a=\frac{a}{1}$ est divisé par la fraction $\frac{b}{c}$; &, dans ce cas, le quotient est * $\frac{ac}{b}$. 2°. Ou bien elle peut marquer que * 290.

la fraction $\frac{a}{b}$ eſt diviſée par l'entier $c = \frac{c}{1}$; & le quotient eſt
* 290. * $\frac{a}{bc}$, qui eſt different du précedent. C'eſt pourquoi il faut éviter cette expreſſion ; ou bien il faut, ſi l'on veut s'en ſervir, faire la ligne qui ſépare le dividende du diviſeur, plus grande que l'autre ligne. Par exemple, $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ marquera que a eſt diviſé par $\frac{b}{c}$, & $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ marquera que $\frac{a}{b}$ eſt diviſée par c.

On verra facilement par les expreſſions qu'on vient d'expliquer dans cette remarque, la maniere de faire la diviſion marquée par l'expreſſion ſuivante, qui ſervira à entendre celles qui ſeroient plus compoſées. $\frac{a + \frac{b^2}{\frac{c}{d} + bc}}{b - \frac{c^2 + \frac{b^3}{d}}{e}}$. On voit d'abord que le dividende eſt $a + \frac{b^2}{\frac{c}{d} + bc}$, & le diviſeur $b - \frac{c^2 + \frac{b^3}{d}}{e}$. Mais avant de faire la diviſion, il faut réduire l'un & l'autre ſéparément à une ſeule fraction. Commençant
* 280. par le dividende, il faut d'abord réduire $\frac{b^2}{\frac{c}{d} + bc}$ à * $\frac{b^2}{\frac{cd + bc}{d}}$;
* 290. & faiſant la diviſion * de $\frac{b^2}{1}$ par $\frac{cd + bc}{d}$, on le réduira à $\frac{b^2 d}{cd + bc}$. Ainſi le dividende eſt déja réduit à $a + \frac{b^2 d}{cd + bc}$; on le réduira
* 280. enfin à * $\frac{acd + abc + b^2 d}{cd + bc}$.

Pour réduire le diviſeur à une ſeule fraction, on réduira
* 280. d'abord $- c^2 + \frac{b^3}{d}$ à * $- \frac{c^2 d + b^3}{d} = - c^2 + \frac{b^3}{d}$. On diviſera enſuite $- \frac{c^2 d + b^3}{d}$ par $e = \frac{e}{1}$, & l'on aura $- \frac{c^2 d + b^3}{de} = - \frac{c^2 + \frac{b^3}{d}}{e}$. Le diviſeur eſt déja réduit à $b - \frac{c^2 d + b^3}{de}$. On le ré-
* 280. duira enfin à * $\frac{bde - c^2 d + b^3}{de}$.

Le dividende & le diviſeur propoſez étant ainſi préparez, on les diviſera l'un par l'autre, & l'on trouvera le quotient $\frac{acd + abc + b^2 d}{cd + bc} \times \frac{de}{bde - c^2 d + b^3} = \frac{acd^2 e + abcde + b^2 d^2 e}{bcd^2 e + b^2 cde - c^3 d^2 - bc^3 d + b^3 cd + b^4 e}$.

6.

Quand on s'eſt rendu familier le calcul des fractions & le calcul des grandeurs entieres, que l'on a expliquez juſqu'ici ; on peut employer l'un avec l'autre dans beaucoup de calculs

qui demandent ce mélange, & qui ſont utiles dans l'Analyſe, & dans la réſolution d'un grand nombre de Problêmes des Mathematiques. On va mettre quelques exemples, qui ſuffiront aux Commençans pour leur faire concevoir clairement le mélange du calcul des entiers avec le calcul des fractions, quand ils en trouveront; & pour faire eux-mêmes de ces calculs mêlez du calcul des entiers, & du calcul des fractions, quand ils en auront beſoin.

294. Si l'on donne a à diviſer par $a + x$; il ſemble qu'il ſuffit d'écrire $\frac{a}{a+x}$ pour le quotient, & c'eſt veritablement le quotient, *ſuivant les art.* 105, 112 *&* 115. Cependant on peut, en mêlant le calcul des fractions avec le calcul des entiers, trouver un quotient de la diviſion qu'on propoſe qui ait des termes à l'infini, & cela eſt utile en pluſieurs rencontres. Voici comment on trouve ce quotient qui contient des termes à l'infini.

dividende. | diviſeur.

a | $a + x$

o | quotient

1er reſte $-x$

$1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} -$ &c. $= \frac{a}{a+x}$

2e reſte $+\frac{x^2}{a}$

3e reſte $-\frac{x^3}{a^2}$

4e reſte $+\frac{x^4}{a^3}$

5e reſte $-\frac{x^5}{a^4}$

&c.

On diviſe a par a, & on écrit le quotient 1; puis on multiplie l'autre partie x du diviſeur $a + x$ par le quotient 1, & on retranche le produit $+1x$ du dividende, ce qui ſe fait en écrivant $-1x$ au dividende comme un reſte. On efface le dividende a, ou bien on écrit o ſous a, pour marquer qu'on s'en eſt ſervi.

On a donc le premier reſte $-x$ pour le dividende ſur lequel il faut operer. On diviſe $-x$ par a, on écrit le quotient $-\frac{x}{a}$; on écrit un o ſous le dividende $-x$, on multiplie le quotient $-\frac{x}{a}$ par la ſeconde partie $+x$ du diviſeur,

& on ôte du dividende le produit $-\frac{x^2}{a}$, en l'écrivant au dividende avec le ſigne oppoſé $+\frac{x^2}{a}$, comme étant un reſte.

On diviſe ce dividende $+\frac{x^2}{a}$ par a; on écrit le quotient $+\frac{x^2}{a^2}$, on écrit o ſous le dividende $+\frac{x^2}{a}$. On multiplie la ſeconde partie $+x$ du diviſeur par le quotient $+\frac{x^2}{a^2}$; & on ôte du dividende le produit $+\frac{x^3}{a^2}$, en l'écrivant au dividende avec le ſigne oppoſé $-\frac{x^3}{a^2}$ comme un reſte.

On opere ſur ce nouveau dividende comme ſur chacun des précedens, c'eſt à dire, on diviſe $-\frac{x^3}{a^2}$ par a, on écrit le quotient $-\frac{x^3}{a^3}$: on met o ſous le dividende $-\frac{x^3}{a^2}$. On prend le produit de $-\frac{x^3}{a^3}$ par $+x$, ſeconde partie du diviſeur, qui eſt $-\frac{x^4}{a^3}$, & on l'ôte du dividende, en l'écrivant au dividende avec le ſigne oppoſé $+\frac{x^4}{a^3}$ comme un reſte.

En regardant ce reſte comme le dividende, on continue la diviſion tant qu'on veut, & l'on trouve toujours de nouveaux termes pour le quotient. La maniere de trouver les termes déja découverts, qu'on vient d'expliquer, ſuffit pour faire concevoir comment ſe font ces ſortes de diviſions, & comment on découvre des termes du quotient à l'infini.

Cette maniere de trouver un quotient, qui ait des termes à l'infini, en faiſant la diviſion d'une grandeur a par une grandeur $a+x$, s'appelle une *approximation* à l'infini de la grandeur $\frac{a}{a+x}$. On dit auſſi que *la ſuite* infinie $1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+$ &c. eſt la valeur de $\frac{a}{a+x}$; & la maniere de trouver cette *ſuite* infinie ſe nomme la *réduction* de $\frac{a}{a+x}$ en *la ſuite* infinie, qui en eſt la valeur.

On peut voir d'autres exemples de ces ſortes de diviſions dans l'*Analyſe démontrée*, *article* 208.

295. Quand en faiſant une diviſion des grandeurs litterales complexes par un diviſeur complexe, l'on trouve un reſte qui empêche la diviſion d'être exacte; on peut, par des operations ſemblables à celles qu'on vient d'expliquer, réduire ce reſte en *la ſuite* infinie qui en eſt la valeur, en continuant de diviſer ce reſte par le diviſeur tant qu'on voudra.

296. On peut auſſi, par le moyen des operations qu'on vient d'expliquer, trouver le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs litterales complexes, ſans avoir beſoin de la pré-

paration dont on a fait le cinquiéme article de la méthode * du plus grand diviſeur commun ; Ce qu'on concevra aiſé- *252.
ment par un exemple.

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \;\Big(\frac{-2x^2 + 5x - 3}{-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}}$$

$$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

$$-\frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 2$$

$$\circ \quad \circ$$

1. reſte. $-\frac{3x}{4} + \frac{3}{4}$

Pour trouver le plus grand diviſeur commun de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, & de $-2x^2 + 5x - 3$. Il faut dire x^3 diviſé par $-2x^2$, donne pour quotient $-\frac{x}{2}$; il faut écrire o ſous x^3, pour marquer qu'on s'en eſt ſervi, & multiplier l'autre partie $+5x - 3$ du diviſeur par le quotient $-\frac{x}{2}$, & retrancher du dividende les produits $-\frac{5x^2}{2} + \frac{3x}{2}$ à meſure qu'on les forme; c'eſt à dire, il faut réduire * $-4x^2$ du dividende à $-\frac{8x^2}{2}$ *278.
& en retrancher $-\frac{5x^2}{2}$, & écrire le reſte $-\frac{3x^2}{2}$, & réduire auſſi $+5x$ à $+\frac{10x}{2}$, en ôter $+\frac{3x}{2}$; & écrire le reſte $+\frac{7x}{2}$.

Il faut continuer la diviſion, parceque x^2 dans le dividende $-\frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 2$ n'eſt pas à un moindre degré que dans le diviſeur. On dira donc le quotient de $-\frac{3x^2}{2}$ diviſé par $-2x^2$ eſt $+\frac{3}{4}$; il faut l'écrire au quotient, mettre un o ſous $-\frac{3x^2}{2}$; multiplier $+5x - 3$ par le quotient $+\frac{3}{4}$, & ôter les produits $+\frac{15x}{4} - \frac{9}{4}$ de $+\frac{7x}{2} - 2$ à meſure qu'on les forme : ce qui ſe pratique en réduiſant * $+\frac{7x}{2}$ à $+\frac{14x}{4}$, c'eſt à dire au *270.
dénominateur de $\frac{15x}{4}$, & -2 à $-\frac{8}{4}$; puis ôtant $+\frac{15x}{4}$ de $+\frac{14x}{4}$, & $-\frac{9}{4}$ de $-\frac{8}{4}$, & écrivant les reſtes $-\frac{1x}{4} + \frac{3}{4}$.

Dans le reſte $-\frac{1x}{4} + \frac{1}{4}$, x a un moindre degré que dans le diviſeur $-2x^2 + 5x - 3$; c'eſt pourquoi, ſuivant * la *252. art.
methode de trouver le plus grand diviſeur commun ; il faut 3.
à préſent diviſer $-2x^2 + 5x - 3$, qui a ſervi de diviſeur, & qui devient le dividende, par le reſte $-\frac{1x}{4} + \frac{1}{4}$ pris pour diviſeur. Mais ce nouveau diviſeur ayant pour multiplicateur commun de tous ſes termes la fraction $\frac{1}{4}$; car $-\frac{1x}{4} + \frac{1}{4} = +\frac{1}{4} \times - x + \frac{1}{4} \times 1$; il faut en diviſer tous les termes par $\frac{1}{4}$ (ou ce qui revient au même, les multiplier par 4, ce qui ſe fait en effaçant ſimplement 4) & le diviſeur ſera $-x + 1$.

Il faut à préſent diviſer $-2x^2+5x-3$ par $-x+1$, comme on l'a expliqué dans la diviſion des grandeurs complexes entieres; & trouvant que la diviſion eſt exacte le reſte $-x+1$, qui a ſervi de diviſeur dans cette diviſion exacte, eſt le plus grand diviſeur commun des deux grandeurs propoſées.

On doit remarquer dans cet exemple de diviſion, qu'il eſt quelquefois neceſſaire, pour faire une diviſion des grandeurs complexes, par la methode de la diviſion des grandeurs complexes entieres, de ſe ſervir du calcul des fractions; on en va mettre un autre exemple pour faire concevoir clairement aux Commençans la maniere de faire ces ſortes de diviſions.

$$\begin{array}{lll} A & & B \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{5a}{8}x^2+\frac{9a^2x}{48}+\frac{12abx}{48}-\frac{1}{4}a^2b & \Big(& \frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}ax+ab}{\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}a} \\ \circ\quad\circ\quad\circ\quad\circ & & \\ -\frac{10a}{48}x^2+\frac{9a^2}{48}x-\frac{1}{4}a^2b & & \\ \circ\quad\circ\quad\circ & & \end{array}$$

297. Pour diviſer la grandeur $\frac{1}{3}x^3-\frac{5a}{8}x^2+\frac{9a^2x}{48}+\frac{12abx}{48}-\frac{1}{4}a^2b$ par la grandeur $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}ax+ab$: je dis $\frac{1}{3}x^3$ diviſé par $\frac{1}{2}x^2$, le quotient $\frac{2}{3}x$. J'écris $\frac{2}{3}x$ au quotient, & je mets o ſous $\frac{1}{3}x^3$. Je multiplie le reſte du diviſeur $-\frac{1}{4}ax+ab$ par le quotient $+\frac{2}{3}x$; & j'ôte du dividende les produits $-\frac{2}{4}ax^2+\frac{2abx}{3}$ à meſure que je les forme, ce qui ſe fait ainſi. Je multiplie chaque terme de $-\frac{2}{4}ax^2$ par 2, pour réduire cette fraction au dénominateur 8; & elle devient $-\frac{4}{8}ax^2$; j'ôte $-\frac{4}{8}ax^2$ de $-\frac{5a}{8}x^2$, & j'écris le reſte $-\frac{1a}{8}x^2$. Je réduis auſſi $+\frac{2abx}{3}$ au dénominateur 48, en multipliant ſes deux termes par 16, & j'ai $+\frac{32abx}{48}$, que j'ôte de $+\frac{32abx}{48}$; & il reſte o que j'écris. Ainſi le dividende ſur lequel il faut operer eſt $-\frac{1a}{8}x^2+\frac{9a^2}{48}x-\frac{1}{4}a^2b$.

Je dis le quotient de $-\frac{1aa^2}{8}$, diviſé par $+\frac{1}{2}x^2$, eſt $-\frac{2}{8}a$ *269. $=$ * $-\frac{1}{4}a$. J'écris au quotient $-\frac{1}{4}a$, je mets o ſous $\frac{1a}{8}x^2$; je multiplie la ſeconde partie $-\frac{1}{4}ax+ab$ du diviſeur par le nouveau quotient $-\frac{1}{4}a$; & à meſure que je forme les *75. produits $+\frac{1}{16}a^2x=*+\frac{1}{2}\times\frac{1}{16}a^2x=+\frac{2}{48}a^2x$, & $-\frac{1}{4}a^2b$, je

je les ôte du dividende; & trouvant qu'il reſte o, je ſuis aſſuré que $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$ eſt le quotient que je cherchois.

298. On fera remarquer ſur ces ſortes d'exemples de diviſion, où il faut ſuivre la methode de la diviſion des grandeurs complexes entieres, & y employer auſſi la diviſion & les autres operations des fractions; que quand la grandeur complexe qui eſt le dividende, & la grandeur complexe qui eſt le diviſeur contiennent des fractions, c'eſt à dire, quand chacun des termes, ou quelques-uns des termes de ces grandeurs complexes ſont des fractions; on peut réduire le dividende & le diviſeur à n'avoir aucunes fractions, de maniere pourtant que l'on n'en trouvera pas moins enſuite le veritable quotient. Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer la grandeur A par la grandeur B, il faut d'abord réduire tous les termes de A à un même dénominateur ſans changer leur valeur, & réduire de même les termes de B; & l'on aura le dividende a, & le diviſeur b. Il faut enſuite réduire a & b

$$A\quad \frac{2x^3}{3b} - \frac{5ax^2}{8b} + \frac{9a^2x}{48b} + \frac{32abx}{48b} - \frac{x}{4}a^2$$

$$B\quad \frac{2x^2}{2b} - \frac{3ax}{4b} + a$$

$$a\quad \frac{16x^3 - 30ax^2 + 9a^2x + 32abx - 12a^2b}{48b}$$

$$b\quad \frac{2x^2 - 3ax + 4ab}{4b}$$

$$a\quad \frac{16x^3 - 30ax^2 + 9a^2x + 32abx - 12a^2b}{48b}$$

$$b\quad \frac{24x^2 - 36ax + 48ab}{48b}$$

$$A\quad \frac{16x^3 - 30ax^2 + 9a^2x + 32abx - 12a^2b}{24x^2 - 36ax + 48ab}$$

$$B$$

à un même dénominateur commun ſans changer de valeur *, & l'on aura *a* pour le dividende, & *b* pour le diviſeur. Enfin * 270.

chaque terme de a & de b étant multiplié par la même grandeur $\frac{1}{4ff}$, il faut les diviſer tous par cette grandeur, ou, ce qui revient au même, les multiplier par $\frac{4ff}{1}$; ce qui ſe fait en effaçant ſimplement le diviſeur commun à a & b; & A ſera le dividende, & B le diviſeur, qui ſont l'un & l'autre ſans fractions.

Faiſant la diviſion de A par B, on trouvera le même quotient, que ſi l'on diviſoit immédiatement A par B. Car * 106. le * quotient de A par B doit être à l'unité comme A eſt à B. *75 & 109. Et il eſt évident * que A eſt à B, comme A eſt à B; ainſi le quotient de A diviſé par B, & celui de A diviſé par B ſont égaux; puiſqu'ils ont le même rapport à l'unité, leur rapport à l'unité étant * 106. & 111. le même que celui de A à B, ou celui de A à B.

7e REMARQUE.

Où l'on explique la maniere de faire le calcul des fractions par le calcul des expoſans des puiſſances.

DE'FINITION OU SUPPOSITION.

299. * 143. ON a déja dit * que toute grandeur repréſentée par une lettre pouvoit être regardée comme une puiſſance. Quand elle n'a qu'une dimenſion comme a, c'eſt la premiere puiſſance de a, dont l'expoſant eſt 1. Quand a eſt élevée à une puiſſance plus haute comme a^3, ſon expoſant 3 marque le degré de ſa puiſſance. Pour marquer en general toutes les puiſſances auſquelles a peut être élevée, on lui donne pour expoſant une lettre. a^n marque en general toutes les puiſſances auſquelles a peut être élevée; l'expoſant n repréſentant *145 & 146. tous les nombres 1, 2, 3, &c. On a auſſi vû * que quand une grandeur où la puiſſance d'une grandeur étoit au dénominateur d'une fraction, il n'y avoit qu'à l'ecrire au numerateur, en changeant le ſigne de l'expoſant de ſa puiſſance. Par exemple $\frac{a}{x} = ax^{-1}$. $\frac{1}{x} = x^{-1}$. $\frac{a^2}{b^2} = a^2b^{-2}$; $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$; $\frac{a^m}{x^n} = a^m x^{-n}$; $\frac{a^r + b^s}{ab + bc} = \overline{ac + b^2} \times \overline{ab + bc}^{-1}$; $\frac{a}{a^{-1}} = ax$, &c. D'où l'on voit la maniere de réduire les fractions aux expreſſions des grandeurs entieres, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$; $\frac{a+b}{c+d} = a+b \times \overline{c+d}^{-1}$; $\frac{\overline{a+b}^2}{\overline{c+d}^3} = \overline{a+b}^2 \times \overline{c+d}^{-3}$.

L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS

PAR LE CALCUL DES EXPOSANS.

300. LES fractions étant réduites aux expreſſions des grandeurs entieres; elles doivent être ajoutées les unes aux autres, & retranchées les unes des autres comme les grandeurs entieres.

Par exemple, la ſomme de $+ ay^{-1} - ab^{-1}$, & de $4ay^{-1} + 3ab^{-1}$, eſt $5ay^{-1} + 2ab^{-1}$.

La difference de $4ay^{-1} + 3ab^{-1}$, & de $+ ay^{-1} - ab^{-1}$, eſt $3ay^{-1} + 4ab^{-1}$.

LA MULTIPLICATION.

301. QUAND les fractions ſont exprimées par le moyen des expoſans, & réduites par là à l'expreſſion des grandeurs entieres, & qu'elles ſont incomplexes; pour les multiplier, on les joint enſemble, en obſervant * la regle des ſignes, par rapport aux ſignes qui les précedent; mais on ne change rien dans les ſignes des expoſans, & l'on ſuit * le calcul des expoſans quand une même lettre ſe trouve dans le multiplié & dans le multiplicateur; c'eſt à dire, on ajoute enſemble les expoſans de cette lettre; & la ſomme, ou la difference quand ils ſont oppoſez, eſt l'expoſant de cette lettre dans le produit. * 95. * 148.

Quand les grandeurs ſont complexes, on les multiplie en les joignant par le ſigne × de la multiplication; & on ne fait pas d'autre multiplication, quand l'expoſant de l'une des deux grandeurs complexes eſt négatif.

Par exemple, le produit de ab^{-1} par ac^{-1} eſt $a^2b^{-1}c^{-1}$; le produit de ax^{-1} par ax^{-1} eſt a^2x^{-2}; le produit de ax^1 par ax^{-1} eſt $a^2x^{+1-1} = a^2$; le produit de ax^m par ax^{-n} eſt a^2x^{m-n}. Mais le produit de $x^2 - ax$ par $\overline{x - a}^{-1}$ eſt $\overline{x^2 - ax} \times \overline{x - a}^{-1}$.

LA DIVISION.

302. POUR diviſer une fraction exprimée par le moyen des expoſans, par une autre exprimée auſſi par les expoſans; il faut changer les ſignes des expoſans des grandeurs du divi-

ſeur dans les grandeurs incomplexes, & le ſigne du ſeul expoſant du diviſeur conſideré comme une ſeule grandeur quand il eſt complexe, & enſuite multiplier le dividende par le diviſeur, & le produit ſera le quotient.

Par exemple, pour diviſer ab^{-1} par cd^{-1}, je change les ſignes des expoſans du diviſeur qui devient $c^{-1}\ d^{+1}$, & je multiplie ab^{-1} par $c^{-1}\ d^{1}$, & le produit $ab^{-1}\ c^{-1}\ d$, eſt le quotient.

Pour diviſer $a + b$ par $\overline{c - d}^{-1}$, je change le ſigne -1 de l'expoſant du diviſeur conſideré comme une ſeule grandeur, & je forme le produit $\overline{a + b} \times \overline{c - d}^{+1}$; c'eſt le quotient.

Pour diviſer $a^2\ x^{-3}$ par ax^{-1}, je change ax^{-1} en $a^{-1}\ x^{+1}$ & je prends le produit de $a^2\ x^{-3}$ par $a^{-1}\ x^{+1}$ qui eſt ax^{-2}. C'eſt le quotient que je cherchois.

Pour diviſer $a^n\ x^m$ par $a^{m-1}\ x^{-n+1}$, je change $a^{m-1}\ x^{-n+1}$ en $a^{-m+1}\ x^{+n-1}$, & je multiplie enſuite $a^n\ x^m$ par $a^{-m+1}\ x^{n-1}$, & le produit $a^{n-m+1}\ x^{m+n-1}$ eſt le quotient.

On remarquera que quand une grandeur n'a point d'expoſant, on ſous-entend qu'elle a pour expoſant l'unité poſitive; mais quand elle doit avoir pour expoſant l'unité négative, on doit toujours écrire l'unité négative pour ſon expoſant.

On remarquera auſſi que quand une fraction a ſes deux termes, ſi quelque lettre du dénominateur avoit un expoſant négatif, elle ſeroit cenſée être au numerateur *.

* 145.

Par exemple, dans $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d}$, $\frac{ax^m}{x^{-n}}$; c^{-1} & x^{-n} marquent que c^{-1} & x^{-n} appartiennent au numerateur. $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d} = \frac{ab^{-1}c}{d} = ab^{-1}\ cd^{-1}$, $\frac{ax^m}{x^{-n}} = ax^{m+n}$.

* 290. * 145. Car $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d} = \frac{a}{\frac{bd}{c}} = * \frac{ac}{bd} = * ab^{-1}\ cd^{-1}$. De même $\frac{ax^m}{x^{-n}} = \frac{ax^m}{\frac{1}{x^n}} = * ax^{m+n}$.

D'où l'on voit la raiſon de la regle qu'on à donnée pour la diviſion, qui n'eſt fondée que ſur ce que ces differentes expreſſions marquent une même choſe. Par exemple, $\frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{a}{\frac{bc}{d}} =$ * $\frac{ad}{bc} =$ * $ab^{-1}c^{-1}d$. * 290. * 145.

La formation des puiſſances des fractions.

PROBLÊME IV.

303. *ELEVER une fraction à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif.*

Regle ou operation. Il faut élever ſéparément le numerateur & le dénominateur * à la puiſſance marquée par l'expoſant; & la fraction, formée de ces deux puiſſances du même degré, ſera la puiſſance qu'on cherche. * 159 & 117.

EXEMPLES.

POUR élever $\frac{2}{3}$ à la troiſiéme puiſſance, il faut élever 2 à la troiſiéme puiſſance, & l'on aura 8; & enſuite élever 3 à la troiſiéme puiſſance, & l'on aura 27; il faut écrire $\frac{8}{27}$ pour la troiſiéme puiſſance de $\frac{2}{3}$.

Pour élever $\frac{a}{b}$ à la ſeconde puiſſance, à la troiſiéme, &c. il faut écrire $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, &c.

Si l'on veut élever $\frac{x-a}{y-c}$ à la ſeconde puiſſance; il faut élever $x - a$ & $y - c$ à la ſeconde puiſſance, & former la fraction $\frac{x^2-2ax+a^2}{y^2-2cy+c^2}$.

Quand on a des grandeurs complexes, dont quelques-uns des termes, ou même tous, ſont chacun une fraction, à élever à une puiſſance; il faut employer les operations des grandeurs entieres & le calcul des fractions; ce que l'on fera clairement concevoir par les exemples ſuivans.

Pour élever $x - \frac{1}{2}a$ à la ſeconde puiſſance, il faut multiplier $x - \frac{1}{2}a$ par $x - \frac{1}{2}a$; & l'on trouvera $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ pour le quarré que l'on cherchoit.

Pour élever $\frac{1}{2}y - \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}c$ à la troiſiéme puiſſance; on trouvera, en ſuivant les regles * de la formation des puiſſances, & en ſe ſervant auſſi du calcul des fractions, $\frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3 + \frac{9}{16}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c + \frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2 + \frac{27}{64}c^3$. * 172.

Ces exemples ſuffiſent pour faire concevoir clairement la formation des puiſſances des fractions, & des grandeurs complexes qui contiennent des fractions.

Démonſtration du Problême. La formation des puiſſances
* 159. d'une fraction $\frac{a}{b}$ * ſe doit faire par la multiplication de cette fraction par elle-même, réiterée autant de fois qu'il y a d'unitez moins une dans l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut l'élever; c'eſt à dire, il faut la multiplier une fois par elle-même pour avoir ſa ſeconde puiſſance, deux fois pour avoir la troiſiéme, trois fois pour avoir la quatriéme, & ainſi de ſuite. Mais pour multiplier une fraction $\frac{a}{b}$ par elle-
* 287. même, * il faut multiplier le premier terme par lui-même, & le ſecond terme par lui-même, & la fraction $\frac{a^2}{b^2}$ faite des produits, eſt le produit qu'on cherche. Pour multiplier ce produit $\frac{a^2}{b^2}$ par $\frac{a}{b}$; il faut de même multiplier a^2 par a, & b^2 par b, & $\frac{a^3}{b^3}$ ſera le produit qu'on cherche, & ainſi de ſuite. C'eſt auſſi ce que preſcrit le Problême : par conſéquent le Problême preſcrit ce qu'il faut faire pour élever une fraction à telle puiſſance qu'on voudra.

L'extraction des racines des puiſſances des fractions.

PROBLÊME V.

304. *TROUVER la racine d'une fraction, laquelle fraction eſt une puiſſance quelconque dont l'expoſant eſt un nombre entier; c'eſt à dire, trouver la racine d'une fraction qui eſt une ſeconde puiſſance, ou une troiſiéme, ou une quatriéme, &c.*

Regle ou operation. Il faut trouver, * par les regles de l'ex-
*191,200 & les ſuivans, juſqu'à 207 compris. traction des racines des grandeurs entieres, la racine du numerateur, & la racine du dénominateur de la fraction propoſée, & faire une fraction de ces deux racines; ce ſera la racine que l'on cherche.

Si le numerateur ou le dénominateur de la fraction propoſée ou tous les deux contenoient des termes qui fuſſent des fractions, il faudroit joindre aux regles de l'extraction des racines des grandeurs entieres le calcul des fractions, comme on le verra dans les exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver la racine quarrée de $\frac{15129}{207365}$, il faut chercher ſéparément les racines quarrées de 15129 & de 207365; & l'on trouvera 123 & 144. Il faut les écrire en fraction, & $\frac{123}{144}$ ſera la racine qu'on cherchoit.

AVERTISSEMENT.

IL eſt inutile de mettre ici d'autres exemples pour l'extraction des racines ſeconde, troiſiéme, quatriéme, &c. des fractions numeriques, n'y ayant pas d'autres difficultez, que celles qu'on trouve à extraire les racines des puiſſances des nombres entiers, qui ont été toutes expliquées dans le Livre précedent. Il faut ſeulement remarquer que quand on cherche la racine d'une fraction numerique, & que chacun de ſes deux termes n'eſt pas une puiſſance parfaite du même degré dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque n; il faut réduire la fraction propoſée aux moindres termes; & ſi chaque terme du moindre rapport eſt une puiſſance parfaite du même degré dont l'expoſant eſt n; on en trouvera la racine par le Problême. Si les deux termes du moindre rapport ne ſont pas chacun une puiſſance parfaite dont l'expoſant eſt n; on ne ſçauroit trouver la racine qu'on cherche que par approximation, comme on le fera voir après les exemples ſuivans.

EXEMPLE II.

POUR avoir la racine quarrée de $\frac{a^2}{b^2}$, la racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$, la racine quatriéme de $\frac{a^4}{b^4}$, la racine cinquiéme de $\frac{a^5}{b^5}$, & en general la racine n de $\frac{a^n}{b^n}$; il faut écrire $\frac{a}{b}$; c'eſt la racine qu'on cherche.

Pour avoir la racine deuxiéme de $\frac{a^6}{b^6}$, il faut écrire $\frac{a^3}{b^3}$. Pour avoir la racine troiſiéme de $\frac{a^{3n}}{b^{3n}}$, il faut écrire $\frac{a^n}{b^n}$. Pour avoir la racine n de $\frac{a^{3n}}{b^{3n}}$, il faut écrire $\frac{a^3}{b^3}$.

AVERTISSEMENT.

IL n'y a pas d'autres difficultez pour trouver les racines des fractions litterales dont les deux termes ſont chacun une grandeur entiere complexe, que celles qui ſe rencontrent dans la recherche des racines des puiſſances complexes entieres qui ont été expliquées dans le premier Livre *. La ſeule difficulté eſt quand une grandeur litterale complexe, dont on cherche la racine, contient des termes qui ſont des fractions. En voici quelques exemples pour faire voir la maniere de joindre le calcul des fractions aux regles de l'extraction des racines des grandeurs complexes.

* 207.

EXEMPLE III.

$$\begin{array}{lll} x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 & \Big(& x - \frac{1}{2}a \\ 0 \quad 0 \quad 0 & & + 2x - \frac{1}{2}a \end{array}$$

POUR trouver la racine quarrée de $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, 1°. Je dis la racine de x^2 eſt x, j'écris x à la racine, & j'écris 0 ſous x^2, pour marquer que je m'en ſuis ſervi.

2°. Pour continuer l'operation, & trouver la ſeconde partie de la racine, je regarde $- ax + \frac{1}{4}a^2$ comme un dividende; pour former le diviſeur, je prends le double * $2x$ de la partie de la racine déja découverte; & je diviſe $- ax$ par $2x$, en diſant le quotient de $- ax$ par $+ 2x$ eſt $- \frac{1}{2}a$. J'écris $- \frac{1}{2}a$ pour la ſeconde partie de la racine, & je l'écris encore au devant du diviſeur. Employant la multiplication des fractions, je multiplie $+ 2x - \frac{1}{2}a$ par $- \frac{1}{2}a$, & je retranche les produits $- ax + \frac{1}{4}a^2$ de la puiſſance propoſée; & comme il ne reſte rien, il s'enſuit que $x - \frac{1}{2}a$ eſt la racine exacte de la puiſſance propoſée.

* 207.

EXEMPLE

EXEMPLE IV.

A | *R*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3 \\ \quad\circ\quad\circ\quad\circ\quad\circ \\ \quad + \frac{9}{16}cy^2 - \frac{3}{2}acy + a^2c \\ \quad\quad\circ\quad\circ\quad\circ \\ \quad\quad + \frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2 \\ \quad\quad\quad\circ\quad\circ \\ \quad\quad\quad + \frac{27}{64}c^3 \\ \quad\quad\quad\quad\circ \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}c \\ \hline \frac{1}{2}y = a \text{ de la formule.} \\ + \frac{1}{4}y^2 \text{ diviſeur} = 3a^2 \text{ de la formule} \\ - \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}c = b \text{ de la formule.} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3 \\ + \frac{9}{16}cy^2 - \frac{3}{2}acy + a^2c \\ + \frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2 \\ + \frac{27}{64}c^3 \end{array}\right\} = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ de la formule.}$$

POUR trouver la racine cubique ou troiſiéme de la troiſiéme puiſſance *A*

$$\begin{array}{l} \frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{2}{3}a^2y - \frac{8}{27}a^3 \\ + \frac{9}{16}cy^2 - \frac{3}{2}acy + a^2c \\ + \frac{27}{32}c^2y - \frac{9}{8}ac^2 \\ + \frac{27}{64}c^3 \end{array}$$

dont les termes contiennent des fractions, je me ſers de la formule de la troiſiéme puiſſance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Et, 1°, ſuppoſant $+ \frac{1}{8}y^3$ repréſentée par a^3 de la formule; je dis la racine troiſiéme de $\frac{1}{8}$ eſt $\frac{1}{2}$, & la racine troiſiéme de y^3 eſt y. Ainſi j'écris $\frac{1}{2}y$ à la racine *R*, & je mets o ſous $\frac{1}{8}y^3$ dont je me ſuis déja ſervi.

2°. Suppoſant $\frac{1}{2}y = a$ de la formule, je prens $+ \frac{3}{4}y^2$ pour le diviſeur repréſenté par $3a^2$, & je diviſe $- \frac{1}{2}ay^2 + \frac{9}{16}cy^2$ par $+ \frac{3}{4}y^2$, en employant la diviſion des fractions, & j'écris à la racine *R* le quotient $- \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}c$, que je ſuppoſe repréſenté par b de la formule.

Je forme enſuite, par la multiplication des fractions, les

produits que preſcrit la formule $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & je trouve $- \frac{1}{2}ay^2 + \frac{9}{16}cy^2 + \frac{3}{8}a^2y - \frac{1}{2}acy + \frac{27}{32}c^2y - \frac{8}{27}a^3 + a^2c - \frac{9}{8}ac^2 + \frac{27}{64}c^3$; je les retranche de la puiſſance propoſée; & trouvant que le reſte eſt zero, c'eſt à dire qu'il n'y a aucun reſte, je vois par là que $\frac{1}{2}y - \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}c$ eſt la racine troiſiéme de la grandeur propoſée A.

THEORÊME.

305 *LORSQU'UN nombre entier, qu'on nommera* A, *eſt conſideré comme une puiſſance, c'eſt à dire comme étant un quarré ou une troiſiéme puiſſance, ou une quatriéme; & en general, comme une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque repréſenté par* n; *ſuppoſé qu'il ne ſoit pas une puiſſance parfaite; c'eſt à dire, qu'il n'y ait pas de nombre entier qui multiplié par lui-même (une fois, ſi* A *eſt quarré; deux fois, ſi* A *eſt une troiſiéme puiſſance; trois fois, ſi* A *eſt une quatriéme puiſſance; & en general, autant de fois moins une qu'il y a d'unitez dans le nombre entier* n *qui eſt l'expoſant de la puiſſance de* A,) *donne un produit égal à* A; *il ne peut y avoir aucune fraction numerique, qu'on repréſentera par* $\frac{a}{b}$, *qui ſoit la racine exacte du nombre entier* A; *c'eſt à dire, qui étant multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unitez dans* n, *donne un produit* $\frac{a^n}{b^n}$ *qui ſoit égal à* A.

Démonſtration. S'il y avoit une telle fraction $\frac{a}{b}$, on auroit par cette ſuppoſition $\frac{a^n}{b^n} = A$, c'eſt à dire égale à un nombre entier A; & cette fraction ſeroit une puiſſance parfaite, puiſque a & b ſont ſuppoſez chacun un nombre entier qui forment la fraction $\frac{a}{b}$. D'où il ſuivroit * que le nombre entier A ſeroit une puiſſance parfaite: ce qui détruit la ſuppoſition qu'on a faite que A n'eſt pas une puiſſance parfaite; Par conſequent il eſt impoſſible qu'il y ait une fraction numerique $\frac{a}{b}$ qui puiſſe être la racine d'un nombre entier A, lorſque ce nombre entier n'eſt pas une puiſſance parfaite. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 243.

THEORÊME II.

306. *SI une fraction numerique repréſentée par* $\frac{A}{B}$, *eſt un moindre rapport ; & ſi chacun de ſes termes* A *&* B *n'eſt pas une puiſſance parfaite ſeconde, ou troiſiéme, ou quatriéme ; ou en general une puiſſance parfaite qui ait pour expoſant un nombre entier quelconque* n ; *ou bien ſi la fraction* $\frac{A}{B}$ *n'étant pas un moindre rapport, le moindre rapport qui lui eſt égal qu'on ſuppoſera être* $\frac{a}{b}$, *n'a pas pour ſes termes* a *&* b *deux nombres qui ſoient chacun une puiſſance parfaite ſeconde ou troiſiéme, ou en general une puiſſance parfaite, qui ait pour expoſant un nombre entier quelconque* n ; *il ne peut pas y avoir une fraction numerique qu'on repréſentera par* $\frac{C}{D}$ *qui ſoit la racine de la fraction propoſée* $\frac{A}{B}$; *c'eſt à dire, qui étant multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unitez dans* n *donne un produit* $\frac{C^n}{D^n}$ *qui ſoit égal à* $\frac{A}{B}$.

Démonſtration. S'il y avoit une telle fraction $\frac{c}{D}$, laquelle, ſi elle n'eſt pas elle-même un moindre rapport, ait pour ſon moindre rapport $\frac{c}{d}$, (& ſi elle eſt un moindre rapport, ce qu'on va dire de $\frac{c}{d}$ conviendra à $\frac{c}{D}$) on auroit par cette ſuppoſition $\frac{c^n}{d^n} = * \frac{C^n}{D^n} = \frac{A}{B}$; & ſi $\frac{A}{B}$ n'eſt pas un moindre * 242.
rapport, & que le moindre rapport égal à $\frac{A}{B}$ ſoit $\frac{a}{b}$, l'on auroit $\frac{c^n}{d^n} = \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Mais $\frac{c^n}{d^n}$ * eſt un moindre rapport, & * 241.
c^n & d^n ſont chacun une puiſſance parfaite ; puiſque c & d ſont ſuppoſez être deux nombres entiers dont eſt formée la fraction $\frac{c}{d}$: & $\frac{a}{b}$ étant auſſi ſuppoſé un moindre rapport ; il faut que les rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{c^n}{d^n}$ ne ſoient pas ſeulement égaux ; mais que ce ſoit préciſément le même rapport, & que $a = c^n$, & $b = d^n$. D'où il ſuivra que a & b ſont chacun une puiſſance parfaite du même degré dont n eſt l'expoſant :

cela détruit la ſuppoſition qu'on a faite que a & b n'étoient pas une puiſſance parfaite. Il ne peut donc pas y avoir une fraction numerique $\frac{c}{D}$ qui ſoit la racine de la fraction propoſée $\frac{A}{B}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

307. ON déduit du premier Theorême qu'on ne ſçauroit trouver de fraction numerique qui ſoit la racine exacte d'un nombre entier, qui eſt une puiſſance numerique imparfaite.

COROLLAIRE II.

308. ON déduit de même du ſecond Theorême que quand les deux termes d'une fraction numerique réduite aux moindres termes ne ſont pas chacun une puiſſance numerique parfaite d'un même degré, on ne ſçauroit trouver de fraction numerique qui ſoit la racine exacte de cette premiere fraction.

COROLLAIRE III.

Où l'on démontre les incommenſurables.

309. NOMMANT a tout nombre entier qui eſt une puiſſance numerique imparfaite, dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque n, & ſa racine veritable, qui ne ſçauroit être exprimée par une fraction numerique, étant nommée $\sqrt[n]{a}$. Nommant auſſi $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ la racine veritable de toute fraction numerique $\frac{a}{b}$ réduite à ſes moindres termes, chacun deſquels n'eſt pas une puiſſance parfaite de même degré dont l'expoſant ſoit un nombre entier quelconque n. Je dis que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne peuvent chacune avoir aucune aliquote commune, ni avec l'unité, dont ſont formez les nombres a & la fraction $\frac{a}{b}$, ni avec aucun nombre ſoit entier ſoit rompu formé de cette unité. Ainſi $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ſont chacune *une grandeur incommenſurable*, avec cette unité & avec tout nombre ſoit entier ſoit rompu formé de cette unité.

Démonſtration. Si $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ avoient chacune une aliquote commune avec l'unité; on pourroit former une fraction dont le dénominateur ſeroit le nombre, qu'on nommera m, qui exprimeroit combien de fois cette aliquote eſt contenue dans l'unité, & le numerateur ſeroit le nombre, qu'on nommera l, qui exprimeroit combien de fois cette aliquote ſeroit contenue dans la grandeur $\sqrt[n]{a}$, ou dans $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Et $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ſeroit égale à cette fraction $\frac{l}{m}$ de l'unité. Ainſi un nombre entier qui eſt une puiſſance imparfaite, comme auſſi une fraction numerique, qui étant réduite aux moindres termes, eſt une puiſſance imparfaite, auroit pour ſa racine une fraction numerique de l'unité. On a demontré * que cela étoit impoſſible. Donc $\sqrt[n]{a}$, & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne ſçauroient chacune avoir une aliquote commune avec l'unité. * 307 & 308.

$\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne ſçauroient non plus chacune avoir une aliquote commune avec aucun nombre, ſoit entier, ſoit rompu, formé de l'unité; car tous les nombres poſſibles formez de l'unité peuvent * ſe réduire à des fractions ſimples de l'unité. Ainſi il ſuffit de démontrer que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne ſçauroient avoir d'aliquote commune avec une fraction ſimple de l'unité, pour faire voir qu'elles ne ſçauroient avoir d'aliquote commune avec tout nombre poſſible formé de l'unité: c'eſt ce qu'on va démontrer. * 285.

Si $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ pouvoient chacune avoir une aliquote commune avec une fraction de l'unité, on pourroit former une fraction égale à $\sqrt[n]{a}$ ou à $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, laquelle auroit pour dénominateur un nombre qu'on nommera p, qui marqueroit combien de fois cette aliquote eſt dans la fraction de l'unité, & pour numerateur un nombre q, qui exprimeroit combien de fois cette aliquote eſt dans $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$: & l'on auroit par

conſéquent $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ égale à $\frac{q}{p}$; & $\frac{q}{p}$ ſeroit une fraction de
*283. fraction de l'unité, qui étant * réduite à une fraction ſimple de l'unité qu'on nommera $\frac{r}{t}$, ſeroit égale à $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

On déduit donc neceſſairement de la ſuppoſition que $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ euſſent chacune une aliquote commune avec quelque nombre poſſible que ce fût formé de l'unité, que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ſeroient chacune une fraction de l'unité. Mais on a démon-
*307. tré * que cela étoit impoſſible. Par conſequent $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
& 308. ne ſçauroient avoir aucune aliquote commune avec l'unité, ni avec aucun nombre formé de l'unité. Donc $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ſont chacune incommenſurable avec l'unité & avec tout nombre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AVERTISSEMENT.

LA Geometrie démontre que ces racines des puiſſances numeriques imparfaites peuvent s'exprimer exactement par des lignes.

REMARQUE.

*199. ON a donné dans le premier Livre * la methode d'approcher tant près qu'on voudra de la racine veritable d'une puiſſance numerique imparfaite, laquelle racine veritable ne
*309. ſçauroit * s'exprimer exactement par aucune fraction ; & on s'eſt ſervi pour faire cette approximation du calcul des par-
*122. ties décimales qui ſont * de veritables fractions, quoique leur calcul ſoit le même que celui des nombres entiers. On pourroit encore, quand on a trouvé la racine en entiers de la plus grande puiſſance parfaite entiere qui eſt contenue dans la puiſſance imparfaite dont on cherche la racine ; on pourroit, dis-je, continuer l'extraction de la racine ſur le reſte par le calcul des fractions, & l'on trouveroit une ſuite de fractions, qui jointe à la partie de la racine déja découverte ſeroit la racine approchée que l'on cherche ; mais le calcul eſt embarraſſant, & l'approximation des racines eſt bien plus

aiſée par le calcul des parties décimales qu'on a expliqué dans le premier livre. * Enfin il y a d'autres methodes d'approcher à l'infini des racines des puiſſances numeriques imparfaites qui ſuppoſent les regles de l'Analyſe. On a donné deux de ces methodes *dans l'Analyſe démontrée, Livre VI. Section III. depuis l'article 167 juſqu'à la fin de la Section.* * 199.

On va donner ici la methode d'approcher tant prés qu'on voudra de la racine d'une fraction numerique qui eſt une puiſſance imparfaite, en y employant le calcul des parties décimales à peu près comme dans *le premier Livre, art.* 199. afin d'accoutumer les Commençans à une même methode.

Methode d'approximation des racines des fractions numeriques.

310. POUR approcher tant près qu'on voudra à l'infini de la racine d'une fraction qu'on conçoit être une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque n, & dont chaque terme n'eſt qu'une puiſſance imparfaite du degré n : 1°. Il faut réduire * la fraction propoſée à une grandeur décimale, donnant à cette grandeur décimale tant de rangs de parties décimales qu'on voudra, pourvu qu'on puiſſe les partager en tranches chacune d'autant de rangs qu'il y à d'unitez dans n. 2°. Regardant cette grandeur décimale comme une puiſſance dont l'expoſant eſt n, il faut en extraire la racine comme dans le premier Livre *. La racine qu'on trouvera ſera la racine approchée que l'on cherchoit. * 276. * 191.

EXEMPLE I.

POUR trouver par approximation la racine de $\frac{5}{8}$ conſiderée comme une ſeconde puiſſance, 1°. * Je la réduis à la grandeur décimale 0.625 qui lui eſt égale; & comme pour faire cette réduction j'ai ajouté trois zeros au numerateur 5, & que la diviſion de 5.000 par le dénominateur 8 m'a donné le quotient exact 0.625. J'ajoute à cette grandeur décimale tant de zeros que je veux, obſervant ſeulement que je puiſſe partager les rangs des parties décimales en tranches chacune de deux rangs, parceque j'en cherche la racine quarrée, & que l'expoſant n repréſente 2 dans l'extraction de la racine quarrée ou deuxiéme. * 276.

Je prens donc pour la fraction propoſée la grandeur déci-

male 0., 62, 50, 00, 00, qui eſt équivalente à la propoſée $\frac{5}{8}$.

2°. Je trouve la racine quarrée 0.7905 de la puiſſance 0.62500000 équivalente à $\frac{5}{8}$. Cette racine eſt approchée juſqu'aux dix milliémes; c'eſt à dire, elle differe moins d'une dix milliéme de la racine veritable qu'on ne ſçauroit exprimer exactement par une fraction. Ainſi c'eſt la racine approchée de la fraction propoſée $\frac{5}{8}$.

En continuant l'approximation juſqu'aux cent-milliémes, c'eſt à dire juſqu'au cinquiéme rang des décimales dans la racine approchée, je trouve *6* pour le cinquiéme rang qui vaut ſix cens-milliémes, qui ſurpaſſe la moitié d'une dix milliéme, c'eſt pourquoi ſi je me borne au quatriéme rang, qui eſt celui des dix-milliémes, j'ajoute, ſi je veux, une unité au quatriéme rang, afin que l'erreur ſoit moindre, & la racine approchée que je cherchois eſt 0.7906.

EXEMPLE II.

POUR faire l'approximation de la racine quarrée de $3\frac{9}{42} = \frac{135}{42}$; 1°. Je * réduis $\frac{135}{42}$ à la grandeur décimale 3.214285714 2. Et comme il arrive que quoique j'ajoute beaucoup de zeros au numerateur, la diviſion de ce numerateur par 42 n'eſt pas exacte; je continue la diviſion juſqu'à ce que j'aye un quotient qui ait un nombre arbitraire de rangs de décimales, que je puiſſe pourtant partager en tranches chacune de deux rangs. Je me borne, ſi je veux, à cinq tranches chacune de deux rangs, qui me donneront une racine approchée qui aura cinq rangs de décimales, & la racine approchée ne differera pas d'une cent-milliéme partie de l'unité de la veritable qu'on ne ſçauroit exprimer par une fraction.

*276.

Le quotient de la diviſion que j'ai employée pour réduire $\frac{135}{42}$ en grandeur décimale n'étant pas exact, la grandeur décimale 3.214 &c. n'eſt pas exactement équivalente à $\frac{135}{42}$. Mais la difference n'étant pas $\frac{1}{10000000000}$ de l'unité, on peut la regarder comme étant équivalente ſans erreur ſenſible à $\frac{135}{42}$.

2°. Je trouve * la racine deuxiéme 1.79284 de la puiſſance décimale 3.214285714 2 qui eſt équivalente à $\frac{135}{42}$. Cette racine eſt approchée juſqu'au cinquiéme rang de décimales, c'eſt

*191.

c'eſt à dire juſqu'aux cent milliémes. C'eſt la racine approchée que je cherchois.

AVERTISSEMENT.

CES exemples ſuffiſent pour faire concevoir clairement la methode d'approximation des racines des fractions numeriques. Les Commençans peuvent l'appliquer à trouver les racines 3es, & 4es, &c. des fractions.

Démonſtration. Il eſt évident que la methode fait découvrir la racine approchée tant près qu'on voudra de la veritable racine d'une grandeur décimale équivalente, ſans erreur ſenſible, à la fraction propoſée; par conſequent elle fait trouver la racine approchée que l'on cherchoit.

Methode d'approximation des racines des grandeurs litterales complexes, quand ces grandeurs ſont des puiſſances imparfaites.

311. POUR approcher à l'infini de la racine d'une grandeur litterale complexe qui eſt une puiſſance imparfaite, il n'y a qu'à ſuivre les regles de l'extraction des racines des grandeurs litterales complexes, qui ſont des puiſſances parfaites, en employant le calcul des fractions tout comme l'on a fait dans le 3e & le 4e Exemple du 5e Problême: * il n'y a de difference qu'en ce que les puiſſances du 3e & 4e Exemple du 5e Problême étant parfaites, l'on a fait l'extraction des racines ſans aucun reſte; & dans les puiſſances imparfaites, il ſe trouve toujours un reſte, & l'on peut continuer l'operation, ou l'approximation à l'infini: ce qu'on concevra clairement par les Exemples ſuivans. * 304.

EXEMPLE I.

Puiſſance imparfaite.

$r^2 - x^2$

(0 2)

1. reſte. $-\frac{1}{4r^2}x^4$

(0)

2. reſte. $-\frac{1}{8r^4}x^6 - \frac{1}{64r^6}x^{12}$

(0 0)

3. reſte. $-\frac{5}{64r^6}x^8 - \frac{1}{8r^8}x^{10} - \frac{1}{256r^{10}}x^{12}$

Racine approchée:

$$\left(\begin{array}{l} r - \frac{1}{2r}x^2 - \frac{1}{8r^3}x^4 - \frac{1}{16r^5}x^6 - \&c. \\ \hline +2r - \frac{1}{2r}x^2 \text{ diviſeurs.} \\ +2r - \frac{1}{r}x^2 - \frac{1}{8r^3}x^4 \\ \quad 2r - \frac{1}{r}x^2 - \frac{1}{4r^3}x^4 - \frac{1}{16r^5}x^6 \end{array}\right.$$

Pour faire l'approximation de la racine quarrée de $r^2 - x^2$, 1°. Je dis la racine quarrée de r^2 eſt r, j'écris r pour la premiere partie de la racine.

2°. Pour trouver la ſeconde partie de la racine, je forme le diviſeur $2r$, en prenant le double de la partie r de la racine déja découverte, & je diviſe $-x^2$ par $+2r$, & je trouve le quotient $-\frac{1}{2r}x^2$ que j'écris à la racine, & encore devant le diviſeur $+2r$; puis je multiplie $+2r-\frac{1}{2r}x^2$ par $-\frac{1}{2r}x^2$; & j'ôte les produits $-x^2+\frac{1}{4r^2}x^4$ de la puiſſance propoſée, & je trouve le reſte $-\frac{1}{4r^2}x^4$.

3°. Pour continuer l'operation ſur ce reſte, & trouver la troiſiéme partie de la racine, je double la ſomme des deux parties de la racine, & j'ai pour nouveau diviſeur $+2r-\frac{1}{r}x^2$. Je diviſe le reſte $-\frac{1}{4r^2}x^4$ par ce diviſeur, & je trouve le quotient $-\frac{1}{8r^3}x^4$ que j'écris à la racine, & encore au devant du diviſeur. Je multiplie $+2r-\frac{1}{r}x^2-\frac{1}{8r^3}x^4$ par $-\frac{1}{8r^3}x^4$, & j'ôte les produits $-\frac{1}{4r^2}x^4+\frac{1}{8r^4}x^6+\frac{1}{64r^6}x^8$ du premier reſte, & je trouve le ſecond reſte $-\frac{1}{8r^4}x^6-\frac{1}{64r^6}x^8$.

4°. Pour continuer l'operation ſur ce reſte, je double les parties de la racine déja découvertes, & cela me donne le diviſeur $+2r-\frac{1}{r}x^2-\frac{1}{4r^3}x^4$. Je diviſe le ſecond reſte par ce diviſeur, en diſant le quotient de $-\frac{1}{8r^4}x^6$ diviſé par $+2r$ eſt $-\frac{1}{16r^5}x^6$; que j'écris à la racine & au diviſeur; je multiplie $+2r-\frac{1}{r}x^2-\frac{1}{4r^3}x^4-\frac{1}{16r^5}x^6$ par ce quotient $-\frac{1}{16r^5}x^6$; j'ôte le produit $-\frac{1}{8r^4}x^6+\frac{1}{16r^6}x^8+\frac{1}{64r^8}x^{10}+\frac{1}{256r^{10}}x^{12}$ du ſecond reſte, & je trouve un troiſiéme reſte $-\frac{5}{64r^6}x^8-\frac{1}{64r^8}x^{10}-\frac{1}{256r^{10}}x^{12}$.

Je pourrois continuer l'approximation ſur ce troiſiéme reſte; mais les operations précedentes ſuffiſent pour apprendre aux Commençans à la continuer eux-mêmes tant qu'ils voudront, & à faire eux-mêmes l'approximation de la racine quarrée des grandeurs litterales complexes qui ſont des quarrez imparfaits.

EXEMPLE II.

Puiſſance 3e imparfaite.

$1 - x^2$

o o

1. reſte. $-\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{27}x^6$

o o

2. reſte. $-\frac{5}{27}x^6 * + \frac{1}{81}x^{10} + \frac{1}{729}x^{12}$

Racine 3e approchée.

$1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \text{\&c.}$

$1 = a$

$3 = 3a^2$

$-\frac{1}{3}x^2 = b$

$-x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{27}x^6 = +3a^2b + 3ab^2 +$

$1 - \frac{1}{3}x^2 = a$

$3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 = 3a^2$

$-\frac{1}{9}x^4 = b$

$-\frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^6 * - \frac{1}{81}x^{10} - \frac{1}{729}x^{12} = 3a^2b + 3ab^2 +$

POUR trouver la racine cubique ou 3e de $1 - x^2$, j'employe la formule de la 3e puiſſance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; & 1°, je prens la racine 3e de 1 (repréſenté par a^3 de la formule) dans la puiſſance imparfaite $1 - x^2$; cette racine repréſentée par a de la formule eſt 1. J'écris 1 à la racine, & je mets o ſous 1 dans la puiſſance propoſée $1 - x^2$, pour marquer que je m'en ſuis ſervi.

2°. Pour trouver la ſeconde partie de la racine repréſentée par b de la formule, je ſuppoſe $1 = a$ de la formule. Je forme le diviſeur + 3 repréſenté par $3a^2$ de la formule: je diviſe $-x^2$ par + 3, & j'écris le quotient $-\frac{1}{3}x^2$ à la racine. Je ſuppoſe $-\frac{1}{3}x^2 = b$ de la formule, & je forme les produits repréſentez par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & je trouve $-x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{27}x^6 = +3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Je les retranche de $-x^2$, qui eſt le ſeul terme qui reſte de $1 - x^2$ après la 1re operation, & je trouve le 1er reſte $-\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{27}x^6$.

3°. Pour trouver la 3e partie de la racine, je continue l'operation ſur le 1er reſte. Je ſuppoſe $1 - \frac{1}{3}x^2 = a$ de la formule. Je forme le diviſeur que preſcrit $+3a^2$, & je trouve $+3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 = +3a^2$. Je diviſe le 1er reſte par ce diviſeur, en diſant le quotient de $-\frac{2}{3}x^4$ diviſé par + 3, eſt $-\frac{2}{9}x^4$. J'écris ce quotient à la racine, & je ſuppoſe $-\frac{2}{9}x^4 = b$ de la formule.

Je forme les produits repréſentez par la formule $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & je trouve $- \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^6 * - \frac{1}{81}x^{10} - \frac{1}{729}x^{12} = + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Je retranche ces produits du 1er reſte, & je trouve le ſecond reſte $- \frac{5}{27}x^6 * + \frac{1}{81}x^{10} + \frac{1}{729}x^{12}$.

Si je voulois continuer l'approximation, il faudroit continuer l'operation ſur ce ſecond reſte ; mais les operations précedentes ſuffiſent pour apprendre la maniere de faire l'approximation.

La methode d'approximation eſt une ſuite évidente de la methode de l'extraction des racines qu'on a démontrée ; & il eſt clair que ſi après avoir trouvé tant de termes qu'on voudra de la racine approchée, on multiplie leur ſomme par elle-même une fois ſi c'eſt la racine 2e, deux fois ſi c'eſt la 3e, &c. & qu'on ajoute au produit le dernier reſte qu'on a trouvé ; il eſt, dis-je, évident qu'on retrouvera la puiſſance imparfaite propoſée.

AVERTISSEMENT.

DANS le ſecond exemple on a pris 1 pour le premier terme de $1 - x^2$, au lieu d'une grandeur litterale homogene à $- x^2$, comme r^2 ; parceque ſi l'on avoit pris, par exemple r^2, ſa racine cubique auroit été la grandeur incommenſurable $\sqrt[3]{r^2}$, ou $r^{\frac{2}{3}}$, qui auroit embaraſſé les Commençans juſqu'à ce qu'on leur ait expliqué le calcul des incommenſurables. Mais quand ils l'auront appris, ils ne trouveront aucune difficulté à faire l'approximation des racines de toute ſorte de grandeurs.

* 294 & 295. * 311. *Remarques ſur* les ſuites infinies *que l'on trouve par la diviſion* *, *& par* * *l'extraction des racines des puiſſances imparfaites, leſquelles* ſuites *ſont* les valeurs approchées *des quotiens ou des racines.*

F.

ON peut trouver, tant par la diviſion que l'on a expliquée dans l'*art.* 294, que par l'extraction des racines que l'on a expliquée dans l'*art.* 311, pluſieurs *ſuites* dont les expreſſions ſeront toutes differentes ; & cependant chacune de ces

ſuites ſera la valeur approchée du quotient, ou de la racine dont on cherche la valeur. Voici comment on les trouve.

En diviſant a par $a + x$ dans l'*art.* 294; on a pris dans le diviſeur $a + x$, la grandeur a pour le premier terme du diviſeur, & x pour le ſecond terme; & l'on a trouvé la *ſuite* marquée dans l'*art.* 294. On pourroit auſſi prendre la grandeur x pour le premier terme du diviſeur $x + a$; & faiſant la diviſion, on trouveroit une autre expreſſion de la *ſuite* infinie qui eſt la valeur approchée du quotient de a diviſé par $x + a$. Et ſi le diviſeur avoit plus de deux termes, on pourroit prendre ſucceſſivement les termes du diviſeur l'un après l'autre, pour le premier terme du diviſeur; & les diviſions que l'on feroit dans chacun de ces changemens du premier terme du diviſeur, donneroient chacune une *ſuite* dont l'expreſſion ſeroit differente de l'expreſſion de la *ſuite* que feroit trouver chaque autre diviſion.

De même dans l'extraction des racines, par exemple, dans l'extraction de la racine quarrée de $r^2 + x^2$, on peut prendre r^2 pour le premier terme de la puiſſance 2^e $r^2 + x^2$, & x^2 pour le ſecond terme; & l'on trouvera par la methode expliquée dans l'*art.* 311, une *ſuite* infinie qui ſera la valeur approchée de la racine quarrée de $r^2 + x^2$. On peut auſſi prendre x^2 pour le premier terme de la puiſſance 2^e $x^2 + r^2$, & commencer l'extraction de la racine quarrée par ce premier terme x^2; & l'on trouvera une autre *ſuite* differente de la premiere, pour la valeur approchée de la racine quarrée de $x^2 + r^2$.

2.

Toutes les *ſuites* que l'on trouve pour la valeur, ſoit d'un même quotient, ſoit d'une même racine, étant conçues chacune comme contenant le nombre infini de termes qui lui convient, ſont chacune la veritable valeur de ce même quotient, ou de cette même racine, comme le démontre l'operation par laquelle chacune de ces *ſuites* ſe découvre. Ainſi toutes les *ſuites* qui ſont la valeur d'un même quotient, ou d'une même racine, regardées comme ayant tous leurs termes à l'infini, ſont égales entr'elles.

Mais on ne peut pas trouver ce nombre infini de termes de chaque *ſuite*. On n'en peut trouver qu'un nombre déterminé de termes ; & ce nombre fini de termes d'une *ſuite* n'eſt qu'une valeur approchée du quotient, ou de la racine : & afin que cette valeur approchée ſoit d'uſage dans la réſolution des Problêmes, il faut que ſa difference d'avec la vraye valeur ſoit inſenſible, & qu'on puiſſe dans la pratique négliger cette difference ſans erreur ſenſible.

C'eſt pourquoi parmi les *ſuites* differentes, qu'on pourroit trouver pour la valeur approchée d'une même grandeur; il faut choiſir celle qui a beſoin du moindre nombre de termes qui ſe puiſſe, afin que ſa difference d'avec la vraie valeur ſoit inſenſible. Or il eſt évident que les termes de la *ſuite* étant des fractions diſtinguées par les puiſſances d'une lettre ou d'une grandeur, comme dans l'*art.* 294, plus la grandeur qui diſtingue les termes au numerateur ſera petite, par rapport à la grandeur qui eſt au dénominateur, & plus les fractions qui compoſent les termes de la *ſuite* ſeront petites ; car plus une fraction eſt petite, & plus ſes puiſſances vont en diminuant. D'où l'on voit qu'il faut choiſir parmi les differentes *ſuites*, qu'on pourroit trouver pour les valeurs approchées d'une même grandeur, celle dont les termes vont le plus en diminuant, celle où on arrive, après un petit nombre de termes, à des grandeurs ſi petites qu'on peut les négliger toutes ſans erreur ſenſible. Dans l'exemple de l'*art.* 294, ſi a ſurpaſſe x, il faut prendre a pour le 1er terme du diviſeur $a + x$; afin que x & les puiſſances de x ſe trouvent dans les numerateurs, & les puiſſances de a dans les dénominateurs des termes. Si a eſt moindre ; que x ; il faudra prendre x pour le premier terme du diviſeur $x + a$; afin que a & les puiſſances de a ſe trouvent dans les numerateurs des termes de la *ſuite*, & les puiſſances de x dans les dénominateurs. On doit ſuivre la même regle dans le choix des *ſuites* que l'on trouve par l'extraction des racines de l'*art.* 311.

On peut même préparer la grandeur qu'on doit réduire en *ſuite*, afin que les termes de la *ſuite* aillent en diminuant conſiderablement de l'un à l'autre. Mais comme le principal uſage de ces *ſuites* eſt dans l'Analyſe, on a mis la maniere de faire ces préparations dans l'*Analyſe démontrée*, *art.* 180, & *art.* 743.

3.

Ces *ſuites* qui ſont les valeurs approchées des grandeurs qu'on cherche en pluſieurs Problêmes des Mathematiques, leſquelles ne different pas ſenſiblement des veritables valeurs qu'on ne peut pas avoir dans la derniere exactitude, ſont devenues de notre temps de grand uſage. On fait ſur ces *ſuites* les mêmes calculs que ſur les grandeurs complexes d'un nombre déterminé de termes. On les ajoute les unes aux autres; on les retranche les unes des autres; on les multiplie, & on les diviſe les unes par les autres; on les éleve à toutes les puiſſances, & on en extrait les racines. Leur addition, leur ſouſtraction & leur multiplication n'ont pas d'autres difficultez que celles qui ſe trouvent dans les operations ſemblables ſur les grandeurs complexes où il faut mêler le calcul des grandeurs entieres avec celui des fractions, qui ont été expliquées.

La formation des puiſſances des *ſuites* & l'extraction de leurs racines ſe font de la même maniere que les ſemblables operations ſur les grandeurs complexes, que l'on a expliquées dans les *art.* 303 & 311. Et l'on enſeignera dans le *troiſiéme Livre de cet Ouvrage* la maniere de trouver la formule generale qui eſt dans l'*Analyſe démontrée*, *page* 410, qui ſert à la formation de toutes les puiſſances poſſibles des *ſuites*, & à l'extraction de leurs racines, par de ſimples ſubſtitutions.

La diviſion des *ſuites* les unes par les autres, ſe fait auſſi de la même maniere que la diviſion des grandeurs complexes, où il faut mêler le calcul des grandeurs entieres & celui des fractions, comme dans les *articles* 296, 297. Mais comme les Commençans pourroient trouver de la difficulté à ſe ſervir d'un dividende & d'un diviſeur qui ont chacun une infinité de termes; on en va mettre ici un exemple.

Suppoſé qu'il faille trouver la *ſuite* infinie qui eſt la valeur de $\frac{\sqrt[3]{1+ay^2}}{\sqrt[3]{1-by^2}}$.

Il y a trois operations à faire pour découvrir la *ſuite* qu'on cherche.

1°. Il faut par l'*art.* 311. réduire $\sqrt[3]{1+ay^2}$ en la *ſuite* qui en

eſt la valeur; & l'on trouvera $\sqrt[3]{1+ay^2} = 1 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{16}a^3y^6 - \frac{5}{128}a^4y^8$, &c. qu'on nommera *A*.

2°. Il faut par la même methode chercher la *ſuite* qui eſt la valeur de $\sqrt[3]{1-by^2}$, & l'on trouvera $\sqrt[3]{1-by^2} = 1 - \frac{1}{2}by^2 - \frac{1}{8}b^2y^4 - \frac{1}{16}b^3y^6 - \frac{5}{128}b^4y^8$, &c. qu'on nommera *B*.

3°. Il faut diviſer la 1re de ces *ſuites* par la 2e, & c'eſt l'exemple de la diviſion que l'on va mettre ici.

Exemple de la diviſion d'une ſuite *infinie, par une autre* ſuite *infinie.*

Dividende.

A

$+\frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{16}a^3y^6 - \frac{5}{128}a^4y^8$ &c.

$+\frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{8}b^2y^4 + \frac{1}{16}b^3y^6 + \frac{5}{128}b^4y^8$

$+\frac{1}{4}aby^4 + \frac{1}{16}ab^2y^6 + \frac{1}{32}ab^3y^8$

$+\frac{1}{4}b^2y^4 + \frac{1}{16}b^3y^6 + \frac{1}{32}b^4y^8$

$-\frac{1}{16}a^2by^6 - \frac{1}{64}a^2b^2y^8$

$+\frac{1}{8}ab^2y^6 + \frac{1}{32}ab^3y^8$

$+\frac{1}{16}b^3y^6 + \frac{1}{64}b^4y^8$

$+\frac{1}{32}a^3by^8$

$-\frac{1}{32}a^2b^2y^8$

$+\frac{1}{32}ab^3y^8$

$+\frac{5}{32}b^4y^8$

Diviſeur.

B

$1 - \frac{1}{2}by^2 - \frac{1}{8}b^2y^4 - \frac{1}{16}b^3y^6 - \frac{5}{128}b^4y^8$ &c.

Quotient.

C

$1 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{16}a^3y^6 - \frac{5}{128}a^4y^8$ &c.

$+\frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{4}aby^4 - \frac{1}{16}a^2by^6 + \frac{1}{32}a^3by^8$

$+\frac{1}{8}b^2y^4 + \frac{1}{16}ab^2y^6 - \frac{1}{64}a^2b^2y^8$

$+\frac{5}{16}b^3y^6 + \frac{5}{32}ab^3y^8$

$+\frac{15}{128}b^4y^8$

Pour diviſer la *ſuite A* par la *ſuite B*, 1°. Il faut ordonner l'une & l'autre *ſuite*, par rapport à une même lettre, qui eſt ici

ici y. Mais dans la diviſion des grandeurs complexes qui n'ont qu'un nombre déterminé de termes, le premier terme contient la plus haute puiſſance de la lettre qui diſtingue les termes, & les autres termes contiennent les puiſſances ſuivantes qui vont en diminuant : au contraire dans les *ſuites* infinies les puiſſances de la lettre qui diſtingue les termes vont en augmentant à l'infini ; & le 1er terme eſt celui dans lequel la lettre qui diſtingue les termes ne ſe trouve point, comme dans notre exemple ; ou bien, quand elle eſt dans tous les termes, le 1er terme eſt celui où la puiſſance de la lettre qui diſtingue les termes eſt au plus bas degré ; les termes ſuivans ſont diſtinguez par ordre par les puiſſances de la lettre qui diſtingue les termes à meſure que ces puiſſances augmentent ; & toutes les grandeurs incomplexes qui contiennent la même puiſſance de cette lettre, ne ſont qu'un même terme, & on les écrit les unes ſous les autres, comme on le verra dans le quotient C : les *ſuites* A & B ſont ici ordonnées par rapport à y.

2°. Comme on ne peut pas entreprendre la recherche d'un quotient d'une infinité de termes, on ſe borne au nombre de termes qu'on juge devoir contenir une valeur aſſez approchée du veritable quotient : nous nous bornerons ici à cinq termes ; & il eſt clair que cela détermine le nombre des termes du dividende A & du diviſeur B dont on doit ſe ſervir. Dans notre exemple les termes du dividende & du diviſeur où eſt y^5 doivent être les derniers de ceux dont on doit ſe ſervir ; & on verra même qu'à meſure qu'on avance dans la diviſion, il y a des termes dans le diviſeur qui deviennent inutiles à la diviſion qu'on fait actuellement.

Tout ce que la diviſion des *ſuites* les unes par les autres contient de particulier, qui pourroit embarraſſer les Commençans, eſt contenu dans ces deux premiers articles, la diviſion ſe fait enſuite de la même maniere que la diviſion des grandeurs complexes, où il faut employer le calcul des grandeurs entieres & celui des fractions, comme dans les *articles 294 & les ſuivans*.

3°. Je diviſe donc le premier terme 1 du dividende A par le premier terme 1 du diviſeur B, & j'écris le quotient 1. J'écris 0 ſous 1 du dividende pour marquer qu'il ne doit plus ſervir. Je multiplie enſuite les termes du diviſeur B qui ſui-

vent 1, juſqu'à celui qui contient y^8, par le quotient 1, & je retranche du dividende les produits que je trouve par cette multiplication, ce qui ſe fait en les écrivant avec des ſignes contraires, & la 1re operation eſt finie.

Le 1er terme du dividende de la 2e operation eſt $+\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}by^2$. Je le diviſe par le 1er terme 1 du diviſeur, & j'écris le quotient $+\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}by^2$. J'écris auſſi o ſous ce 1er terme du dividende, pour marquer que je m'en ſuis ſervi; je multiplie enſuite les termes du diviſeur qui ſuivent le premier, par ce nouveau quotient. Je retranche du dividende les produits à meſure que je les trouve, en les écrivant avec des ſignes contraires, & la 2e operation eſt finie.

On doit remarquer que le terme du diviſeur où ſe trouve y^8 a été inutile à cette operation, & qu'il ne doit plus ſervir à la ſuivante, non plus que celui où ſe trouve y^6.

Le 1er terme du dividende de la 3e operation, en ajoutant enſemble $+\frac{1}{8}b^2y^4 + \frac{1}{4}b^2y^4$, eſt $-\frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{4}aby^4 + \frac{3}{8}b^2y^4$. Je le diviſe par le 1er terme 1 du diviſeur, & j'écris le quotient $-\frac{1}{8}a^2y^4 + \frac{1}{4}aby^4 + \frac{3}{8}b^2y^4$. J'écris auſſi o ſous le 1er terme du dividende dont je viens de me ſervir. Je multiplie les termes du diviſeur qui ſuivent le 1er 1, par ce nouveau quotient, (excepté ceux où ſe trouvent y^6 & y^8 qui deviennent inutiles, à cauſe du nombre des termes du quotient auquel je me ſuis borné;) & je retranche les produits du dividende, en les écrivant avec des ſignes contraires; & la 3e operation eſt finie.

Le 1er terme du dividende de la 4e operation, en ajoutant enſemble les grandeurs ſemblables, eſt $+\frac{1}{16}a^3y^6 - \frac{1}{16}a^2by^6 + \frac{3}{16}ab^2y^6 + \frac{5}{16}b^3y^6$. Je le diviſe par le 1er terme 1 du diviſeur, & j'en écris le quotient qui eſt le même terme, à cauſe que l'unité eſt le diviſeur. Je marque o ſous le 1er terme du dividende, dont je viens de me ſervir. Je multiplie par le quotient que je viens de trouver, le ſeul terme $-\frac{1}{2}by^2$ du diviſeur, les autres étant inutiles par rapport au nombre de termes que je cherche, & je retranche du dividende les produits à meſure que je les trouve; & la 4e operation eſt finie.

Le 1er terme du dividende de la 5e operation, en ajoutant enſemble les grandeurs ſemblables, eſt $-\frac{5}{128}a^4y^8 + \frac{1}{32}a^3by^8$

$-\frac{3}{64}a^2b^2y^8 + \frac{5}{32}ab^3y^8 + \frac{35}{128}b^4y^8$. Je le diviſe par le 1er terme 1 du diviſeur; & à cauſe que 1 eſt le diviſeur, j'écris ce même terme pour le quotient de la 5e operation; & m'étant borné à ces cinq termes du quotient, l'operation eſt finie.

Cet exemple ſuffit pour faire concevoir aux Commençans la maniere de diviſer une *ſuite* infinie par une autre *ſuite* infinie.

SECTION IV.

Sur les comparaiſons des rapports geometriques où ſont expliquées les proportions des grandeurs en general.

AVERTISSEMENT.

IL n'y a rien de plus neceſſaire dans les Mathematiques que la connoiſſance des comparaiſons des rapports des grandeurs en general. Elles ſervent ces comparaiſons des rapports, comme on l'a pû voir dans ce Traité, de fondement au calcul des grandeurs en general; & les Mathematiques particulieres ne ſont qu'une application de ces comparaiſons des rapports des grandeurs en general aux grandeurs ſenſibles & particulieres.

On va repeter ici en peu de mots ce qu'on a dêja dit ſur les rapports & les comparaiſons des rapports, & on y ajoutera tout ce qu'il faut ſçavoir ſur cette matiere; afin que les Commençans trouvent dans cette ſection tout ce qu'ils doivent ſe rendre très familier ſur ces comparaiſons des rapports, pour entendre les Mathematiques.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

312. TOUTE grandeur repréſentée par a peut être conçue partagée en tel nombre qu'on voudra de parties égales qu'on nomme ſes *aliquotes*. Nommant x chacune de ces aliquotes, & n le nombre de ces aliquotes tel qu'on voudra, on peut concevoir $a = nx$.

DE'FINITION.

313. LE *rapport geometrique*, ou ſimplement le *rapport* d'une grandeur a à une autre grandeur b, eſt la comparaiſon que l'on

fait de l'une de ces grandeurs à l'autre, en conſiderant combien de fois a contient b, ou eſt contenue dans b, ſi a eſt moindre que b.

Mais parceque le plus ſouvent la plus petite des deux grandeurs d'un rapport n'eſt pas contenue exactement dans l'autre, voici une notion plus generale d'un rapport. C'eſt la comparaiſon d'une grandeur a à une autre b de même nature, en conſiderant combien de fois l'une de ces grandeurs a contient une aliquote quelconque x de l'autre b. Suppoſant que n marque tel nombre qu'on voudra des parties égales dans leſquelles on peut concevoir que b eſt diviſé, & qu'ainſi $b = nx$; que m marque un nombre entier tel qu'on voudra, & qu'on prenne ce nombre m pour marquer combien a contient de parties égales x de b; l'expreſſion generale de tout rapport ſera $\frac{a}{b} = \frac{mx}{nx}$.

314. Quand dans le rapport $\frac{a}{b}$, ou ſon égal $\frac{mx}{nx}$, chacun des nombres m & n eſt fini & déterminé, c'eſt un rapport commenſurable; mais quand il arrive que b étant conçue partagée dans un nombre quelconque n fini & déterminé d'aliquotes x, jamais a n'en contient exactement un nombre fini m, *51. & qu'il y a toujours un reſte; ou, * ce qui revient au même, quand il faut concevoir le conſequent b diviſé en un nombre infini de parties égales x, afin que l'antecedent a en contienne auſſi un nombre infini; c'eſt à dire, quand les nombres m & n ſont infinis, le rapport de a à b ſe nomme *incommenſurable*.

Ce qu'on dira des rapports dans la ſuite conviendra aux rapports incommenſurables, auſſi-bien qu'aux commenſurables, comme on l'a fait voir dans l'*article* 51.

DE'FINITION.

315. ON peut comparer les rapports les uns avec les autres, comme on compare les grandeurs. La comparaiſon de deux rapports égaux s'appelle *une proportion*; la comparaiſon de deux rapports inégaux n'a pas d'autre nom que celui de comparaiſon de deux rapports.

Deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſont égaux quand les deux conſéquents b & d étant partagez dans le même nombre n d'aliquotes, chaque antecedent contient le même nombre m

d'aliquotes de ſon conſequent. Ainſi nommant x l'aliquote qui eſt dans b le nombre de fois que marque n, & y l'aliquote ſemblable qui eſt dans d le même nombre de fois n, l'antecedent a contient x un nombre de fois marqué par m, l'antecedent c contient auſſi y le même nombre de fois m; & $\frac{a}{b} = \frac{mx}{nx} = \frac{c}{d} = \frac{my}{ny}$ ſera l'expreſſion generale de deux rapports égaux par le moyen des aliquotes. Dans les rapports égaux commenſurables m & n ſont des nombres finis, & ** 51. dans les incommenſurables m & n ſont des nombres infinis.

Deux rapports $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ ſont inégaux, quand les antecedens e & g ne contiennent pas le même nombre de fois les aliquotes ſemblables x & y de leurs conſequents f & h; ou quand les conſequents f & h ne contiennent pas le même nombre de fois les aliquotes ſemblables de leurs antecedents e & g. Ainſi $\frac{mx}{nx}$ & $\frac{py}{ny}$, & encore $\frac{mx}{nx}$ & $\frac{my}{qy}$ peuvent ſervir d'expreſſion generale à deux rapports inégaux.

AXIOMES.

1.

316. Si l'on compare pluſieurs grandeurs inégales a, b, c, à une même grandeur d; les plus grandes auront un plus grand rapport à d que les plus petites; & celles qui y auront un plus grand rapport ſeront plus grandes que celles qui y auront un moindre rapport. Si d eſt zero, le rapport d'une grandeur réelle à zero ſera infiniment grand, & la grandeur réelle pourra être conſiderée comme infinie par rapport à zero. Ce qu'on doit entendre au ſens qui eſt expliqué dans la remarque qui ſuit l'*article* 40.

2.

317. Si l'on compare une même grandeur d à des grandeurs inégales a, b, c, le rapport de d à une plus grand ſera plus petit que le rapport de d à une plus petite. Et ſi le rapport de d à a eſt plus petit que le rapport de d à b; a eſt plus grande que b; & ſi d eſt zero, le rapport de d ou de zero à une grandeur réelle ſera infiniment petit : ce qui doit être entendu au ſens de la remarque de l'*article* 40.

3.

318. Parmi les rapports inégaux, un rapport $\frac{a}{b}$ plus grand qu'un

autre rapport $\frac{e}{f}$, eſt plus grand que tout autre rapport égal à $\frac{c}{d}$ ou moindre que $\frac{c}{d}$.

4.

319. Une même grandeur d étant comparée à des grandeurs égales $a = b = c$, tous ſes rapports à ces grandeurs égales ſont égaux; & ſi les rapports d'une grandeur d à d'autres grandeurs a, b, c ſont égaux, ces autres grandeurs ſont égales.

5.

320. Les rapports égaux à un même rapport, ou à des rapports égaux, ſont égaux entr'eux.

6.

321. En deux rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſi les deux termes a & b de l'un ſont déterminez, & qu'un ſeul des deux termes de l'autre ſoit auſſi déterminé comme c, l'autre terme d du ſecond
* 54. rapport * eſt déterminé.

DE'FINITION.

322. QUAND deux ou pluſieurs rapports ſont égaux comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, les antecedents s'appellent les termes *relatifs* ou *homologues*, & les conſequents ſe nomment auſſi *relatifs* ou *homologues*.

THEORÈME I.

323. *LORSQUE pluſieurs rapports ſont égaux, comme* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
* 55. $= \frac{e}{f}$, *les rapports* inverſes * *ſont auſſi égaux*, c'eſt à dire $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$.

THEORÈME II.

324. *SI pluſieurs rapports ſont égaux comme* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$,
* 56. *le rapport de chacun des antecedents à ſon conſequent* * *eſt égal au rapport de la ſomme de tous les antecedents à la ſomme de tous les conſequents*; c'eſt à dire $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$.

COROLLAIRE.

325. D'où il ſuit qu'ayant un rapport donné $\frac{a}{b}$, ſuppoſant que m marque un nombre entier quelconque, ou une fraction

numerique quelconque, * on aura $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$. Ainſi ſuppoſant $m = 2, 3$, &c. ou $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b}$ &c. $\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{1}{3}b}$ &c. *61.

THEORÊME III.

326. QUAND *deux ou pluſieurs rapports ſont égaux, comme* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; *les rapports des antecedents ſont égaux aux rapports des conſequents*; c'eſt à dire $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{c}{e} = \frac{d}{f}$; $\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$. Ces derniers rapports s'appellent les rapports *alternes*. *62.

THEORÊME IV.

327. SI $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *on aura* * $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *57.

THEORÊME V.

328. SI $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$, *& ſi* $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$; *dans chacun de ces cas* * *on aura* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *58, 59. & 60.

THEORÊME VI.

329. EN *tout produit qu'on peut concevoir comme formé de deux grandeurs, dont l'une eſt le multiplicateur, & l'autre le multiplié* *, *l'unité eſt à l'une, comme l'autre eſt au produit.* *72.

1 . a :: b . ab . 1 . a :: a^3 . a^4 . 1 . a :: a^n . a^{n+1} . 1 . $\frac{a}{b}$ :: $\frac{c}{d}$. $\frac{ac}{bd}$.

THEORÊME VII.

330. EN *toute diviſion, par exemple* $\frac{a}{b}$, *le dividende* a * *eſt au diviſeur* b, *comme le quotient* $\frac{a}{b}$ *eſt à l'unité.* a . b :: $\frac{a}{b}$. 1. *Et les rapports* * *inverſes étant égaux, on a auſſi cette proportion* 1 . $\frac{a}{b}$ :: b . a. *106. *107.

COROLLAIRE.

331. D'OÙ il ſuit, qu'en nommant q le quotient qui viendroit en faiſant la diviſion du premier terme a d'un rapport $\frac{a}{b}$ par le ſecond terme b, on aura * $qb = a$; & que l'on pourra exprimer tout rapport $\frac{a}{b}$ de cette maniere $\frac{qb}{b}$. *107.

On pourroit, par le moyen de cette expreſſion, démontrer

la plûpart des proprietez des proportions & des progreſſions geometriques.

THEORÊME VIII.

332. *DEUX grandeurs étant multipliées chacune par une même grandeur, ou étant diviſées chacune par une même grandeur* *75. *, les produits auront entr'eux le même rapport que les deux grandeurs ;* *109. * *les quotients auront auſſi le même rapport que les deux grandeurs.* $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$: & a . b :: $\frac{a}{d}$. $\frac{b}{d}$.

COROLLAIRE.

333. D'où il ſuit que deux rapports qui ont le même conſequent ou des conſequents égaux, * 116. * ſont entr'eux comme les antecedens. $\frac{a}{d}$. $\frac{b}{d}$ :: *a . b.*

THEORÊME IX.

334 *DEUX rapports qui ont le même antecedent, ou des antecedents égaux, ſont entr'eux* * 121. * *comme leurs conſequents pris dans un ordre renverſé.* $\frac{a}{b}$. $\frac{a}{c}$ :: c . b.

THEORÊME X.

335 *TOUS les rapports égaux ſont des grandeurs égales. Car ils ont* * 111. * *le même rapport à une même grandeur qui eſt l'unité.*

THEORÊME XI. *fondamental.*

336. *DEUX rapports quelconques* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *ſont entr'eux* * 118. * *comme le produit des extrêmes* ad *eſt au produit* bc *des moyens.* $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ :: ad . bc.

Ce Theorême fait voir la maniere de trouver le rapport que deux rapports ont entr'eux.

COROLLAIRE.

337. D'où il ſuit que quand on a deux produits homogenes on peut en former une proportion. Par exemple on fera des deux produits *ad* & *bc*, la proportion $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ :: *ad . bc*. On fera de a^2d & b^2c la proportion $\frac{a^2}{b^2}$. $\frac{c}{d}$ :: a^2d . b^2c.

THEORÊME XII fondamental, qu'il faut bien retenir.

338. *EN toute proportion, le produit des extrêmes* * *eſt égal au produit des moyens. Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *l'on aura* ad = bc. *Et ſi* ad = bc, *on aura* * $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. * 119. * 120.

Ainſi quand deux produits ſont égaux, on en peut toujours former une proportion, en prenant les extrêmes dans l'un des produits, & les moyens dans l'autre.

Il faut auſſi remarquer que quand un rapport $\frac{a}{f}$ eſt égal au rapport inverſe d'un autre rapport $\frac{d}{c}$, (c'eſt à dire $\frac{a}{f} = \frac{c}{d}$) on dit, (en laiſſant l'arrangement des rapports $\frac{a}{f}$ & $\frac{d}{c}$) que *a* eſt à *b* réciproquement comme *c* eſt à *d*. Et dans cet arrangement de deux rapports égaux $\frac{a}{f}$ & $\frac{d}{c}$, dont l'un, ſçavoir $\frac{c}{d}$, eſt écrit dans un ordre inverſe $\frac{d}{c}$; il eſt évident que c'eſt le produit des antecedents *ad* qui eſt égal au produit des conſequents *bc*.

Quand auſſi deux produits ſont égaux *ad* = *bc*, ſi on les conçoit réduits en deux rapports $\frac{a}{f}$ & $\frac{d}{c}$, dont les antecedents ſoient pris de l'un des produits *ad*, & les conſequents de l'autre produit égal *bc*, il eſt évident que le premier de ces rapports $\frac{a}{f}$ eſt égal au rapport inverſe de l'autre $\frac{d}{c}$, c'eſt à dire $\frac{a}{f} = \frac{c}{d}$; & on dit alors que *a* eſt à *b* réciproquement comme *c* eſt à *d*.

AVERTISSEMENT.

ON a démontré toutes les propoſitions qui précedent dans les lieux qui ſont citez à la marge, il faut ſe les rendre très familieres, & leurs démonſtrations. On va ajouter les autres principales propoſitions ſur la comparaiſon des rapports, qu'il faut de même ſe rendre très familieres.

COROLLAIRE I.

339. EN tout proportion continue *a*. *b* :: *b*. *c*, où le ſecond & le troiſiéme terme ſont la même grandeur *b*; le quarré b^2 du terme moyen *b*, eſt égal au produit *ac* des extrêmes. Et ſi l'on a un produit *ac* égal à un quarré b^2, l'on aura une proportion continue *a*. *b* :: *b*. *c*, dans laquelle la racine du

quarré b^2 ſera moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs a & c, dont eſt formé le produit ac.

336. *Démonſtration.* $\frac{a}{b} . \frac{b}{c} ::$ * $ac . b^2$. Or on ſuppoſe dans la premiere partie du Corollaire $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Par conſequent $ac = b^2$. On ſuppoſe dans la ſeconde partie $ac = b^2$. Par conſequent $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II. PROBLÈME I.

340. *LES deux termes moyens d'une proportion & un ſeul des deux extrêmes étant donnez ou connus trouver l'autre extrême. Et les deux extrêmes & l'un des moyens étant donnez ou connus, trouver l'autre moyen.*

Operation. Soient les deux moyens ou les deux extrêmes connus repréſentez par b & c, l'extrême ou le moyen connu repréſenté par a, & l'extrême ou le moyen inconnu qu'on cherche repréſenté par x.

La proportion ſera $a . b :: c . x$; ou $b . a :: x . c$. Dans l'un
* 338. & l'autre cas, on aura * $ax = bc$. Et diviſant chacun de ces produits égaux par a, on aura $x = \frac{bc}{a}$. Ce qui donne la fameuſe *Regle de trois.*

La regle de proportion qu'on nomme ordinairement
la Regle de trois.

341. *TROIS termes d'une proportion* a, b, c, *étant connus, trouver le quatriéme terme* x.

Puiſqu'il y a trois termes de connus, il eſt évident que les deux moyens & un des extrêmes ſont connus, & qu'on cherche l'autre extrême; ou que les deux extrêmes & un moyen ſont connus, & qu'on cherche l'autre moyen. Dans l'un & l'autre cas il eſt bon d'arranger les trois termes connus de maniere que les deux extrêmes ou les deux moyens connus occupent le 2e & le 3e rang de la proportion; que le ſeul extrême ou moyen connu occupe le premier rang; & que le terme inconnu qu'on cherche ſoit conçu occuper le 4e rang de la proportion, de cette maniere $a . b :: c . x$. Le ſens de la queſtion ſera aſſez connoître cet ordre de termes, comme on le verra dans les exemples.

Regle ou operation. Il faut multiplier les deux moyens connus b & c l'un par l'autre, ou les deux extrêmes connus l'un

par l'autre; diviſer dans le premier cas le produit *bc* par celui des extrêmes *a* qui eſt connu; & dans le ſecond cas, par celui des moyens *a* qui eſt connu; & le quotient $\frac{bc}{a}$ ſera le quatriéme terme qu'on cherchoit.

Quand les trois termes connus ſont arrangez, comme on l'a dit, il faut multiplier le 2e & le 3e terme l'un par l'autre, & diviſer leur produit *bc* par le 1er terme *a*, & le quotient $\frac{bc}{a}$ ſera le 4e terme; ou bien, ce qui revient au même, & ce qui eſt quelquefois plus commode dans la pratique, il faut diviſer le 2e terme par le premier, ce qui donnera le quotient $\frac{b}{a}$; ou ſi la diviſion peut ſe faire plus commodément, il faut diviſer le 3e terme par le premier ce qui donnera le quotient $\frac{c}{a}$; multiplier dans le premier cas le quotient $\frac{b}{a}$ par le 3e terme *c*; & dans le ſecond cas, multiplier le quotient $\frac{c}{a}$ par le 2e terme *b*; & dans l'un & dans l'autre cas, le produit $\frac{bc}{a}$ * ſera le 4e terme qu'on cherchoit. Ou bien enfin il faut diviſer le 1er terme par le 2e, ce qui donne le quotient $\frac{a}{b}$; & diviſer le 3e terme *c* par le quotient précedent; & le quotient $\frac{bc}{a}$ * ſera le 4e terme. On a mis toutes ces manieres de trouver le 4e terme d'une proportion, afin que dans la pratique on puiſſe choiſir celle qu'on verra être la plus commode pour chaque exemple qui peut ſe preſenter. * 340. * 340.

EXEMPLE I.

SUPPOSANT que les longueurs des ombres que font deux hauteurs, étant priſes en même temps, ayent le même rapport chacune à leur hauteur; on peut aiſément meſurer une hauteur par ſon ombre, en ſe ſervant de la regle de trois. Il n'y a qu'à prendre un bâton dont la longueur ſoit connue, par exemple de 5 pieds, le tenir à plomb, lorſqu'il fait du ſoleil, auprès de l'extrêmité de l'ombre que fait la hauteur qu'on veut meſurer; marquer au même inſtant l'extrêmité de l'ombre du bâton, & l'extrêmité de l'ombre de la hauteur; & meſurer enſuite la longueur des deux ombres. Suppoſé que l'ombre du bâton ſoit de 3 pieds, & que l'ombre de la hauteur ſoit de 27 pieds; on connoîtra les trois termes d'une proportion dont la hauteur eſt le 4e terme: car l'ombre du bâton eſt à la hauteur du bâton, comme l'ombre de la hauteur eſt à la hauteur. Ce qui fait voir qu'il faut ainſi arranger les termes de la proportion. 3 pieds d'ombre du

bâton ſont à 5 pieds de hauteur, qui eſt la hauteur du bâton, comme 27 pieds d'ombre de la hauteur ſont au nombre des pieds de la hauteur. 3. 5 :: 27. x. Il faut multiplier 27 par 5, & diviſer le produit 135 par 3, & le quotient 45 ſera le 4e terme. Ainſi la hauteur eſt de 45 pieds. Ou bien 27 ſe diviſant ſans reſte par 3, on peut diviſer 27 par 3, & multiplier le quotient 9 par 5, & le produit 45 ſera le 4e terme.

EXEMPLE II.

QUAND on a voulu meſurer le tour de la terre, c'eſt à dire trouver combien la circonference d'un grand cercle de la terre, par exemple d'un meridien, contenoit de lieues; on a pris deux Villes ſituées ſur un même meridien. On a meſuré exactement combien il y avoit de lieues de l'une à l'autre : on a obſervé les deux hauteurs du pôle à ces deux Villes, & on en a pris la difference ; ces deux choſes ont ſuffi pour donner les trois termes connus d'une proportion dont le quatriéme étoit le nombre des lieues du tour de la terre. Car ſuppoſant, 1°. qu'il y ait 20 lieues entre deux Villes ſituées ſur un même meridien; 2°. que la difference des hauteurs du pole de ces deux Villes ſoit de $\frac{1}{5}$ d'un degré, on a cette proportion: $\frac{1}{5}$ d'un degré ſont à 20 lieues, comme 360 degrez que contient le tour de la terre, ſont au nombre des lieues du tour de la terre. $\frac{1}{5}$. 20 :: 360. x.

Il faut multiplier 360 par 20, diviſer le produit 7200 par $\frac{1}{5}$, en ſe ſervant de la diviſion des fractions; & le quotient $\frac{36000}{4} = 9000$, eſt le nombre des lieues du tour de la terre.

Ou bien on diviſera le premier terme $\frac{1}{5}$ par le ſecond 20, ce qui donnera le quotient $\frac{1}{100}$. On diviſera le 3e terme 360 par le quotient $\frac{1}{100}$, & le quotient de cette diviſion, qui eſt $\frac{36000}{4} = 9000$, ſera le nombre des lieues du tour de la terre.

AVERTISSEMENT.

LA regle de proportion entre dans la reſolution de la plûpart des Problêmes des Mathematiques, & dans la plûpart des calculs du commerce. C'eſt pourquoi les commençans doivent ſe la rendre très familiere. On va mettre un exemple ſur la regle de ſocieté ou de compagnie, qui eſt formée de la regle de proportion réiterée.

Regle de la Societé ou de Compagnie.

IL s'agit dans la regle de ſocieté de partager une grandeur donnée, qu'on nommera p, en un nombre donné de parties, qu'on nommera x, y, z, *&c.* leſquelles parties ayent entr'elles les mêmes rapports qu'ont entr'elles autant de grandeurs données, qu'on nommera a, b, c, *&c.* qu'il y a de parties x, y, z, *&c.*

Regle. 1°. Il faut faire une ſomme de toutes les grandeurs données; ſuppoſant qu'il y en ait trois; cette ſomme eſt $a+b+c$.

2°. Il faut faire autant de regles de proportion qu'on cherche de parties. Dans notre ſuppoſition, il en faut faire trois. Le premier terme de chacun doit toujours être la ſomme $a+b+c$, *&c.* des grandeurs données. Le ſecond terme doit toujours être la grandeur p, qu'il faut partager. Mais le 3ᵉ terme de la premiere regle doit être la premiere des grandeurs données a; le 3ᵉ terme de la ſeconde regle, doit être la ſeconde grandeur b; le 3ᵉ terme de la 4ᵉ regle, doit être la troiſiéme grandeur c; & ainſi de ſuite s'il y a plus de trois grandeurs données. Les 4ᵉˢ termes, qu'on trouvera en faiſant les regles de trois, étant pris de ſuite comme on les voit dans l'exemple litteral, ſeront les parties, x, y, z, *&c.* que l'on cherchoit.

$$a+b+c.\ p :: \begin{cases} a.\ \frac{ap}{a+b+c} = x \\ b.\ \frac{bp}{a+b+c} = y \\ c.\ \frac{cp}{a+b+c} = z \end{cases}$$

Car les 4ᵉˢ termes qu'on trouve pour la valeur des parties x, y, z que l'on cherchoit, ayant le même conſequent, & leurs antecedents étant de ſuite les grandeurs a, b, c, chacune multipliée par p, ſont * entr'eux comme ces grandeurs, a, b, c; * 333, & leur ſomme $\frac{ap+bp+cp}{a+b+c}$ eſt viſiblement égale à la grandeur partagée p. 332.

Dans le commerce, ſuppoſé que trois perſonnes ayent fait une ſocieté; que la premiere ait mis une telle ſomme d'argent qu'on voudra repreſentée par a; la 2ᵉ, une autre ſomme repreſentée par b; & la 3ᵉ, une autre ſomme repreſentée par c; & que le profit ou la perte, c'eſt à dire ce qui eſt provenu de la ſocieté, ſoit repreſenté par p; il faut partager le profit ou la perte, repreſentée par p, en trois parties proportionnelles aux trois ſommes d'argent. Les 4ᵉˢ termes de l'exemple en lettres, font voir les operations qu'il faut faire pour trouver ces trois parties proportionnelles.

DE'FINITION.

QUAND les quatre termes d'une proportion ou de deux rapports égaux, ſont arrangez de façon que les deux termes de l'un des rapports égaux ſont dans un ordre renverſé, on nomme la proportion *inverſe* ou *reciproque*. Par exemple, la proportion droite étant 2. 4 :: 8. 16, l'inverſe ou la reciproque eſt 2. 4. 16. 8; & dans cet arrangement on dit que 2 eſt à 4 en raiſon inverſe de 16 à 8; ou que 2 eſt à 4 reciproquement, comme 8 eſt à 16; & l'on dit que les deux termes du premier rapport ſont reciproquement proportionnels aux deux termes du ſecond. Si la proportion droite eſt $a. b :: c. d$, en l'arrangeant ainſi $a. b. d. c$, ou de cette maniere $b. a. c. d$; on dit que a eſt à b reciproquement comme c eſt à d, ou que b eſt à a reciproquement comme d eſt à c.

Dans cet arrangement de la proportion reciproque, il eſt évident que le 1er & le 3e termes ſont les extrêmes, & que le 2e & le 4e termes ſont les moyens de la proportion droite. Ainſi il eſt facile de reduire la proportion reciproque à la proportion droite, & trois termes étant connus, de trouver le 4e par la regle de proportion. Par exemple, ſi les trois premiers termes a, b, d étant connus, on demande le 4e c, * 340. il eſt évident que * $c = \frac{ad}{b}$.

Quelques Auteurs arrangent encore une proportion reciproque de cette ſeconde maniere. Soit la proportion droite $a. b :: c. d$; la proportion reciproque eſt a, d, b, c, c'eſt à dire le 1er terme a eſt au 3e b, comme le 4e c eſt au ſecond d. Dans cet ordre de la proportion reciproque, le 1er & le 2e termes ſont les extrêmes, le 3e & le 4e ſont les moyens. Si l'on veut chercher un terme de cette proportion reciproque, par exemple le 4e c, il eſt évident que $c = \frac{ad}{b}$.

EXEMPLE III.

UN Courier en faiſant 24 lieues par jour, ne ſçauroit arriver qu'en 8 jours au lieu qu'il ſe propoſe; il ſeroit neceſſaire qu'il y arrivât en 4 jours; on demande combien il doit faire de lieues par jour pour y arriver en 4 jours.

L'état de la queſtion fait connoître que le nombre des lieues qu'on cherche, doit être d'autant plus grand que 24 lieues, que le temps de 4 jours eſt plus petit que le temps

de 8 jours. Ainſi en arrangeant les termes de la proportion ſuivant le ſens de la queſtion, on dira, le Courier employe 8 jours en faiſant 24 lieues par jour; pour n'employer que 4 jours, combien doit-il faire de lieues par jour? La proportion eſt reciproque dans cet arrangement, qui eſt de la ſeconde maniere. Car l'on aura pour premier terme, 8 jours; pour ſecond terme, 24 lieues; pour 3ᵉ terme, 4 jours; & le 4ᵉ terme ſera le nombre des lieues qu'on cherchoit. Il eſt viſible que le premier terme 8 jours, eſt au 3ᵉ 4 jours, comme reciproquement le 4ᵉ terme, qui eſt le nombre des lieues qu'on cherche, eſt au 2ᵉ terme 24 lieues. D'où l'on voit qu'il faut multiplier le premier terme 8 & le ſecond 24 l'un par l'autre, car ce ſont les extrêmes de la proportion droite, & diviſer le produit 192 par le 3ᵉ terme 4 qui eſt le moyen connu; & le quotient 48 eſt le 4ᵉ terme de la proportion reciproque, & c'eſt auſſi le ſecond moyen de la proportion droite.

On auroit reduit la proportion inverſe à une proportion droite, en l'ordonnant de cette maniere; 4 jours ſont à 8 jours, comme 24 lieues ſont au nombre des lieues qu'on cherche, que l'on trouve être 48 lieues.

EXEMPLE IV.

SUPPOSÉ qu'ayant une étoffe d'une $\frac{1}{2}$ aulne de large, 8 aulnes ſuffiſent pour faire un habit; on trouve une autre étoffe qui a $\frac{2}{3}$ de large, on veut ſçavoir combien il en faut d'aulnes pour faire un habit. Il eſt évident que plus l'étoffe a de largeur, & moins il en faut d'aulnes pour faire un habit; c'eſt pourquoi en ſuivant le ſens de la queſtion, on dira, autant qu'une $\frac{1}{2}$ aulne eſt plus petite que $\frac{2}{3}$ d'aulne, autant le nombre de 8 aulnes doit être en proportion inverſe plus grand que le nombre d'aulnes qu'on cherche; Et c'eſt l'arrangement de la premiere maniere de la proportion reciproque. Pour trouver le 4ᵉ terme, il faut multiplier le premier terme $\frac{1}{2}$ & le 3ᵉ terme 8, qui ſont les deux moyens de la proportion reciproque reduite à une proportion droite, & diviſer le produit $\frac{8}{2} = 4$ par le 2ᵉ terme $\frac{2}{3}$, qui eſt un des moyens de la proportion droite; & le quotient $\frac{12}{2} = 6$ ſera le 4ᵉ terme de la proportion reciproque; & en même temps le ſecond moyen de la proportion droite. Ainſi il faut 6 aulnes

d'étoffe de $\frac{2}{3}$ de large. La proportion droite eſt $\frac{2}{3} . \frac{1}{2} :: 8 . x$.

EXEMPLE V.

IL y a auſſi des cas où il faut partager une grandeur donnée en un nombre de parties qui ayent entr'elles des rapports inverſes d'autres rapports qui ſont entre autant de grandeurs données qu'on demande de parties; ce qu'on exprime de cette maniere. Partager une grandeur donnée p en un nombre donné de parties x, y, &c. qui ſoient entr'elles reciproquement comme ſont entr'elles autant de grandeurs données a, b, &c.

On en prendra un exemple de phyſique ſur le mouvement des corps Pour le faire concevoir clairement, on ſuppoſera qu'on démontre dans le traité du mouvement, que la quantité du mouvement d'un corps qui ſe meut, eſt le produit de ſa maſſe par ſa viteſſe. Ainſi nommant m la maſſe d'un corps, & v ſa viteſſe, mv eſt la quantité de ſon mouvement. Il ſuit de là & de l'article 338, qu'afin que deux corps homogenes, dont les maſſes ſont differentes, qu'on nommera M & m, ayent une égale quantité de mouvement; il faut que leurs viteſſes, qu'on nommera V & v, ſoient entr'elles reciproquement comme les maſſes M & m; c'eſt à dire, que le rapport inverſe des viteſſes V & v ſoit égal au rapport direct des maſſes M & m. Il faut donc que $M . m :: v . V$. Car l'on en déduira $* MV = mv$; c'eſt à dire que les quantitez de mouvement ſont égales.

* 338.

Cela ſuppoſé, voici le Problême. Une viteſſe (u) étant donnée, la partager reciproquement aux maſſes M & m de deux corps; c'eſt à dire la partager en deux parties, qu'on nommera V & v, telles que leur rapport inverſe $\frac{v}{V}$ ſoit égal au rapport direct $\frac{M}{m}$ des maſſes des corps.

Operation. Il faut faire deux regles de proportion. Le premier terme de chacune doit être la ſomme des deux maſſes $M + m$; le ſecond terme de chacune doit être la viteſſe à partager (u); le 3e terme de la premiere regle doit être la maſſe m du ſecond corps; le 3e terme de la 2e regle doit être la maſſe M du premier corps; & les 4es termes, qu'on trouvera en faiſant ces deux regles,

$$M + m . u :: \begin{cases} m . \frac{mu}{M+m} = V. \\ M . \frac{Mu}{M+m} = v, \end{cases}$$

ſeront

ſeront les parties de viteſſes qu'on cherche ; ſçavoir $\frac{mu}{M+m}$ ſera la viteſſe V qu'il faut donner au corps M ; & $\frac{Mu}{M+m}$ ſera la viteſſe v qu'il faut donner au corps m ; & après cela leurs quantitez de mouvement MV & mv ſeront égales. Car il eſt évident que les numerateurs mu & Mu des 4es termes, ayant le même conſequent $M+m$, & étant chacun multiplié par la même grandeur (u), ſont entr'eux comme m à M, c'eſt à dire, le rapport des 4es termes eſt égal à l'inverſe du rapport direct $\frac{M}{m}$. & de plus il eſt évident que la ſomme des 4es termes $\frac{mu+Mu}{M+m}$ eſt égale à la grandeur (u) qu'il falloit partager.

COROLLAIRE III. PROBLEME II.

342. *DEUX grandeurs* a *& c étant données, trouver la grandeur* y *qui eſt un moyen proportionel entre* a *&* c ; *c'eſt à dire dans la proportion continue* ∴ a. y. c, *il faut trouver le moyen proportionel* y, *les deux grandeurs* a *&* c *étant données.*

Operation. Il faut multiplier a par c, & prendre la racine quarrée du produit ac; cette racine 2e, repreſentée par $\sqrt{ac}$, ſera la grandeur y qu'on cherche. Car par la ſuppoſition $a.y::y.c$. Donc * $y^2 = ac$. En tirant la racine 2e de chacune de ces grandeurs égales, on aura * $y = \sqrt{ac}$. * 338. * 211.

COROLLAIRE IV. PROBLEME III.

343. *LE produit* ac *de deux grandeurs étant donné, trouver un quarré* y^2 *qui lui ſoit égal.*

Operation. Il faut trouver * y moyenne proportionelle entre a & c, & le quarré y^2 de y * ſera égal à ac. * 342. * 338.

REMARQUES.

I.

344. DANS les grandeurs numeriques, lorſque le produit ac des deux grandeurs numeriques données, n'eſt pas une puiſſance parfaite, on ne peut pas trouver exactement un nombre y * qui ſoit moyen proportionel entre le nombre a & le nombre c; mais dans la Geometrie, en exprimant chacune des lignes droites d'une figure par une lettre, on peut trouver * 307.

exactement une ligne, repreſentée par y, qui ſoit moyenne proportionnelle entre deux lignes données a & c.

2.

345. On fera remarquer ici aux Commençans, par rapport aux calculs dans leſquels les grandeurs doivent être homogenes, la maniere de diſtinguer dans les fractions litterales, celles qui ſont homogenes, c'eſt à dire d'un même nombre de dimenſions.

La multiplication des grandeurs litterales eſt la cauſe de leurs dimenſions; par exemple, le produit ab eſt de deux dimenſions; abc eſt de trois dimenſions, &c. La diviſion qui eſt oppoſée à la multiplication, diminue les dimenſions des produits. C'eſt pourquoi dans une fraction litterale, le numerateur étant cenſé être diviſé par le dénominateur, le ſurplus des dimenſions du numerateur ſur le dénominateur, eſt le nombre des dimenſions de la fraction. Par exemple $\frac{ab}{c}$ eſt une fraction lineaire; $\frac{abd}{c}$ eſt de deux dimenſions; $\frac{a^3}{b^2}$ eſt de trois dimenſions. Il en eſt de même des autres.

Quand on a des fractions qui ne ſont pas homogenes, on peut les rendre homogenes en multipliant le numerateur de celles qui ont le moins de dimenſions, ou multipliant le dénominateur de celles qui ont le plus de dimenſions par une grandeur litterale priſe pour l'unité. Ainſi pour rendre $\frac{ab}{c}$ homogene à $\frac{b^3}{c^2}$, on prendra, par exemple, a pour l'unité, & l'on écrira $\frac{a^2b}{c}$ au lieu de $\frac{ab}{c}$, & $\frac{a^2b}{c}$ ſera homogene à $\frac{b^3}{a^2}$; ou bien on écrira $\frac{b^3}{a^2c^2}$ au lieu de $\frac{b^3}{c^2}$, & les fractions $\frac{ab}{c}$, $\frac{b^3}{a^2c^2}$ ſeront homogenes. Ces operations en changeant l'expreſſion des fractions, n'en changent point la valeur; car il eſt évident qu'une grandeur multipliée ou diviſée par l'unité ou par les puiſſances de l'unité, ne change point de valeur.

COROLLAIRE V. PROBLÈME IV.

346. *DEUX termes d'une progreſſion geometrique étant donnez; trouver de ſuite tous les termes ſuivans.*

Operation. Soient les deux premiers termes donnez a & b; il eſt évident que l'on a trois termes d'une proportion continue $a.\ b :: b.\ x$; & l'on cherche le 4e terme x qui eſt le 3e terme de la progreſſion. On le trouvera en prenant * le quar-

* 341.

ré b^2 du moyen b, & le diviſant par le premier terme a; & il viendra $x = \frac{b^2}{a}$. L'on a déja $\div\div a. b. \frac{b^2}{a}$. Pour trouver par ordre les termes ſuivans, on voit clairement qu'il ne faut que prendre le quarré du terme qu'on vient de trouver, & diviſer ce quarré par le terme qui précede immédiatement le terme qu'on vient de découvrir, & le quotient ſera le terme qui le ſuit. Ainſi la progreſſion ſera $\div\div a. b. \frac{b^2}{a}. \frac{b^3}{a^2}. \frac{b^4}{a^3}. \frac{b^5}{a^4}$, &c.

Si le premier terme de la progreſſion eſt l'unité, tous les termes ſeront de ſuite les puiſſances du ſecond terme, $\div\div 1. a. a^2. a^3. a^4$, &c.

Si l'unité étant le premier terme, le ſecond eſt $\frac{1}{a}$, on trouvera que la progreſſion eſt $\div\div 1. \frac{1}{a}. \frac{1}{a^2}. \frac{1}{a^3}. \frac{1}{a^4}$, &c. ou bien, * ce qui revient au même, $\div\div 1. a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. a^{-4}$, &c. * 145.

On peut ordonner ces deux progreſſions de maniere qu'elles ne feront qu'une même progreſſion, dans laquelle le rapport de chaque terme à celui qui eſt immédiatement plus à droite que lui, ſera $\frac{1}{a}$: (ce rapport eſt nommé *le rapport qui regne dans la progreſſion*) l'unité ſera entre les termes de la progreſſion qui auront pour expoſans des nombres entiers poſitifs qui ſuivront vers la droite, & entre les termes qui auront des expoſans négatifs qui précederont l'unité vers la gauche ; & on pourra concevoir que la progreſſion s'étend à l'infini tant vers la droite que vers la gauche de l'unité. $\div\div$ &c. $a^{-6}. a^{-5}. a^{-4}. a^{-3}. a^{-2}. a^{-1}. 1.$ ou $a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6$, &c.

On peut de même continuer à l'infini vers la gauche la progreſſion $\div\div a. b. \frac{b^2}{a}. \frac{b^3}{a^2}. \frac{b^4}{a^3}$, &c. & l'on trouvera $\div\div$ &c. $\frac{a^4}{b^4}. \frac{a^3}{b^3}. \frac{a^2}{b^2}. \frac{a}{b}. a\ b. \frac{b^2}{a}. \frac{b^3}{a^2}. \frac{b^4}{a^3}. \frac{b^5}{a^4}$, &c. ou bien $\div\div$ &c. $a^4b^{-4}. a^3b^{-3}. a^2b^{-2}. ab^{-1}. a. b\ a^{-1}b^2. a^{-2}b^3. a^{-3}b^4. a^{-4}b^5$, &c.

REMARQUE.

CES expreſſions des progreſſions geometriques, priſes de leur formation, ſervent à en découvrir facilement les proprietez.

Des changemens qu'on peut faire ſur les quatre termes a . b :: c . d *d'une proportion droite, de maniere que les quatre nouveaux termes qui viendront de ces changemens, feront encore une proportion.*

347. ON a déja démontré deux de ces changemens; ſçavoir,
* 55. quand on a une proportion droite $a . b :: c . d$, on aura * la
* 62. proportion *inverſe* $b . a :: d . c$, & * *l'alterne* $a . c :: b . d$.

COROLLAIRE VI.

348. LA proportion droite étant $a . b :: c . d$, on aura (ce qu'on nomme *en compoſant* ou *par compoſition*, ce qu'on devroit plutôt nommer *en ajoutant* ou *par addition*) $a + b . b :: c + d . d$; on aura encore $a - b . b :: c - d . d$, (ce qu'on nomme *en diviſant* ou *par diviſion*, & ce qu'on devroit plutôt nommer *en retranchant* ou *par ſouſtraction*.)

* 338. *Démonſtration.* Il ſuit de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que * $ad = bc$. Cela ſuppoſé, on trouve que le produit des extrêmes de l'une & l'autre des proportions précedentes, eſt égal au produit des moyens; car dans la premiere, $ad + bd = bc + bd$; & dans
* 338. la ſeconde, $ad - bd = bc - bd$. Donc * $a + b . b :: c + d . d$; & $a - b . b :: c - d . d$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE VII.

349. ON déduit des proportions précedentes cette autre-ci, $a + b . c + d :: a - b . c - d$. Car puiſqu'on a démontré que $a + b . b :: c + d . d$, & que $a - b . b :: c - d . d$, on aura la proportion alterne $a + b . c + d :: b . d :: a - b . c - d$.

COROLLAIRE VIII.

350. LA proportion droite étant $a . b :: c . d$, on aura $a . a - b :: c . c - d$. Ce qu'on nomme *converſion de raiſon*, ou ſimplement *converſion*. On aura encore $a . a + b :: c . c + d$. Car la
* 338. proportion droite donnant * $ad = bc$, dans l'un & l'autre des changemens de ce Corollaire, on trouvera le produit des extrêmes égal à celui des moyens, étant viſible que dans le premier, $ac - ad = ac - bc$, & dans le ſecond, $ac + ad = ac + bc$.

REMARQUES.

1.

351. ON doit remarquer que la proportion droite étant $a.b::c.d$, & l'alterne $a.c::b.d$, les mêmes changemens qui conviennent à la proportion droite, doivent auſſi convenir à l'alterne. Ainſi, 1°. $a+c.c::b+d.d$; 2°. $a-c.c::b-d.d$; 3°. $a+c.b+d::a-c.b-d::c.d$; 4°. $a.a-c::b.b-d$; 5°. $a.a+c::b.b+d$.

2.

Voila les principaux changemens que l'on peut faire ſur les termes d'une proportion droite, de maniere que les quatre termes qui reſultent de ces changemens, ſoient encore en proportion. Il faut ſe les rendre très familiers à cauſe de leur frequent uſage. Il y en a encore d'autres qui ne ſont pas d'un ſi grand uſage. Il eſt inutile de les mettre, car quand on les rencontrera, ou quand on en aura beſoin, on pourra toujours s'aſſurer ſi les quatre nouveaux termes ſont en proportion, en prenant le produit des extrêmes & des moyens, & en voyant s'ils ſont égaux. On en va mettre quelques exemples pour faire voir aux Commençans qu'ils ne ſçauroient leur cauſer de difficulté.

COROLLAIRE IX.

352. QUAND on a une proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, laquelle donne $ad=bc$; en ſuppoſant que m repreſente un nombre quelconque entier ou rompu, & que n en repreſente un autre; on aura, 1°. $\frac{ma}{b}=\frac{mc}{d}$; 2°. $\frac{a}{nb}=\frac{c}{nd}$; 3°. $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$; 4°. $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$; 5°. $\frac{ma+mb}{b}=\frac{mc+md}{d}$, &c. Car il eſt évident que dans tous ces changemens le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens. On a mis, pour abreger, $+$ dans les deux derniers changemens; c'eſt à dire afin de renfermer deux cas en un ſeul.

COROLLAIRE X.

353. SUPPOSE' $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ce qui donne * $ad=bc$; & que $\frac{c}{b}=\frac{f}{d}$, * 338. ce qui donne $ed=bf$; l'on aura $\frac{a+e}{b}=\frac{c+f}{d}$. Car il eſt évident que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

COROLLAIRE XI.

354. DANS une proportion $a . b :: c . d$, le plus grand & le plus petit termes ſont toujours les deux extrêmes ou les deux moyens. C'eſt à dire, ſi a eſt plus grand que chacun des trois autres termes, d eſt neceſſairement le plus petit terme. Si a eſt le moindre, d eſt le plus grand. Si c'eſt un moyen b qui eſt le plus grand ou le moindre des termes, l'autre moyen c ſera le plus petit ou le plus grand.

*338. *Démonſtration.* * $ad = bc$. Donc ſi le plus grand terme ſe trouve parmi les extrêmes, & que ce ſoit par exemple a; d ne ſçauroit être ni égal à chacun des deux moyens b ou c, ni plus grand qu'aucun des deux moyens b ou c; car le produit ad ſurpaſſeroit le produit bc de b, (b étant ſuppoſé égal à d, ou moindre que d) par c plus petit que a, par la ſuppoſition. Ainſi d eſt le plus petit terme de la proportion quand a eſt le plus grand. Si c'étoit un des moyens qui fût le plus grand ou le plus petit terme de la proportion, la même démonſtration feroit voir que l'autre moyen ſeroit auſſi le plus petit ou le plus grand terme.

COROLLAIRE XII.

355. LORSQUE le plus grand terme a eſt un des extrêmes, & par conſequent le plus petit eſt l'autre; la ſomme des extrêmes $a + d$ ſurpaſſe la ſomme des moyens $b + c$; c'eſt le contraire quand le plus grand & le plus petit termes ſont les moyens.

Démonſtration. Puiſque $a . b :: c . d$, l'on aura *par converſion*, * $a . a - b :: c . c - d$; d'où viendra l'alterne $a . c :: a - b . c - d$. Mais par la ſuppoſition $a > c$. Donc $a - b > c - d$. Par conſequent ſi l'on ajoute $b + d$ à chaque membre, $a - b + b + d$ $(= a + d) > c - d + b + d (= b + c)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*350.

COROLLAIRE XIII.

356. D'OÙ il ſuit que dans une proportion continue $a . b :: b . c$, la ſomme $a + c$ des extrêmes ſurpaſſe le double $2b$ du moyen proportionel.

COROLLAIRE XIV.

357. SI l'on a trois grandeurs d'une part $a . b . c$, & trois d'une autre $e . f . g$, de telle ſorte que $a . b :: e . f$, & $b . c :: f . g$, l'on aura (ce qu'on nomme *par égalité*) $a . c :: e . g$.

Démonſtration. Puiſque $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, on aura * $\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$. De même $\frac{b}{c} = \frac{f}{g}$ donnera * $\frac{b}{f} = \frac{c}{g}$. Donc * $\frac{a}{e} = \frac{c}{g}$. Par conſequent * $a . c :: e . g$. *Ce qu'il falloit démontrer*. * 347. * 347. * 320. * 347.

S'il y avoit tant de grandeurs qu'on voudra d'une part a, b, c, d, e, &c. & le même nombre de grandeurs f, g, b, i, k, &c. d'une autre; ſuppoſé qu'on nomme correſpondantes la premiere d'une part & la premiere de l'autre, la ſeconde d'une part & la ſeconde de l'autre, & ainſi de ſuite; & qu'en allant de ſuite de la premiere à la derniere, deux grandeurs de la premiere part ayent toujours le même rapport que les deux correſpondantes de la ſeconde part; la même démonſtration continuée, fera voir que la premiere d'une part, ſera toujours *par égalité* à la derniere, ou à telle autre qu'on voudra; comme la premiere de l'autre part à la derniere, ou à la correſpondante.

COROLLAIRE XV.

358. SI l'on a a, b, c d'une part, e, f, g de l'autre; & que la premiere a ſoit à la ſeconde b d'une part, comme de l'autre la ſeconde f à la troiſiéme g; & que la ſeconde b de la premiere part ſoit à la troiſiéme c, comme de l'autre la premiere e eſt à la ſeconde f; on aura (ce qu'on nomme dans les Elemens d'Euclide *par égalité troublée*) la premiere a à la troiſiéme c d'une part, comme de l'autre la premiere e à la troiſiéme g.

Démonſtration. $\frac{a}{b} = \frac{f}{g}$ donne * $ag = bf$. De même $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$ donne $bf = ce$. Donc $ag = ce$. Par conſequent * $a . c :: e . g$. *Ce qu'il falloit démontrer*. * 338. * 338.

REMARQUE.

CETTE maniere de conclure *par égalité troublée*, eſt difficile à retenir; c'eſt pourquoi quand on la trouve dans les Auteurs, il ſuffit de s'aſſurer de la concluſion $\frac{a}{c} = \frac{e}{g}$ par l'égalité du produit des extrêmes & du produit des moyens,

que l'on déduit des porportions données qui ſervent de premiſſes, ſans ſe mettre en peine de retenir cette maniere d'arranger les grandeurs données.

COROLLAIRE XVI.

359. SI l'on a quatre grandeurs qui faſſent une proportion $a . b :: c . d$; les puiſſances quelconques d'un même degré, dont on marquera l'expoſant par m, ſont auſſi une proportion; c'eſt
*338. à dire $a^m . b^m :: c^m . d^m$. Car il ſuit de $a . b :: c . d$, * que $ad = bc$ Elevant chacun de ces produits égaux à la puiſſan-
*211. ce m, on aura * $a^m d^m = b^m c^m$. Donc * $a^m . b^m :: c^m . d^m$.
*338. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE XVII.

360. D'où il ſuit que ſi $a^m . b^m :: c^m . d^m$; on aura $a . b :: c . d$; car le produit des extrêmes $a^m d^m$ étant égal à celui des moyens $b^m c^m$;
*211. les racines, dont l'expoſant eſt m, de ces produits * ſont neceſ-
*338. ſairement égales. Ainſi $ad = bc$; d'où * l'on a $a . b :: c . d$.

Ces deux derniers Corollaires conviennent auſſi aux racines quelconques. Si $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d}$, l'on aura $a . b :: c . d$; & ſi $a . b :: c . d$, l'on aura $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d}$. C'eſt la même démonſtration.

COROLLAIRE XVIII.

361. SI l'on a une progreſſion quelconque $\div\div a . b . c . d . e . f$, &c. l'on aura auſſi $\div\div a^m . b^m . c^m . d^m . e^m . f^m$, &c. & encore $\div\div \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} . \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d} . \sqrt[m]{e}$, &c. & ſi $\div\div a^m . b^m . c^m . d^m . e^m$, &c. ou bien encore ſi $\div\div \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} . \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d} . \sqrt[m]{e}$, &c. l'on aura auſſi $\div\div a . b . c . d . e$, &c. C'eſt la même démonſtration.

AVERTISSEMENT.

VOILA les propoſitions ſur les proportions des grandeurs qui ſont le plus d'uſage; il eſt inutile d'en apprendre beaucoup d'au-
*336. tres qu'on pourroit ajouter. Quand il s'en preſentera, on les
338. deduira aiſément de * l'11e & du 12e Theorêmes.

Les

Les Comparaiſons des rapports inégaux.

COROLLAIRES DE L'ONZIE'ME THEOREME *. *336.

1.

362. SI $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, l'on aura * $ad > bc$. Et ſi $ad > bc$, l'on aura * $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. * 336. * 337.

2.

363. Suppoſant $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ce qui donne * $ad > bc$, l'on aura pour les rapports *inverſes* $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ car $bc < ad$. * 336.

3.

364. On aura pour l'*alterne* $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, puiſque $ad > bc$.

4.

365. On aura *par compoſition*, ou plûtôt *par addition* $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$, car * $ad + bd > bc + bd$. * 336.

5.

366. On aura *par diviſion*, ou plûtôt *par ſouſtraction* $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$, parceque $ad - bd > bc - bd$.

6.

367. Enfin on aura *par converſion* $\frac{a}{a-b} < \frac{c}{c-d}$; car le produit des extrêmes $ac - ad$ eſt moindre que celui des moyens $ac - bc$, puiſque dans le premier le produit ad (plus grand par la ſuppoſition que bc) eſt retranché de ac, & dans le ſecond bc moindre que ad eſt retranché de la même grandeur ac.

7.

368. Si l'on a pluſieurs grandeurs d'une part $a.b.c$, & autant d'une autre $e.f.g$; & que $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$; & $\frac{b}{c} > \frac{f}{g}$. On aura *par égalité* $\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$.

Démonſtration. $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ donne l'alterne * $\frac{a}{e} > \frac{b}{f}$; & $\frac{b}{c} > \frac{f}{g}$ * 364. donne l'alterne * $\frac{b}{f} > \frac{c}{g}$: Donc $\frac{a}{e} > \frac{c}{g}$: d'où l'on tire l'alterne * 364. $\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

8.

369. Ayant d'une part a, b, c, & de l'autre e, f, g, ſuppoſant $\frac{a}{b} > \frac{f}{g}$, & $\frac{b}{c} > \frac{e}{f}$, on aura *par égalité troublée* $\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$.

*336. *Démonſtration.* $\frac{a}{b} > \frac{f}{g}$ donne * $ag > bf$; & $\frac{b}{c} > \frac{g}{f}$ donne *
*336. $bf > ce$. Donc $ag > ce$: d'où l'on déduit * $\frac{a}{c} < \frac{e}{g}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

9.

370. Si c eſt moindre que a, & d moindre que b, & qu'on ſuppoſe $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, l'on aura $\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-d}$.

Démonſtration. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ donne $ad > bc$. Cela ſuppoſé, il eſt évident que le produit des extrêmes $ab - ad$ de $\frac{a}{b}$, $\frac{a-c}{b-d}$, eſt moindre que le produit des moyens $ab - bc$.

REMARQUE.

CES propoſitions ſur la comparaiſon des rapports inégaux ſont bien de moindre uſage que celles qui ſont ſur la comparaiſon des rapports égaux. Ainſi il eſt inutile d'ajouter d'autres comparaiſons des rapports inégaux; s'il s'en préſentoit, on les déduiroit aiſément de l'11e Theorême & des Corollaires précedens; & l'on déduit même ſi facilement toutes
*336. celles qu'on vient d'expliquer de l'11e Theorême *, qu'il ſuffit de bien le retenir, comme un principe fondamental de la comparaiſon des rapports égaux & inégaux; & il eſt inutile de ſe charger la memoire des comparaiſons des rapports inégaux.

SECTION V.

Où l'on explique les rapports compoſez.

DE'FINITIONS.

1.

371. SI l'on multiplie pluſieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, les uns par les autres, leur produit $\frac{ace}{bdf}$ s'appelle *un rapport compoſé* de ces rapports, leſquels ſe nomment auſſi *les rapports compoſans*, ou les rapports *ſimples*.

Il eſt évident que ce ſeroit la même choſe, ſi l'on diſoit que le rapport du produit *ace* de tous les antecedens de pluſieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, au produit *bdf* de tous les conſé-

quents, eſt *compoſé* de tous ces rapports qui en ſont les rapports *compoſans*.

2.

372. Lorſque les rapports compoſans ſont égaux, s'il y en a deux, le rapport compoſé de ces deux rapports égaux s'appelle un rapport *doublé* de chacun de ces rapports égaux; s'il y en a trois, le rapport compoſé s'appelle *triplé* de chacun de ces rapports; s'il y en a quatre, il ſe nomme *quadruplé* de chacun de ces rapports, & ainſi de ſuite. Par exemple, ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; $\frac{ac}{bd}$ eſt un rapport doublé de $\frac{a}{b}$, ou de ſon égal $\frac{c}{d}$: $\frac{ace}{bdf}$ eſt triplé de $\frac{a}{b}$, ou de ſon égal $\frac{c}{d}$, ou de $\frac{e}{f}$: $\frac{aceg}{bdfh}$ eſt quadruplé de $\frac{a}{b}$, ou de ſon égal $\frac{c}{d}$, ou de ſon égal $\frac{e}{f}$, ou de ſon égal $\frac{g}{h}$. Il en eſt de même des autres.

REMARQUE.

QUAND tous les rapports compoſans d'un rapport compoſé ſont égaux entr'eux, on peut conſiderer le rapport compoſé, comme s'il n'étoit fait que du même rapport repeté pluſieurs fois; c'eſt à dire multiplié par lui-même pluſieurs fois. Ainſi ce rapport compoſé peut être conſideré comme un produit dont tous les multiplicateurs ſont égaux entre eux.

D'où il ſuit que ſi deux ou pluſieurs rapports ſont compoſez chacun d'un même nombre de rapports, de façon que tous les rapports compoſans de chacun ſoient égaux entre eux; ces rapports compoſez ne ſçauroient être égaux, que le rapport ſimple dont l'un eſt compoſé ne ſoit egal au rapport ſimple dont l'autre eſt compoſé. Car il eſt évident que quand deux produits ſont égaux, ſi les multiplicateurs de l'un ſont tous égaux entr'eux, & que les multiplicateurs de l'autre ſoient auſſi égaux entr'eux, & qu'il y ait un même nombre de multiplicateurs dans l'un & dans l'autre; il faut que le multiplicateur, par la répetition duquel l'un des produits eſt formé, ſoit égal au multiplicateur; par la répetition duquel, faite le même nombre de fois, l'autre produit égal eſt auſſi formé.

La propoſition qu'on vient d'expliquer dans cette remarque eſt ſi évidente, qu'on pourra la mettre pour la 2e partie du 1er axiome qui ſuivra bien-tôt.

3e DEFINITION.

373. CHACUN des rapports ſimples égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dont un rapport $\frac{ac}{bd}$ eſt doublé, s'appelle *ſoudoublé* de ce rapport $\frac{ac}{bd}$. Chacun des rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, dont un rapport $\frac{ace}{bdf}$ eſt triplé, s'appelle *ſoutriplé* de ce rapport, & ainſi des autres. On dit, par exemple, que le rapport de a à b eſt ſoudoublé du rapport de ac à bd, & que le rapport de a à b eſt ſoutriplé du rapport de ace à bdf.

4.

374. Deux produits homogenes qui ſont en rapport doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c. s'appellent *ſemblables*; ainſi ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; ac & bd ſont des produits ſemblables, & encore ace, bdf, & de même $aceg$, $bdfh$.

Les deux termes de chacun des rapports ſimples égaux qui ſont les rapports compoſans ſont nommez *relatifs* ou *homologues*. Ainſi dans les produits ſemblables $aceg$, $bdfh$, a eſt relatif à b, c à d, e à f, & g à h.

5.

375. Si deux produits homogenes ABC, abc ſont égaux, & que les dimenſions A, B, C du premier, quoiqu'inégales entr'elles, ſoient pourtant égales, la premiere A de l'un à la premiere a de l'autre; la ſeconde B à la ſeconde b; & la troiſiéme C à la troiſiéme c. On dit que les dimenſions de l'un ſont égales aux dimenſions de l'autre *chacune à chacune*, ou que les multiplicateurs ſont égaux chacun à chacun.

AXIOMES.

1.

376. LORSQUE les rapports compoſans de deux rapports compoſez d'un même nombre de rapports ſimples, ſont égaux chacun à chacun, les deux rapports compoſez ſont égaux. Car deux produits ſont égaux quand les multiplicateurs de l'un ſont égaux aux multiplicateurs de l'autre chacun à chacun.

Quand les rapports ne ſont compoſez chacun que de ſimples rapports tous égaux entr'eux; ſi deux ou pluſieurs rap-

ports compoſez chacun d'un même nombre de rapports compoſans, ſont égaux, le rapport ſimple par la répetition duquel l'un eſt compoſé eſt égal au rapport ſimple par la répetition duquel, faite le même nombre de fois, l'autre eſt auſſi compoſé.

2e AXIOME.

377. SI deux ou pluſieurs rapports ſont égaux, & que l'un ſoit compoſé d'un certain nombre de rapports compoſans ; on peut concevoir chacun des rapports égaux à ce rapport compoſé, comme étant auſſi compoſé des mêmes rapports compoſans, ou du même nombre de rapports compoſans égaux aux rapports compoſans du premier chacun à chacun. Par exemple $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. Le premier $\frac{6}{30}$ eſt compoſé des trois rapports ſimples $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$, on peut concevoir $\frac{1}{5}$ & $\frac{2}{10}$ chacun comme étant compoſé des mêmes rapports, ou de trois rapports qui leur ſoient égaux chacun à chacun.

REMARQUE.

378. QUAND on a dit qu'on pouvoit concevoir les rapports compoſez égaux, comme compoſez chacun des mêmes rapports compoſans, ou de rapports compoſans égaux, on n'a pas prétendu dire que chacun des rapports compoſans, dont eſt formé un rapport compoſé, fuſſent déterminez, & préciſément les mêmes rapports Car un même rapport compoſé, comme $\frac{1}{5}$, peut être conçu compoſé des trois rapports $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$. Il peut encore être conçu compoſé des trois rapports $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$, qui ne ſont pas égaux aux trois premiers. Mais quelque varieté qu'on puiſſe concevoir dans les rapports compoſans d'un rapport compoſé; il eſt toujours évident que deux rapports compoſez égaux peuvent auſſi être conçus compoſez d'un même nombre de rapports, de ſorte que les rapports compoſans de l'un ſoient les mêmes que les compoſans de l'autre, ou qu'ils leur ſoient égaux.

COROLLAIRES.

1.

379. DEUX produits homogenes *ab* & *cd*; *abc* & *def*; *abcd* & *efgb*, &c. ont entr'eux un rapport compoſé des rapports

qui ſont entre les dimenſions de l'un & les dimenſions de l'autre, ou entre les multiplicateurs de l'un & les multiplicateurs de l'autre. $\frac{ab}{cd} = * \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$. $\frac{abc}{def} = \frac{a}{d} \times \frac{b}{e} \times \frac{c}{f}$. $\frac{abcd}{efgh} = \frac{a}{e} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g} \times \frac{d}{h}$, &c.

* 287 & 371.

2.

380. Lorſque deux produits homogenes ont quelques-unes de leurs dimenſions égales, ils ſont entr'eux comme leurs dimenſions inégales $\frac{a^2b}{a^2c} = * \frac{b}{c}$; $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, &c.

* 109.

3.

381. Quand il y a entre deux grandeurs a & f pluſieurs grandeurs interpoſées, comme dans cette ſuite a, b, c, d, e, f, Le rapport des deux grandeurs a & f entre leſquelles il y en a pluſieurs autres d'interpoſées b, c, d, e, eſt compoſé de tous les rapports qui ſont entre les interpoſées. C'eſt à dire dans la ſuite, a, b, c, d, e, f. Le rapport $\frac{a}{f}$ eſt compoſé de tous les rapports $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$.

Démonſtration. * $\frac{abcde}{bcdef}$ eſt un rapport compoſé * de $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$, Or $\frac{abcde}{bcdef} = * \frac{a}{f}$. Par conſequent * $\frac{a}{f}$ eſt auſſi compoſé des mêmes rapports qui ſont entre les grandeurs interpoſées. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* 371. * 109. * 377.

REMARQUE.

382. ON voit par le Corollaire précedent qu'on eſt libre de faire qu'un rapport ſimple $\frac{a}{g}$ puiſſe être conçu comme compoſé de tant, & pour ainſi dire, de tels rapports qu'on voudra; car ſuppoſé qu'on veuille que $\frac{a}{g}$ puiſſe être conçu compoſé de ſix rapports; il n'y a qu'à interpoſer cinq grandeurs entre a & g, & l'on aura, par exemple, la ſuite a, b, c, d, e, f, g, & on pourra concevoir que $\frac{a}{g}$ eſt un rapport compoſé de ces ſix rapports $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}, \frac{f}{g}$. On pourroit même faire en ſorte que tous ces rapports compoſans fuſſent donnez, & tels qu'on voudroit, ſi ce n'eſt le dernier $\frac{f}{g}$ qui ſe trouveroit néceſſairement determiné.

Quoique cette maniere de faire qu'un rapport ſimple puiſſe être regardé comme compoſé de tant de rapports compoſans qu'on voudra, ſoit arbitraire, elle ne laiſſe pas

d'être d'uſage pour avoir la réſolution de pluſieurs Problêmes dans les Mathematiques.

PROBLÊME I.

383. *AYANT deux ou pluſieurs rapports compoſans, trouver le rapport qui en eſt compoſé.*

1. *Maniere.* Il n'y a qu'à multiplier tous les rapports compoſans les uns par les autres, & le produit * ſera le rapport compoſé qu'on demande. Ainſi le rapport compoſé de $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ eſt $\frac{ace}{bdf}$. *371.

2. *Maniere.* Pour avoir le rapport compoſé des deux $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, il faut faire cette proportion * $a.b :: d.\frac{bd}{a}$ On nommera p le quatriéme terme $\frac{bd}{a}$, & l'on aura $\frac{c}{p}$ pour le rapport compoſé de $\frac{a}{b}$ & de $\frac{c}{d}$. Car dans la ſuite c, d, p, le rapport $\frac{c}{p}$ * eſt compoſé de $\frac{c}{d}$ & de $\frac{d}{p}$; mais par la conſtruction $\frac{d}{p} = \frac{a}{b}$. Par conſequent $\frac{c}{p}$ eſt un rapport compoſé de $\frac{c}{d}$ & de $\frac{a}{b}$. *341. *381.

S'il y a trois rapports compoſans $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. On trouvera d'abord, comme on vient de l'enſeigner, le rapport $\frac{c}{p}$ compoſé des deux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. On fera enſuite cette proportion * $e.f :: p.\frac{fp}{e}$. On ſuppoſera $\frac{fp}{e} = q$, & l'on aura le rapport $\frac{c}{q}$ compoſé des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Car dans la ſuite c, d, p, q, le rapport $\frac{c}{q}$ eſt * compoſé de $\frac{c}{d}$, de $\frac{d}{p} = \frac{a}{b}$, & de $\frac{p}{q} = \frac{e}{f}$. *341. *381.

S'il y a quatre rapports compoſans $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, aprés avoir trouvé le rapport $\frac{c}{q}$ compoſé des trois premiers $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, on fera cette proportion $g.b :: q.\frac{bq}{g}$, & ſuppoſant $\frac{bq}{g} = r$, le rapport $\frac{c}{r}$ ſera compoſé des quatre $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$. Car dans la ſuite c, d, p, q, r, le rapport $\frac{c}{r}$ * eſt compoſé des rapports $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{p} = \frac{a}{b}$, $\frac{p}{q} = \frac{e}{f}$, & $\frac{q}{r} = \frac{g}{h}$. *341. *381.

REMARQUES.

I.

384. CETTE ſeconde methode de trouver le rapport compoſé de tant de rapports compoſans donnez qu'on voudra qui ſe pratique en interpoſant, entre une grandeur donnée, & une autre qu'on trouve par des proportions réïterées, des grandeurs telles que les rapports des grandeurs interpoſées ſoient égaux aux rapports propoſez chacun à chacun; cette

methode, dis-je, de trouver un rapport composé de rapports simples donnez, est celle que l'on suit ordinairement dans la Geometrie & dans les Sciences Mathematiques où l'on employe les figures de la Geometrie.

2.

385. Cette methode a ces deux commoditez, 1°. En supposant que chacun des termes des rapports composans représente une ligne droite, chaque proportion de l'operation faisant aussi trouver pour quatriéme terme une ligne droite, la premiere & la derniere grandeur entre lesquelles sont interposées les grandeurs qu'on trouve, ne sont chacune qu'une ligne droite, aussi bien que chacune des interposées, & cette, premiere & derniere grandeur étant représentées chacune par une seule lettre, le rapport composé de tant de rapports composans qu'on voudra n'est exprimé que par deux lettres, l'une au numerateur, & l'autre au dénominateur, ce qui rend l'expression du rapport composé la plus simple qu'il se puisse. Par exemple, on a vû que le rapport composé $\frac{acfg}{bdfh}$ se reduit à $\frac{c}{r}$.

3.

386. 2°. On peut diversifier l'expression la plus simple d'un rapport composé de plusieurs rapports donnez, de differentes manieres toutes équivalentes, parmi lesquelles on a la liberté de choisir celles qui peuvent être les plus commodes pour la résolution des Problêmes.

Pour faire clairement concevoir aux Commençans la maniere de trouver ces differentes expressions simples équivalentes d'un rapport composé de plusieurs rapports, on leur fera remarquer qu'on peut prendre celle qu'on voudra des grandeurs données dans les rapports composans donnez, pour le premier terme du rapport composé qu'on cherche. Par exemple, si l'on veut qu'un des numerateurs duquel on voudra des rapports composans $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$, soit pris pour le premier terme du rapport composé qu'on cherche, & que ce soit, par exemple a, on fera ces proportions les unes aprés les autres. 1re, $c.d :: b.p.$ 2e, $e.f :: p.q.$ 3e, $g.h :: q.r$, & l'on aura $\frac{a}{r}$ pour le rapport composé qu'on cherche. Car
*381. dans la suite a, b, p, q, r, le rapport $\frac{a}{r}$ * est composé de $\frac{a}{b}, \frac{b}{p} = \frac{c}{d}, \frac{p}{q} = \frac{e}{f}, \frac{q}{r} = \frac{g}{h}$.

Si

Si l'on veut que le premier terme du rapport composé qu'on cherche soit l'un des dénominateurs des rapports composans donnez. Par exemple b, on fera par ordre ces proportions. 1re, $d.c :: a.p.$ 2e, $f.e :: p.q.$ 3e, $b.g :: q.r$. Et le rapport composé qu'on cherche sera $\frac{r}{b}$. Car dans la suite $r.q.p.a.b$, on aura (à cause des rapports inverses) $\frac{r}{b}$ pour le rapport composé * de $\frac{r}{q} = \frac{c}{b}$, $\frac{q}{p} = \frac{e}{d}$, $\frac{p}{f}$, $\frac{f}{a} = \frac{c}{d}$ & $\frac{a}{b}$. * 381.

REMARQUE IV.

387. ON peut même prendre une grandeur telle qu'on voudra pour le premier terme ou pour le second terme du rapport composé qu'on cherche (ce qui peut servir en quelques résolutions de Problêmes, & en quelques démonstrations) par exemple, supposé qu'on prenne une grandeur arbitraire n pour le premier terme du rapport qu'on cherche, on fera par ordre ces proportions. 1re, $a.b :: n.p.$ 2e, $c.d :: p.q.$ 3e, $e.f :: q.r.$ 4e, $g.b :: r.s$. Et le rapport composé qu'on cherche sera $\frac{n}{s}$. Car dans la suite n, p, q, r, s * on aura $\frac{n}{s}$ pour le rapport composé de $\frac{n}{p} = \frac{a}{b}$; $\frac{p}{q} = \frac{c}{d}$; $\frac{q}{r} = \frac{e}{f}$; $\frac{r}{s} = \frac{g}{b}$. * 381.

PROBLÊME II.

388. *AYANT un rapport composé $\frac{a}{m}$ de plusieurs rapports, supposé que tous les rapports composant soient donnez, excepté un seul, trouver le rapport composant qui n'est pas donné.*

C'est à dire, quand le rapport $\frac{a}{m}$ n'est composé que de deux rapports, & que l'un des deux composans est donné, par exemple $\frac{c}{d}$, il faut trouver l'autre.

Quand le rapport $\frac{a}{m}$ est composé de trois rapports, & qu'on en suppose deux donnez, par exemple $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ou que le rapport $\frac{c}{p}$ composé des deux rapports donnez est connu, l'on cherche le troisiéme, & ainsi des autres.

1. *Maniere*. Il faut diviser le rapport composé donné $\frac{a}{m}$ par le rapport donné $\frac{c}{d}$, s'il n'est composé que de deux rapports; par le rapport composé $\frac{ce}{df}$ de tous les rapports composans donnez, si $\frac{a}{m}$ est composé de plusieurs rapports, & le quotient $\frac{ad}{cm}$ dans le premier cas, $\frac{adf}{cem}$ dans le second cas, sera le rapport composant qu'il falloit trouver. Car il est évident

qu'en multipliant par le quotient qu'on vient de trouver $\frac{ad}{cm}$, * 107 & 371. le rapport compoſant donné $\frac{c}{d}$, le produit * ſera le rapport compoſé $\frac{a}{m}$ de ces deux rapports $\frac{c}{d}$, $\frac{ad}{cm}$. C'eſt la même démonſtration quand le rapport eſt compoſé de pluſieurs rapports.

2. *Maniere*. Pour trouver le ſecond rapport compoſant du rapport $\frac{a}{m}$ compoſé de deux rapports dont le premier $\frac{c}{d}$ eſt * 341. donné, on ſera cette proportion * $c. d :: a. p$, & $\frac{p}{m}$ ſera le rapport compoſant qu'on cherche. Car dans cette ſuite a, * 381. p, m, le rapport de $\frac{a}{m}$ eſt compoſé * des deux rapports $\frac{a}{p}$ & $\frac{p}{m}$; mais par la conſtruction $\frac{a}{p} = \frac{c}{d}$ eſt celui des rapports compoſans qui eſt donné. Donc $\frac{p}{m}$ eſt l'autre que l'on cherchoit.

* 341. Ou bien on ſera cette proportion * $d. c :: m. q$, & $\frac{a}{q}$ ſera le rapport qu'on cherchoit. Car dans la ſuite a, q, m, le rapport * 381. $\frac{a}{m}$ eſt compoſé * des deux rapports $\frac{a}{q}$ & $\frac{q}{m}$; mais par la ſuppoſition $\frac{q}{m} = \frac{c}{d}$; par conſequent $\frac{a}{q}$ eſt le ſecond rapport compoſant.

Si $\frac{a}{m}$ eſt compoſé de trois rapports, & qu'on en ait deux donnez $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ou que l'on ait le rapport $\frac{c}{p}$ compoſé de ces deux là; * 383. 2e maniere. pour trouver le troiſiéme, 1°, * on reduira les deux rapports compoſans $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ au rapport $\frac{c}{p}$ qui en eſt compoſé s'ils n'y * 341. ſont pas réduits. 2°. On ſera cette proportion * $c. p :: a. q$, ou celle-ci $p. c :: m. r$. Dans le 1er cas $\frac{q}{m}$ eſt le 3e rapport compoſant qu'on cherche; & dans le 2e cas, c'eſt $\frac{a}{r}$. Car dans le 1er cas on aura, à cauſe de la ſuite a, q, m, le rapport $\frac{a}{m}$ * 381. compoſé des rapports * $\frac{a}{q}$, $\frac{q}{m}$; mais $\frac{a}{q}$ eſt par la ſuppoſition égal au rapport $\frac{c}{p}$ compoſé des deux rapports compoſans donnez; par conſequent $\frac{q}{m}$ eſt le 3e rapport compoſant de $\frac{a}{m}$. Dans le 2e cas, on aura, à cauſe de la ſuite a, r, m, le rapport * 381. $\frac{a}{m}$ compoſé * $\frac{a}{r}$ & de $\frac{r}{m}$; mais $\frac{r}{m}$ eſt égal à $\frac{c}{p}$, c'eſt à dire au produit des deux rapports donnez; par conſequent $\frac{a}{r}$ eſt le 3e rapport compoſant qu'on cherchoit.

Cela ſuffit pour faire connoître la maniere de trouver le ſeul rapport compoſant inconnu qu'on cherche, lorſque tous les autres rapports compoſans d'un rapport compoſé donné $\frac{a}{m}$, ſont connus. Si un ſeul rapport compoſant de $\frac{a}{m}$ étoit connu, la même methode feroit découvrir le rapport compoſé des autres rapports ſimples dont $\frac{a}{m}$ eſt compoſé.

Uſage des rapports compoſez dans le Commerce.

AVERTISSEMENT.

ON trouve dans le Commerce une infinité d'exemples qui dépendent des rapports compoſez. On n'en mettra ici, comme en paſſant, que de deux ſortes pour faire voir l'uſage des rapports compoſez dans le Commerce, parceque l'on n'a en vûe, en ce Traité du calcul, que l'uſage qu'il doit avoir pour apprendre à fond les Mathematiques. Les exemples de la 1re ſorte ſont ceux où ayant tous les rapports compoſans d'un rapport compoſé, & un des deux termes d'un rapport qui lui eſt égal, il faut trouver l'autre terme. C'eſt ce qu'on nomme *la regle de trois compoſée*. Par exemple, 2000 livres rapportent en trois années 100 écus de rente, on demande combien 8000 livres donneront de rente en 12 années? On cherche dans cet exemple un nombre inconnu d'écus qui ait avec 100 écus un rapport égal au rapport compoſé des deux rapports compoſans le premier de 8000 liv. à 2000 liv. le ſecond de 12 années à 3 années. Les exemples de la 2e ſorte ſont ceux dans leſquels il s'agit de partager un nombre donné en un nombre déterminé de parties qui ayent entr'elles des rapports égaux à des rapports compoſez dont les rapports compoſans ſont donnez. C'eſt ce qu'on nomme *la regle de ſocieté ou de compagnie compoſée*. Par exemple ſi trois perſonnes ayant fait une ſocieté, ont mis chacun une certaine ſomme, ce qui fera les trois ſommes a, b, c; que le premier n'ait mis a que pour un temps d, le ſecond ait mis b pour un autre temps e, le troiſiéme ait mis c pour un autre temps f, & qu'il y ait eu un profit P, il faut partager ce profit P en trois parties inconnues x, y, z, qui ayent entre elles des rapports $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ égaux aux rapports compoſez, dont le premier a pour rapports compoſans $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{e}$; le ſecond $\frac{b}{c}$, $\frac{e}{f}$.

La Regle de trois compoſée.

PROBLÊME.

TOUS les rapports compoſans d'un rapport compoſé étant donnez, un ſeul terme étant auſſi donné d'un rapport égal à ce rapport compoſé, trouver l'autre terme de ce rapport égal.

Regle ou *Operation*. Il faut apporter toute l'attention neceſſaire pour bien diſtinguer par l'état de la queſtion, tous les termes des rapports compoſans dont le rapport compoſé doit être formé, & le terme ſeul connu du rapport qui lui eſt égal dont on cherche l'autre terme. Après quoi on arrangera facilement les termes de cette maniere.

On ſuppoſera, pour une plus grande clarté, que le terme qu'on cherche eſt repréſenté par x, l'autre terme du même rapport par e, les antecedens donnez des rapports compoſans par a & c, leurs conſequents par b & d. Ainſi l'on aura $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{x}$.

Le terme x qu'on cherche ſera mis le dernier dans la 4e place. On mettra dans la 2e ou 3e place le terme connu e, qui eſt l'antecedent du rapport dont le terme x qu'on cherche eſt le conſequent. On écrira les uns ſous les autres dans la premiere place tous les antecedens a, c des rapports compoſans, & dans la 2e ou 3e place tous leurs conſequents b, d, les uns ſous les autres. Enſuite on multipliera tous les antecedens de la premiere place, & leur produit ac ſera le premier terme d'une regle de proportion ſimple; on prendra le produit bd de tous leurs conſequens qui ſont dans la 2^e ou 3^e place, le produit bd ſera le 2^e ou 3^e terme de la regle de trois ſimple. Le terme connu e du rapport dont on cherche l'autre terme, ſera le 2e ou 3e terme de la regle de trois ſimple. Enfin on prendra le produit bde du 2e & du 3e terme de la regle de trois ſimple, qu'on diviſera par le premier terme ac, & le quotient $\frac{bde}{ac}$ ſera le terme x qu'on cherche.

EXEMPLE I.

2000 liv. (a) rapportent en 3 années (c) 100 écus (e); on demande le nombre d'écus x, que donneront 8000 liv. (b) en 12 années (d).

Arrengement des termes de la regle de trois compoſée.

$$\begin{matrix} 2000\ (a) & 8000\ (b) \\ 3\ (c) & 12\ (d) \end{matrix} :: 100\ (e).\ x.$$

Regle de trois ſimple.

$6000\ (ac).\ 96000\ (bd) :: 100\ (e).\ x = 1600$ écus $(\frac{bde}{ac})$.

La démonſtration eſt évidente par le calcul litteral; car

par l'état de la queſtion $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{x}$; d'où il ſuit que $x = \frac{bde}{ac}$. Ainſi la regle fait découvrir le terme x que l'on cherche du rapport $\frac{e}{x} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

REMARQUE.

ON peut reduire tous les Exemples de la regle de trois compoſée, à pluſieurs regles des trois ſimples. Pour faire cette reduction dans l'Exemple précedent, on dira: Si 2000 liv. *(a)* rapportent en un certain temps (qui eſt ici celui de 3 ans) 100 écus *(e)*; quel eſt le nombre inconnu *y* d'écus que rapporteront 8000 liv. *(b)* dans le même temps (qui eſt celui de 3 ans) ? L'on fera donc cette proportion * 2000 *(a)*. 8000 *(b)* :: 100 *(e)*. $y = \frac{be}{a} = 400$. Ainſi l'on trouvera pour 4e terme 400 écus $= \frac{be}{a}$. On dira enſuite, en 3 ans *(c)* une certaine ſomme (qui eſt 8000 liv.) rapporte 400 écus $(\frac{be}{a})$; en 12 ans *(d)*; quel nombre d'écus *(x)* rapportera la même ſomme 8000 liv. * & l'on fera cette proportion * 3 *(c)*. 12 *(d)* :: 400 $(\frac{be}{a})$. $x = \frac{bed}{ac} = 1600$. Ainſi le terme *x* que l'on cherchoit eſt 1600 écus, comme on l'avoit trouvé dans l'Exemple. * 341. * 341.

Voici la raiſon pourquoi on a mis cette maniere de reduire la regle de trois compoſée, à pluſieurs ſimples. Il y a des cas où l'on cherche le terme *x* d'un rapport dont l'autre terme *(e)* eſt connu, lequel rapport eſt égal à un rapport compoſé dont tous les rapports compoſants ſont donnez; mais il y a parmi ces rapports compoſants donnez des rapports inverſes, & ces rapports compoſants inverſes qui ſont connus, & qui entrent dans la regle de trois compoſée, lui font donner le nom de regle de trois compoſée inverſe. Dans ces cas il y a une regle pour trouver le terme inconnu qu'on cherche ; mais comme elle pourroit embaraſſer les Commençans, on a cru qu'il valoit mieux leur apprendre à reduire tous les Exemples des regles de trois compoſées, tant ceux qui ne contiennent que des rapports compoſants directs, que ceux qui en contiennent d'inverſes, à de ſimples proportions: ce qui ne ſçauroit jamais embaraſſer ; on en va mettre une Exemple.

EXEMPLE II.

100 Soldats *(a)* dépenſent 40 écus *(c)* en 3 jours *(e)*, en quel nombre *(x)* de jours 10000 Soldats *(b)* dépenſeront-ils 200000 écus *(d)*?

Sans ſe mettre en peine ſi cet Exemple contient une regle de trois compoſée droite ou inverſe, on le reduira en proportions droites ſimples, en diſant, 1°. 100 Soldats (*a*) dépenſent 40 écus (*c*) en un certain temps (qui eſt dans cet Exemple 3 jours), quel nombre *y* d'écus dépenſeront 10000 Soldats (*b*) dans le même temps (de trois jours)? La premiere proportion ſimple ſera donc 100 (*a*). 10000 (*b*) :: 40 (*c*). $y = \frac{bc}{a} = 4000$. C'eſt à dire que 10000 Soldats dépenſeroient dans le temps (de 3 jours) 4000 écus. 2°. On dira enſuite, un certain nombre de Soldats (qui eſt dans cet Exemple 10000) dépenſent 4000 écus ($\frac{bc}{a}$) en trois jours (*e*); en quel nombre *x* de jours depenſeront-ils 200000 écus (*d*)? Et la ſeconde proportion ſimple ſera 4000 ($\frac{bc}{a}$). 200000 (*d*) :: 3 (*e*). $x = \frac{ade}{bc} = 150$. C'eſt à dire, on trouve pour le 4e terme *x* (qui eſt celui qu'on cherche dans la queſtion) 150 jours.

*341.

*341.

La Regle de Compagnie compoſée.

PROBLÊME.

PARTAGER un nombre donné p *en un nombre déterminé de parties inconnues, par exemple en trois parties* x, y, z, *de maniere que les rapports de ces parties* $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, *ſoient egaux à des rapports compoſez dont les rapports compoſans ſont donnez, par exemple, que* $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{e}$, & $\frac{y}{z} = \frac{b}{c} \times \frac{e}{f}$. *D'où il eſt clair qu'il faut auſſi que* $x + y + z = p$.

On voit par l'état de la queſtion que *x*. *y* :: *ad*. *be*, & *y*. *z* :: *be*. *cf*. D'où l'on a les alternes *x*. *ad* :: *y*. *be* :: *z*. *cf*.

Pour mieux faire concevoir la maniere de reſoudre le Problême, on l'appliquera à un Exemple. Trois perſonnes ont fait une ſocieté: le premier a mis 10 piſtoles (*a*) pour 2 mois (*d*); le ſecond a mis 20 piſtoles (*b*) pour 3 mois (*e*); le 3e a mis 30 piſtoles (*c*) pour quatre mois (*f*). Ils ont eu de profit 300 liv. (*p*); il faut partager ce profit en trois parties que l'on cherche *x*, *y*, *z*, de maniere que *x* ſoit à *y* en rapport compoſé du rapport ſimple qui eſt entre *a* & *b*, & du rapport ſimple qui eſt entre *d* & *e*; & que *y* ſoit à *z* en rapport compoſé du rapport ſimple qui eſt entre *b* & *c*, & du rapport ſimple qui eſt entre *e* & *f*.

Réſolution du Problême. Il faut multiplier l'argent que chacun a mis par le temps pour lequel il l'a mis. Faire de la ſomme des produits $ad + be + cf$ le premier terme d'une proportion, le profit p doit être le ſecond terme. Mettre ſucceſſivement pour 3e terme chacun des produits ad, be, cf de l'argent par le temps; enfin faire autant de regles de trois ſimples qu'il y a de perſonnes; & les quatriémes termes que l'on trouvera ſeront les nombres qu'on cherche. En voici l'exemple figuré.

	10 piſtoles (a)	20 piſtoles (b)	30 piſtoles (c)
	2 mois (d)	3 mois (e)	4 mois (f)
produits	20 (ad)	60 (be)	120 (cf)

$$200\,(ad+be+cf).\,300\,(p)::\begin{cases} 20\,(ad).\ 30\left(\frac{adp}{ad+be+cf}\right)=x \\ 60\,(be).\ 90\left(\frac{bep}{ad+be+cf}\right)=y \\ 120\,(cf).\ 180\left(\frac{cfp}{ad+be+cf}\right)=z \end{cases}$$

Démonſtration. L'operation litterale fait voir que les parties x, y, z, qu'on trouve par la regle, ont entr' elles les rapports que renferme l'état de la queſtion, & que leur ſomme $x + y + z = p$.

AVERTISSEMENT.

Il eſt inutile de donner ici les regles que l'on trouve dans les Arithmetiques pratiques pour le Commerce. Ce Traité du calcul étant fait pour l'Analyſe, qui eſt la ſcience d'employer le calcul à la réſolution des Problêmes des Mathematiques, & à découvrir dans ces ſciences tout ce qu'on peut déſirer d'en ſçavoir; quand les Lecteurs auront appris l'Analyſe, ils ſçauront d'eux-mêmes réſoudre les queſtions qui peuvent ſe rencontrer dans le Commerce, ſans avoir beſoin des regles qu'on en donne dans les Arithmetiques ordinaires.

Des rapports compoſez, dont tous les rapports compoſans ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV.

389. Le rapport qui eſt entre deux grandeurs quarrées $\frac{a^2}{b^2}$ * eſt doublé du rapport des racines $\frac{a}{b}$; le rapport qui eſt entre

* 372.

deux 3es puiſſances $\frac{a^3}{b^3}$, eſt triplé du rapport des racines $\frac{a}{b}$; le rapport $\frac{a^4}{b^4}$ eſt quadruplé du rapport $\frac{a}{b}$; & ainſi de ſuite: Car $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, &c.

*121. Le rapport $\frac{a}{b}$ * eſt ſoudoublé du rapport $\frac{a^2}{b^2}$, ſoutriplé de $\frac{a^3}{b^3}$, ſouquadruplé de $\frac{a^4}{b^4}$, & ainſi de ſuite. De même $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ eſt ſoudoublé du rapport $\frac{a}{b}$; $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ en eſt ſoutriplé; $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{b}}$ en eſt ſouquadruplé, & ainſi de ſuite. Ou ce qui revient au même $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$ eſt ſoudoublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$ en eſt ſoutriplé, & ainſi de ſuite. Car il eſt évident que le quarré de $\sqrt[3]{a}$ ou de $a^{\frac{1}{2}}$ eſt a, celui de $\sqrt[3]{b}$ ou de $b^{\frac{1}{2}}$ eſt b; ainſi $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{b}$; de même $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{b}$. Il en eſt de même des autres.

Les Commençans doivent faire attention, que $\sqrt[3]{a}$ eſt un
*145. ſigne qu'on a déterminé * à marquer la racine 2e de a; que $\sqrt[3]{a}$ en marque la racine 3e; & qu'en general $\sqrt[n]{a}$ marque la racine de a, dont l'expoſant eſt un nombre entier quelconque repréſenté par n; & qu'elever une racine à la puiſſance dont elle eſt la racine, n'eſt autre choſe que de trouver cette puiſſance même. Par exemple, ſi l'on veut élever $\sqrt[3]{4}$ à la 2e puiſſance, on doit neceſſairement trouver la puiſſance même 4, dont $\sqrt[3]{4}$ exprime la racine 2e. Si l'on veut élever $\sqrt[3]{8}$ à la troiſiéme puiſſance, on trouvera neceſſairement 8 pour la 3e puiſſance, dont $\sqrt[3]{8}$ eſt la racine 3e. En general ſi l'on veut élever $\sqrt[n]{a}$ à la puiſſance n, on doit écrire a pour la puiſſance n qui a $\sqrt[n]{a}$ pour ſa racine.

Le rapport $\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}}$ eſt ſoudoublé du rapport $\frac{a^3}{b^3}$; $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}$ eſt ſoutriplé de $\frac{a^2}{b^2}$, &c. ou ce qui eſt la même choſe $\frac{a^{\frac{2}{2}}}{b^{\frac{2}{2}}}$ eſt ſoudoublé de $\frac{a^3}{b^3}$, &c. $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ eſt ſoutriplé de $\frac{a^2}{b^2}$, &c.

En

En general, ſi l'on ſuppoſe que n repréſente un nombre entier quelconque, ou un nombre rompu quelconque, $\frac{a^n}{b^n}$ ſera l'expreſſion generale de tout rapport compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{a}{b}$, qu'il y a d'unitez dans le nombre n, quand n eſt un nombre entier ; & de tout rapport ſoudoublé, ſoutriplé, ſouquadruplé du rapport $\frac{a}{b}$, & ainſi à l'infini, en ſuppoſant que n repréſente ſucceſſivement tous les nombres rompus dont l'unité eſt le numerateur ; enfin de tout rapport ſoudoublé, ſoutriplé, ſouquadruplé, &c. de $\frac{a}{b}$ élevé à telle puiſſance qu'on voudra, en ſuppoſant que n repréſente un nombre rompu tel qu'on voudra, dont le numerateur eſt different de l'unité auſſi-bien que le dénominateur.

On peut auſſi ſéparer les expreſſions de ces trois cas, de ces trois manieres. Le premier cas ſera exprimé par $\frac{a^n}{b^n}$. Le 2e cas par $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$. Le 3e cas par $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$. Dans le 1er cas, $\frac{a^n}{b^n}$ eſt compoſé d'autant de rapports ſimples égaux à $\frac{a}{b}$, qu'il y a d'unitez dans le nombre entier n. Dans le 2e cas, $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ marque le rapport ſimple par la répetition duquel autant de fois qu'il y a d'unitez dans le nombre entier quelconque n, eſt formé le rapport compoſé $\frac{a}{b}$. C'eſt à dire, $\frac{a}{b}$ eſt compoſé du rapport $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ repeté autant de fois qu'il y a d'unitez dans n. Dans le troiſiéme cas, $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ eſt le rapport ſimple par la répetition duquel autant de fois qu'il y a d'unitez dans un nombre entier quelconque repréſenté par m, eſt formé le rapport compoſé $\frac{a^n}{b^n}$; c'eſt à dire $\frac{a^n}{b^n}$ eſt compoſé autant de fois du rapport ſimple $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ qu'il y a d'unitez dans le nombre entier m.

Cette 3e expreſſion $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$ peut auſſi exprimer un rapport compoſé du rapport ſimple $\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$ repeté autant de fois qu'il y a d'unitez dans le nombre entier quelconque n.

Ce trois expreſſions peuvent, comme on l'a expliqué, ſe réunir dans la ſeule expreſſion $\frac{a^n}{b^n}$, en ſuppoſant, par rapport à la premiere, que n repréſente un nombre entier quelconque; par rapport à la 2e, que n repréſente une fraction quelconque dont l'unité eſt le numerateur; par rapport à la 3e, que n repréſente une fraction dont les deux termes ſont chacun un nombre entier quelconque.

COROLLAIRE V.

390. DEUX produits homogenes * *ſemblables* ont entr'eux un
*374. rapport doublé du rapport ſimple qui eſt entre leurs dimenſions relatives, ou entre leurs multiplicateurs relatifs, s'ils ſont chacun de deux dimenſions, ils ont un rapport triplé du même rapport compoſant s'ils ſont chacun de trois dimenſions, quadruplé s'ils ſont de quatre dimenſions, & ainſi de ſuite.

*374. Par exemple, ſi ab & cd ſont ſemblables; c'eſt à dire, ſi * $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{ab}{cd}$ eſt un rapport doublé de $\frac{a}{c}$, ou de ſon égal $\frac{b}{d}$. Si abc, def ſont ſemblables, c'eſt à dire ſi $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, $\frac{abc}{def}$ eſt un rapport triplé de $\frac{a}{d}$, ou de $\frac{b}{e}$, ou de $\frac{c}{f}$, & ainſi des autres. Car par la ſuppoſition $\frac{ab}{cd}$, $\frac{abc}{def}$, $\frac{abcd}{efgh}$, &c. ſont des produits des rapports égaux $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f} \cdot \frac{a}{e}, \frac{b}{f}, \frac{c}{g}, \frac{d}{h}$. Donc le premier
*372. * eſt doublé, le ſecond triplé, le troiſiéme quadruplé & ainſi de ſuite, de chacun des rapports égaux dont ils ſont les produits.

COROLLAIRE VI.

391. DEUX produits homogenes ſemblables ſont entr'eux comme les puiſſances du même degré de leurs dimenſions relatives, ou de leurs multiplicateurs relatifs.

Par exemple, ſi ab & cd ſont ſemblables, $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}$. Si abc & def ſont ſemblables $\frac{abc}{def}=\frac{a^3}{d^3}=\frac{b^3}{e^3}=\frac{c^3}{f^3}$, & ainſi des autres. Car par la ſuppoſition $\frac{ab}{cd}$ & $\frac{a^2}{c^2}$, $\frac{abc}{def}$ & $\frac{a^3}{d^3}$, &c. ſont compoſez d'un même nombre de rapports égaux. Par conſequent * ce ſont des rapports compoſez égaux. *376.

Corollaire VII.

392. Cela eſt cauſe que quand des produits homogenes ſont ſemblables, on dit ordinairement qu'ils ſont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez relatifs, ou de leurs dimenſions relatives, s'ils ſont de deux dimenſions; comme les cubes de leurs côtez relatifs, s'ils ſont de trois dimenſions, &c.

Corollaire VIII.

393. De même lorſque les deux termes a & b d'un rapport $\frac{a}{b}$ ſont en rapport ſoudoublé, ou ſoutriplé, ou ſouquadruplé, &c. de $\frac{c}{d}$, on dit que a & b ſont entr'eux comme les racines 2es, 3es, &c. de c & d; ce qui s'exprime ainſi $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$ $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}}$, &c. ou bien $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}}$, &c. & en general $\frac{a}{b}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, en ſuppoſant que n repréſente un nombre entier quelconque. Car par la ſuppoſition $\frac{c}{d}$ eſt compoſé d'autant de rapports égaux au rapport ſimple $\frac{a}{b}$ que le nombre n contient d'unitez. Or $\frac{c}{d}$ eſt auſſi compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}=\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$ que * le nombre n contient d'unitez. Il faut donc que le rapport ſimple $\frac{a}{b}$ ſoit égal au rapport ſimple $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$; puiſque le produit d'autant de rapports égaux à $\frac{a}{b}$ qu'il y a d'unitez dans n, eſt égal au produit qui vient de la *389.

multiplication d'autant de rapports $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}, \frac{e^{\frac{1}{n}}}{f^{\frac{1}{n}}}, \frac{g^{\frac{1}{n}}}{h^{\frac{1}{n}}}$, &c. qu'il y a d'unitez dans le même nombre n.

COROLLAIRE IX.

394. LORSQUE deux ou plusieurs rapports sont égaux $a.\ b :: c.\ d :: e.\ f$, &c. les rapports formez de suite des puissances des termes du même degré, ou qui ont le même exposant, sont égaux; comme aussi les rapports formez des racines qui ont le même exposant sont égaux. C'est à dire, $a^n.\ b^n :: c^n.\ d^n :: e^n.\ f^n$ &c. comme aussi $a^{\frac{1}{n}}.\ b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}}.\ d^{\frac{1}{n}} :: e^{\frac{1}{n}}.\ f^{\frac{1}{n}}$ &c.

Car il est évident que les rapports des puissances sont des rapports composez du même nombre de rapports composans égaux, ainsi ils sont égaux; & que les rapports des racines sont les rapports composans dont les rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ &c. sont composez; & chacun en est composé d'un même nombre; par conséquent ces rapports composans sont égaux.

COROLLAIRE X.

395. D'où il suit que si l'on a une progression geometrique $\div\div a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$ &c. l'on aura la progression geometrique $\div\div a^n.\ b^n.\ c^n.\ d^n.\ e^n.\ f^n.$ &c. & encore $\div\div a^{\frac{1}{n}}.\ b^{\frac{1}{n}}.\ c^{\frac{1}{n}}.\ d^{\frac{1}{n}}.\ e^{\frac{1}{n}}.\ f^{\frac{1}{n}}$ &c. & encore $\div\div a^{\frac{n}{m}}.\ b^{\frac{n}{m}}.\ c^{\frac{n}{m}}.\ d^{\frac{n}{m}}.\ e^{\frac{n}{m}}.\ f^{\frac{n}{m}}$ &c.

COROLLAIRE XI.

396. LES produits des termes correspondans de deux proportions, sont aussi une proportion; & les produits des termes correspondans de deux ou de plusieurs progressions, sont aussi une progression. Par exemple, si $a.\ b :: c.\ d$, & $e.\ f :: g.\ h$. L'on aura $ae.\ bf :: cg.\ dh$. Car $\frac{ae}{bf}, \frac{cg}{dh}$ sont chacun composé du même nombre de rapports égaux: Et si $\div\div a.\ b.\ c.\ d.\ e$ &c. & $\div\div g.\ h.\ i.\ k.\ l.$ &c. L'on aura $\div ag.\ bh.\ ci.\ dk.\ el.$ &c. Car les rapports $\frac{ag}{bh}, \frac{bh}{ci}, \frac{ci}{dk}, \frac{dk}{el}$ &c. sont composez chacun du même nombre de rapports égaux.

COROLLAIRE XII.

397. EN toute progreſſion geometrique ÷ *a. b. c. d. e. f* &c. le rapport $\frac{p}{q}$ de l'un des termes qu'on nommera *p* à un autre terme qu'on nommera *q*, eſt doublé du rapport $\frac{a}{b}$ qui regne dans la progreſſion s'il y a un terme d'interpoſé entre *p* & *q*; le rapport $\frac{p}{q}$ eſt triplé du rapport qui regne dans la progreſſion s'il y a deux termes interpoſez entre *p* & *q*; il ſera quadruplé, s'il y a trois termes d'interpoſez, & ainſi à l'infini.

Car s'il y a un terme interpoſé entre *p* & *q*, le rapport $\frac{p}{q}$ * * 381. eſt compoſé de deux rapports égaux; s'il y en a trois, il eſt compoſé de trois rapports égaux, &c. Ainſi le rapport du premier terme *a* au troiſiéme *c* eſt doublé, du premier *a* au quatriéme *d* eſt triplé, &c.

COROLLAIRE XIII.

398. D'où il ſuit qu'en prenant dans une progreſſion le 1er terme, le 3e, le 5e, le 7e, & ainſi de ſuite, l'on aura encore une progreſſion; & qu'en general, les termes pris de ſuite, entre leſquels il y a un égal nombre de termes interpoſez, ſont en progreſſion: Car ce ſera un même rapport qui regnera entre tous les termes.

COROLLAIRE XIV.

399. DANS une progreſſion geometrique le rapport d'un terme *p* à un autre terme *q*, entre leſquels il y a un terme interpoſé, eſt égal au rapport des quarrez de deux termes conſecutifs $\frac{a^2}{b^2}$; s'il y a deux termes interpoſez, $\frac{p}{q}$ eſt égal au rapport des 3es puiſſances $\frac{a^3}{b^3}$ de deux termes conſecutifs; s'il y a trois termes d'interpoſez, $\frac{p}{q}$ eſt égal au rapport des 4es puiſſances $\frac{a^4}{b^4}$ de deux termes conſecutifs. En general ſi l'on ſuppoſe que *n* marque le nombre quelconque des termes interpoſez entre deux termes *p* & *q* de la progreſſion, l'on aura $\frac{p}{q} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.

Car $\frac{p}{q}$ eſt compoſé d'autant de rapports compoſans égaux qu'il y a d'unitez dans le nombre des termes interpoſez plus un. Mais en élevant deux termes conſecutifs tels qu'on vou-

*389 à la fin. dra, comme a & b à la puiſſance $n+1$, $\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$ ſera * un rapport compoſé du même nombre de rapports compoſans égaux ; par conſequent $\frac{p}{q} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.

PROBLÈME.

400. *UN rapport $\frac{a}{b}$ étant donné, trouver le rapport qui en eſt doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c.*

Il n'y à qu'à élever $\frac{a}{b}$ au quarré, à la 3e puiſſance, à la 4e puiſſance, &c. & l'on aura $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, &c. pour le * 389. rapport * doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c. du rapport $\frac{a}{b}$.

Autre maniere, par le moyen des grandeurs interpoſées. * 346. Il faut trouver, les deux grandeurs a & b étant données pour les premiers termes d'une progreſſion, le 3e terme qu'on nommera x, ſi l'on veut un rapport doublé ; le 4e qu'on nommera y, ſi l'on veut un rapport triplé ; le 5e z, ſi l'on * 397. veut un rapport quadruplé, &c. Car il eſt évident * que $\frac{a}{x}$ ſera un rapport doublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{y}$ en ſera triplé ; $\frac{a}{z}$ en ſera quadruplé, &c.

Ou bien ſi l'on veut, on pourra prendre b pour le premier terme, & a pour le ſecond terme d'un progreſſion, * 346. & on trouvera * le 3e terme qu'on nommera u ; le 4e qu'on nommera t ; le 5e qu'on nommera s, &c. & il eſt évident * 397. que * dans la progreſſion $\div$ &c. $s . t . v . a . b$, le rapport $\frac{v}{t}$ ſera doublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{t}{b}$ en ſera triplé ; $\frac{s}{b}$ en ſera quadruplé, &c.

PROBLÈME.

401. *UN rapport compoſé $\frac{a}{b}$ étant donné, trouver le rapport compoſant dont $\frac{a}{b}$ eſt doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c.*

Il faut prendre la racine quarrée $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ de $\frac{a}{b}$, ſi l'on veut le * 389. rapport dont * $\frac{a}{b}$ eſt doublé ; la racine 3e $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, ſi l'on veut le rapport dont $\frac{a}{b}$ eſt triplé ; $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$ ſi l'on veut le rapport dont

$\frac{a}{b}$ eſt quadruplé. En general $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, on $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ exprimera le rapport dont $\frac{a}{b}$ eſt doublé, en ſuppoſant $n=2$; dont $\frac{a}{b}$ eſt triplé, en ſuppoſant $n=3$, & ainſi de ſuite.

C'eſt à dire $\frac{a}{b}$ eſt compoſé * d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ qu'il y a d'unitez dans n, en ſuppoſant que n repréſente tel nombre entier qu'on voudra. *389.

Corollaire I.

402. On ſuppoſe que $\frac{ac}{bc}$ eſt un rapport numerique compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ qu'il y a d'unitez dans n (n repréſente un nombre entier quelconque.) Si $\frac{ac}{bc}$ étant réduit aux moindres termes $\frac{a}{b}$, le moindre rapport $\frac{a}{b}$ n'eſt pas une puiſſance parfaite dont l'expoſant ſoit n; c'eſt à dire, ſi les nombres a & b ne ſont pas chacun une puiſſance parfaite dont n ſoit l'expoſant; le rapport compoſant $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ eſt une grandeur incommenſurable avec l'unité, avec les nombres a & b, & avec tous les autres nombres formez de la même unité dont a & b ſont formez.

Démonſtration. $\frac{ac}{bc}.1::*ac.bc::*a.b::\frac{a}{b}.1$. Ainſi $*\frac{ac}{bc}.1::a.b$ *330. *332. $::\frac{a}{b}.1$. Donc $*\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}.\sqrt[n]{1}=1::\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}::\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.1$. Mais les *320. *394. nombres a & b ſont ſuppoſez des puiſſances numeriques imparfaites dont l'expoſant eſt n; par conſequent $*\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ eſt incommenſurable avec l'unité. $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ eſt donc auſſi incommenſurable avec l'unité, & avec tout nombre formé de cette unité. *309.

Si l'on ſuppoſe $n=2$. On verra que le rapport ſimple $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bc}}$, dont $\frac{ac}{bc}$ eſt doublé, eſt une grandeur incommenſurable

quand $\frac{ac}{bc}$ étant réduit au moindre rapport $\frac{a}{b}$, ce moindre rapport n'eſt pas un quarré parfait. Ainſi ſi deux quarrez ſont entr'eux comme 3 à 2, le rapport ſimple $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ dont $\frac{1}{2}$ eſt doublé, eſt incommenſurable avec 1, avec $\frac{1}{2}$, & avec tous les nombres.

Si l'on ſuppoſe $n=3$, & que $\frac{ac}{bc}$ étant réduit aux moindres termes $\frac{a}{b}$, a & b ſoient des 3es puiſſances imparfaites; $\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{bc}}$ eſt incommenſurable avec l'unité, avec ac & bc, & avec tous les nombres formez de la même unité. Par exemple, deux 3es puiſſances ſont entr'elles comme 3 à 2; le rapport $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$, dont $\frac{1}{2}$ eſt triplé, eſt une grandeur incommenſurable avec l'unité, avec $\frac{1}{2}$, & avec tous les nombres; & ainſi des autres.

COROLLAIRE II.

403. SI on élevoit le rapport $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}}$ à la puiſſance dont m ſeroit l'expoſant (m repréſente un nombre entier quelconque) l'on auroit le rapport $\frac{\sqrt[n]{\overline{ac}^m}}{\sqrt[n]{\overline{bc}^m}} = \frac{\overline{ac}^{\frac{m}{n}}}{\overline{bc}^{\frac{m}{n}}}$ qui eſt compoſé * d'autant de rapports ſimples égaux à $\frac{\sqrt[n]{ac}}{\sqrt[n]{bc}} = \frac{ac^{\frac{1}{n}}}{bc^{\frac{1}{n}}}$ que l'expoſant m contient d'unitez.

*389. à la fin.

Le Problême ſuivant fournira la methode de trouver par le moyen des grandeurs interpoſées, le rapport compoſant dont un rapport donné eſt doublé ou triplé, &c.

PROBLÊME.

404. *TROUVER entre deux grandeurs données autant de grandeurs moyennes proportionelles qu'on voudra.*

Soient a & b les deux grandeurs données, & que n exprime le nombre des moyennes proportionnelles qu'on cherche. Il eſt évident qu'il ſuffit de trouver la premiere moyenne qu'on nommera x; car x étant connue, on trouvera aiſé-

ment, * par la regle de proportion, toutes les moyennes sui- * 341.
vantes.

Réſolution. Il eſt évident que * $a^{n+1} . x^{n+1} :: a . b$. D'où * 399.
l'on déduit * $ax^{n+1} = a^{n+1}b$. En diviſant chaque grandeur * 338.
par a, on aura $x^{n+1} = \frac{a^{n+1}b}{a} = a^{n+1-1}b = a^n b$. Ainſi
$x^{n+1} = a^n b$. En tirant la racine dont l'expoſant eſt $n+1$
de chacune de ces grandeurs égales, on aura $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$.

Cette expreſſion $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ marque ce qu'il faut faire pour trouver entre a & b la premiere de tant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Par exemple, ſi l'on veut une ſeule moyenne entre a & b; alors $n = 1$; mettant 1 à la place de n dans $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, on aura $x = \sqrt{ab}$. Ce qui fait voir que la racine quarrée du produit ab de deux grandeurs eſt moyenne proportionnelle entre ces deux grandeurs; car $a . \sqrt{ab} :: \sqrt{ab} . b$, puiſque le produit des extrêmes, & celui des moyens ſont la même grandeur ab.

Si l'on veut la premiere de deux moyennes entre a & b; alors $n = 2$. Mettant 2 à la place de n dans $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, on aura $x = \sqrt[3]{a^2 b}$; ce qui fait voir que la racine 3e du produit fait du quarré a^2 par b, eſt la premiere des deux moyennes proportionnelles entre a & b. Car $\sqrt[3]{a^2 b}$ étant élevé à la 3e puiſſance, on aura $\frac{a^3}{a^2 b}$. Or $a^3 . a^2 b$ :: * $a . b$. Par conſequent * 109.
le rapport $\frac{a^3}{a^2 b}$ étant triplé du rapport $\sqrt[3]{a^2 b} : \frac{a}{b}$ eſt auſſi triplé * du même rapport. Ainſi $\sqrt[3]{a^2 b}$ eſt la premiere des deux gran- * 389, 376
deurs moyennes proportionnelles interpoſées entre a & b. & 377.

Si l'on veut la premiere de cinq moyennes proportionnelles entre a & b; alors $n = 5$, & $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ deviendra $x = \sqrt[6]{a^5 b}$. Ainſi $\sqrt[6]{a^5 b}$ eſt la premiere des cinq moyennes entre a & b. Pour s'en convaincre il n'y a qu'à * former la * 346.
progreſſion, dont a & b ſont les deux premiers termes, $\div\!\!\div a . b . \frac{b^2}{a} . \frac{b^3}{a^2} . \frac{b^4}{a^3} . \frac{b^5}{a^4} . \frac{b^6}{a^5}$. Si l'on multiplie enſuite les termes par la même grandeur a^5, on aura * la progreſſion * 75.

$\div a^6 . a^5b . a^4b^2 . a^3b^3 . a^2b^4 . ab^5 . b^6$. Enfin ſi l'on prend la
* 395. racine 6^e de chaque terme * on aura la progreſſion $\dots a . \sqrt[6]{a^5b} . \sqrt[6]{a^4b^2} . \sqrt[6]{a^3b^3} . \sqrt[6]{a^2b^4} . \sqrt[6]{ab^5} . b$, où l'on voit que $\sqrt[6]{a^5b}$ eſt la premiere des cinq moyennes proportionnelles entre a & b.

Ces exemples ſuffiſent pour faire voir aux Lecteurs que $x = \sqrt[n+1]{a^nb}$ leur ſera trouver la premiere de tant de moyennes proportionnelles qu'ils voudront entre deux grandeurs a & b. Ils remarqueront ſeulement que quand a & b ſont deux nombres, il y a pluſieurs cas où la premiere des moyennes proportionnelles, marquée par la formule, ne pourra ſe trouver exactement par nombres, comme on le verra dans le 5e Corollaire.

COROLLAIRE I.

405. QUAND on a un rapport donné $\frac{a}{b}$, & qu'on le ſuppoſe compoſé d'autant de rapports égaux qu'en exprime $n+1$, ($n+1$ repreſente un nombre entier quelconque.) Pour trouver le rapport compoſant auquel tous les autres ſont égaux, il eſt évident qu'il ne faut que chercher la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b qu'il y a d'unitez dans n, & le rapport de a à cette premiere
* 397. moyenne $\sqrt[n+1]{a^nb}$, c'eſt à dire $\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^nb}}$ ſera * le rapport compoſant qu'on cherche.

COROLLAIRE II.

406. SUPPOSANT que n repréſente un nombre entier quelconque: ſi l'on a cette proportion $a^{n+1} . c^{n+1} :: a . b$; la grandeur c ſera la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b, que n contient d'unitez.

Démonſtration. En nommant x la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b que n contient d'uni-
* 399. tez, on aura * cette proportion $a^{n+1} . x^{n+1} :: a . b$. Par
* 320. conſequent $*\frac{a^{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}$. L'on aura donc $c^{n+1} = * x^{n+1}$,
* 319. * 221. & $c = * x$.

en mettant ſucceſſivement 1, 2, 3, 4, &c. à la place de n, on verra que ſi $a^2 . c^2 :: a . b$, l'on aura $\div a . c . b$. Si $a^3 . c^3 :: a . b$, l'on aura c pour la premiere de deux moyennes proportionnelles entre a & b. Si $a^4 . c^4 :: a . b$, l'on aura c pour la premiere de trois moyennes proportionnelles entre a & b, & ainſi de ſuite.

Corollaire III.

407. On a vû dans le Problême précedent * la maniere de trouver la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b que n contient d'unitez, en ſuppoſant que a eſt la premiere grandeur, & b la derniere, & que $\sqrt[n+1]{a^n b}$ eſt la premiere moyenne proportionnelle qui ſuit a. Il eſt évident qu'en prenant b pour la premiere grandeur, & a pour la ſeconde, on trouvera de la même maniere que la premiere des moyennes proportionnelles la plus proche de b eſt $\sqrt[n+1]{ab^n}$. Ainſi dans le 1er Corollaire *, en ſuppoſant $\frac{c}{t}$ compoſé d'autant de rapports égaux que $n+1$ contient d'unitez, on trouvera encore que $\frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b}$ eſt le rapport compoſant égal à tous les autres dont $\frac{c}{t}$ eſt compoſé; & dans le ſecond Corollaire, * ſi $b^{n+1} . c^{n+1} :: b . a$; la grandeur c ſera la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre b & a, que n contient d'unitez; & cette même grandeur c ſera la moyenne la plus proche de b. C'eſt pourquoi ſi $b^2 . c^2 :: b . a$, l'on aura $\div b . c . a$. Si $b^3 . c^3 :: b . a$, l'on aura c pour la premiere de deux moyennes proportionnelles entre b & a; & ainſi des autres.

* 404. * 405. * 406.

Corollaire IV.

408. Quand les deux grandeurs a & b ſont déterminées, & que le nombre n des moyens proportionnels entre a & b eſt déterminé, chacun des termes moyens eſt auſſi déterminé, quoiqu'il ne ſoit pas connu. C'eſt à dire, il ne peut pas y avoir deux ou pluſieurs grandeurs inégales pour le premier moyen, mais il n'y en a qu'une ſeule de poſſible; & de même pour le ſecond moyen, pour le 3e, pour le 4e, &c.

Car on a démontré que le 1er moyen étoit neceſſairement
*404. * $\sqrt[n+1]{a^n b}$, & il eſt évident que le rapport de la premiere grandeur a (qui eſt déterminé) à $\sqrt[n+1]{a^n b}$, ne ſeroit pas le même ſi l'on imaginoit pour 1er moyen une grandeur inégale à $\sqrt[n+1]{a^n b}$, ainſi le 1er moyen eſt neceſſairement déterminé. Le même raiſonnement fait voir que le ſecond moyen, le 3e, &c. doivent être auſſi chacun une grandeur déterminée.

COROLLAIRE V.

409. EN toute progreſſion numerique, que l'on prenne deux termes quelconques repréſentez par a & b, entre leſquelles il y ait un nombre n tel qu'on voudra de moyens proportionnels; ſi $a^n b$ eſt une puiſſance numerique parfaite dont l'expoſant ſoit $n+1$, ou bien encore ſi ab^n eſt une puiſſance numerique parfaite dont l'expoſant ſoit $n+1$; alors les racines $\sqrt[n+1]{a^n b}$, comme auſſi $\sqrt[n+1]{ab^n}$ ſont chacune un nombre qui eſt la racine exacte, ſçavoir $\sqrt[n+1]{a^n b}$, de la puiſſance numerique $a^n b$, & $\sqrt[n+1]{ab^n}$ de la puiſſance numerique ab^n; & le rapport
*399. compoſant * $\frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b}} = * \frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b}$ (égal à tous ceux dont
*407. $\frac{a}{b}$ eſt compoſé, & dont il y en a autant qu'il y a d'unitez dans $n+1$) peut s'exprimer par nombres; puiſque a & $\sqrt[n+1]{a^n b}$, comme auſſi $\sqrt[n+1]{ab^n}$ & b ſont des nombres.

Mais ſi $a^n b$, comme auſſi ab^n, ne ſont pas chacun une puiſſance numerique parfaite dont l'expoſant ſoit $n+1$; alors
*309. $\sqrt[n+1]{a^n b}$ & $\sqrt[n+1]{ab^n}$ * ſont chacune une grandeur incommenſurable. Par conſequent les deux termes du rapport compoſant
*407. $\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b}} = * \frac{\sqrt[n+1]{ab^n}}{b} = * \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}$ (qui eſt égal à tous les rapports
*389. égaux compoſans dont le rapport $\frac{a}{b}$ eſt compoſé, & dont

il y en a autant qu'il y a d'unitez dans $n + 1$) ſont incommenſurables. On ſuppoſe que le moindre rapport $= \frac{a}{b}$ n'eſt pas une puiſſance parfaite dont l'expoſant eſt $n + 1$.

REMARQUE.

LES Commençans doivent d'eux mêmes ſe former les cas particuliers de ce 5e Corollaire, en ſuppoſant n ſucceſſivement égale à 1, 2, 3, &c & en mettant des nombres à la place de a & de b, & ils verront que quand un quarré eſt double ou triple d'un autre, comme auſſi quand un cube eſt double ou triple d'un autre, &c c'eſt à dire quand le rapport de ces puiſſances eſt $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, le côté de l'un des deux eſt incommenſurable avec le côté de l'autre; car $\sqrt{2}$ eſt incommenſurable avec $\sqrt{1} = 1$, comme auſſi $\sqrt[3]{2}$ eſt incommenſurable avec $\sqrt[3]{1} = 1$.

THEORÈME.

Sur les moyennes proportionnelles entre deux grandeurs a *&* b *élevées à une puiſſance quelconque* a^n, b^n.

410. ON ſuppoſe que n repréſente un nombre entier quelconque, & qu'on éleve les grandeurs a & b à la puiſſance n, l'on aura a^n, b^n. Cela ſuppoſé, les produits $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4$, & ainſi de ſuite juſqu'à $a^{n-n}b^n$, dans leſquels la puiſſance a^n diminue d'un degré de l'un à l'autre, & les puiſſances de b vont en augmentant d'un degré depuis b^1 juſqu'à b^n, ces produits, dis-je, ſont de ſuite des grandeurs moyennes proportionnelles entre a^n & b^n, & il y a autant de ces moyennes proportionnelles qu'il y a d'unitez dans $n - 1$; c'eſt à dire $\div a^n . a^{n-1}b . a^{n-2}b^2 . a^{n-3}b^3 . a^{n-4}b^4$, & ainſi de ſuite juſqu'à $a^{n-n}b^n = b^n$.

Par exemple, ſuppoſant $n = 2$, on aura $\div a^2 . ab . b^2$. Suppoſant $n = 3$, on aura $\div a^3 . a^2b . ab^2 . b^3$. Si $n = 4$, on aura $\div a^4 . a^3b . a^2b^2 . ab^3 . b^4$. Si $n = 5$, on aura $\div a^5 . a^4b . a^3b^2 . a^2b^3 . ab^4 . b^5$, & ainſi de ſuite.

Démonſtration. 1°. Il eſt évident que le rapport de deux termes conſécutifs, qui regne dans la progreſſion, eſt $\frac{a}{b}$; car la puiſſance de a ayant une dimenſion de plus dans un ter-

me à gauche que dans celui qui le ſuit immédiatement à droite; & b ayant au contraire une dimenſion de moins dans le terme à gauche que dans celui qui le ſuit immédiatement à droite; il eſt clair qu'en effaçant en deux termes conſécutifs les lettres communes, il ne doit reſter que a pour antecedent, & que b pour conſequent du rapport de deux termes conſecutifs, qui eſt par conſequent $\frac{a}{b}$. 2°. Les termes moyens étant les produits pris de ſuite des puiſſances de a (dont les expoſans diminuent d'une unité d'un terme à l'autre depuis le premier terme a^n) & des puiſſances de b (dont les expoſans vont en augmentant d'une unité d'un terme à l'autre depuis b^1 juqu'au terme b^n); il eſt évident qu'il doit y avoir autant de termes moyens qu'il y a d'unitez dans $n-1$. Donc $\div\div a^n . a^{n-1} b . a^{n-2} b^2 . a^{n-3} b^3$, & ainſi de ſuite juſqu'à $a^{n-n} b^n = b^n$; & il y aura autant de moyens qu'il y a d'unitez dans $n-1$, puiſque 1 eſt l'expoſant de b dans le premier moyen $a^{n-1} b^1$; & que dans le dernier moyen, b doit avoir pour expoſant $n-1$. Quand le premier terme $a = 1$, la progreſſion ſera $\div\div 1 . b . b^2 . b^3$. &c.

COROLLAIRE.

411. *395. IL ſuit de là * qu'en prenant les racines dont n eſt l'expoſant, on aura cette progreſſion $\div\sqrt[n]{a^n} = a . \sqrt[n]{a^{n-1} b} . \sqrt[n]{a^{n-2} b^2} . \sqrt[n]{a^{n-3} b^3} . \sqrt[n]{a^{n-4} b^4}$. &c. juſqu'à $\sqrt[n]{a^0 b^n} = \sqrt[n]{1 b^n} = b$, & qu'il y aura dans cette progreſſion autant de moyens proportionnels entre a & b qu'il y a d'unitez dans $n-1$. Quand $a = 1$, la progreſſion précedente devient $\div\sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{b^2} . \sqrt[n]{b^3} . \sqrt[n]{b^4}$. &c. juſqu'à $\sqrt[n]{b^n} = b$.

De la proportion & de la progreſſion harmonique.

AVERTISSEMENT.

412. IL y a une autre ſorte de proportion & de progreſſion formée des progreſſions geometrique & arithmetique, qui eſt de peu d'uſage, ſi ce n'eſt dans la Muſique dont elle exprime les principaux accords: on la nomme, à cauſe de cela, la proportion harmonique. Voici ce que c'eſt.

DE'FINITION.

413. LORSQU'E trois grandeurs comme 3 . 4 . 6 ſont telles que la 1re 3 eſt à la 3e 6, comme la difference 1 de la premiere à la ſeconde eſt à la difference 2 de la ſeconde à la troiſiéme, on dit que ces trois grandeurs 3 . 4 . 6 ſont une *proportion harmonique*. Quand la proportion harmonique s'étend à plus de trois termes, on la nomme *progreſſion harmonique*.

PROBLÊME.

414. *DEUX termes d'une proportion harmonique étant donnez; trouver le troiſiéme terme.*

Operation. Soient les deux termes donnez repréſentez par a, b, & qu'ils ſoient les deux premiers termes; & que le 3e terme, qu'on cherche, ſoit repréſenté par x. Ainſi $a . b . x$ feront une proportion harmonique.

1°. Si la proportion va en augmentant, on aura cette proportion geometrique $a . x :: b - a . x - b$. C'eſt à dire, la 1re grandeur a eſt à la 3e x; comme la difference $b - a$ de la 2e b à la 1re a, eſt à la difference $x - b$ de la 3e x à la 2e b.

En prenant les produits des extrêmes & des moyens, on aura * $ax - ab = bx - ax$. En ajoutant à chaque membre de cette égalité la grandeur $+ ax - bx + ab$, on trouvera $2ax - bx = ab$. Enfin en diviſant chacune de ces grandeurs égales par $2a - b$, on trouvera $x = \frac{ab}{2a-b}$. Par conſequent la proportion harmonique ſera $a . b . \frac{ab}{2a-b}$. Ce 3e terme $x = \frac{ab}{2a-b}$ ſervira de formule pour trouver le 3e terme d'une proportion harmonique qui va en augmentant, les deux 1ers termes étant donnez; & l'on remarquera que quand le ſecond terme b ſurpaſſe le double $2a$ du premier terme, comme encore quand $b = 2a$; on ne peut pas trouver de troiſiéme terme aux deux termes donnez de la proportion harmonique. *338.

Exemple. 2 & 3 étant donnez pour les deux premies termes d'une progreſſion harmonique, ſi l'on demande le troiſiéme $x = \frac{ab}{2a-b}$, il faut ſuppoſer $a = 2$; $b = 3$, & ſubſtituer ces valeurs de a & de b dans la formule, & l'on trou-

vera $\frac{ab}{2a-b} = 6$. Ainſi la proportion harmonique ſera 2 . 3 . 6.

2°. Quand la proportion harmonique $a . b . x$ va en diminuant, on aura cette proportion geometrique $a . x :: a - b . b - x$. C'eſt à dire la premiere grandeur a eſt à la 3e x; comme l'excez $a - b$ de la 1re a ſur la 2e b, eſt à l'excez $b - x$ de la 2e b ſur la 3e x.

En prenant le produit des extrêmes & celui des moyens, *338. on aura * $ab - ax = ax - bx$. En ajoutant $+ ax$ à chacune de ces grandeurs égales, il viendra $ab = 2ax - bx$. En diviſant par $2a - b$ chacune de ces grandeurs égales, on trouvera $x = \frac{ab}{2a-b}$, comme dans le 1er cas, & la proportion harmonique ſera $a . b . \frac{ab}{2a-b}$. Si les deux premiers termes ſont $a = 6$; $b = 3$; l'on trouvera que le 3e terme $x = \frac{ab}{2a-b} = \frac{6 \times 3}{2 \times 6 - 3} = 2$, & la proportion harmonique ſera $6 . 3 . 2$.

3°. Si le terme x que l'on cherche eſt le terme moyen entre les deux termes donnez a & b; la proportion harmonique ſera $a . x . b$; & ſi elle va en augmentant, l'on aura cette proportion geometrique $a . b :: x - a . b - x$. Par conſequent $ab - ax = bx - ab$. En ajoutant à chaque membre la grandeur $+ ax + ab$, on trouvera $2ab = bx + ax$. Diviſant chaque membre par $a + b$, on aura $\frac{2ab}{a+b} = x$. La proportion harmonique ſera donc $a . \frac{2ab}{a+b} . b$. Et en réduiſant tous les termes au même dénominateur, & prenant les ſeuls numerateurs; on aura encore la proportion harmonique $a^2 + ab . 2ab . ab + b^2$.

Si la proportion harmonique va en diminuant, on aura cette proportion geometrique. $a . b :: a - x . x - b$. D'où l'on déduira l'égalité $ax - ab = ab - bx$. En ajoutant à chaque membre $+ bx + ab$, on trouvera $ax + bx = 2ab$. En diviſant chaque membre par $a + b$, on aura $x = \frac{2ab}{a+b}$; & la proportion harmonique ſera, comme ci-deſſus, $a . \frac{2ab}{a+b} . b$. Et en réduiſant tous les termes au même dénominateur; en prenant les ſeuls numerateurs, on aura encore la proportion harmonique $a^2 + ab . 2ab . ab + b^2$ comme ci-deſſus.

Les deux termes 1 & 2 d'une proportion harmonique étant donnez : pour trouver un moyen proportionel harmonique, il faut ſe ſervir de la formule $\frac{2ab}{a+b}$; & l'on trouvera $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \times 1 \times 2}{1+2}$

$\frac{3\times1\times2}{1+2} = \frac{4}{3}$. La progreſſion harmonique ſera 1. $\frac{4}{3}$. 2. Si l'on veut réduire les trois termes à un même dénominateur, & prendre les ſeuls numerateurs, on aura encore la progreſſion harmonique 3. 4. 6.

Les deux termes 2 & 3 étant donnez, pour trouver un moyen proportionnel harmonique, il faut ſubſtituer dans $\frac{2ab}{a+b}$ les valeurs de $a = 2$, $b = 3$, & l'on aura $\frac{2\times2\times3}{2+3} = \frac{12}{5}$, & la proportion harmonique ſera 2. $\frac{12}{5}$. 3; & multipliant tous les termes par 5, on aura encore la progreſſion harmonique 10. 12. 15.

On peut auſſi déduire de la proportion harmonique a. b. $\frac{ab}{2a-b}$ du 1er & 2e article, en multipliant tous les termes par $2a - b$, cette autre proportion harmonique, $2a^2 - ab$. $2ab - b^2$. ab.

Application de la formule a. b. $\frac{ab}{2a-b}$ *d'une progreſſion harmonique dont les deux premiers termes* a *&* b *ſont donnez, & où l'on cherche le* 3e *terme repréſenté par* $\frac{ab}{2a-b}$, *à un exemple dont on déduira une formule qui ſervira à trouver tant de termes qu'on voudra d'une progreſſion harmonique, deux termes de cette progreſſion étant donnez.*

SOIENT $\frac{c}{f+d}$. $\frac{c}{f+2d}$ les deux premiers termes donnez d'une proportion harmonique, pour trouver le 3e qu'on nommera x; il faut ſuppoſer $\frac{c}{f+d} = a$, $\frac{c}{f+2d} = b$, & ſubſtituer ces valeurs de a & de b dans la formule $x = \frac{ab}{2a-b}$; après avoir fait le calcul, on trouvera que le troiſiéme terme eſt $\frac{c}{f+3d}$, & que la proportion harmonique eſt $\frac{c}{f+d}$. $\frac{c}{f+2d}$. $\frac{c}{f+3d}$.

COROLLAIRE I.

414. SI l'on ſuppoſe $g = f + d$, la proportion harmonique précedente ſera $\frac{c}{g}$. $\frac{c}{g+d}$. $\frac{c}{g+2d}$. Mais par l'exemple précedent $\frac{c}{g+d}$. $\frac{c}{g+2d}$. $\frac{c}{g+3d}$ ſont une proportion harmonique, par conſequent en ſuppoſant $b = g + d$, les trois termes $\frac{c}{b+d}$. $\frac{c}{b+2d}$. $\frac{c}{b+3d}$ feront encore une proportion harmonique; & l'on voit clairement qu'en ſuppoſant de ſuite $i = b + d$; $k = i + d$; $l = k + d$, &c. on continuera de trouver de nouveaux ter-

mes à l'infini. D'où il eſt évident que $\frac{c}{b+d}$. $\frac{c}{b+2d}$. $\frac{c}{b+3d}$. $\frac{c}{b+4d}$. $\frac{c}{b+5d}$. $\frac{c}{b+6d}$, &c. ſont une progreſſion harmonique: C'eſt à dire ſi l'on forme une *ſuite* infinie de fractions, & que le numerateur de chacune ſoit une même grandeur quelconque repréſentée par c, & que les dénominateurs ſoient de ſuite les termes poſitifs d'une progreſſion arithmetique quelconque repréſentée par $\div b + d. b + 2d. b + 3d. b + 4d.$ &c. la *ſuite* formée de ces fractions ſera une progreſſion harmonique.

D'où l'on voit la raiſon pourquoi on nomme la *ſuite* $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. &c. *une progreſſion harmonique*.

COROLLAIRE II.

415. LE Corollaire précedent fournit le moyen, quand on a deux grandeurs quelconques, données repréſentées par a & b, de faire une progreſſion harmonique qui ait la 1re grandeur a pour premier terme, & la 2e b pour dernier terme, & qui ait tant de termes qu'on voudra. C'eſt à dire, il donne le moyen de trouver entre les grandeurs données a & b tant de termes moyens qu'on voudra d'une progreſſion harmonique.

Car il n'y a qu'à prendre, 1°, une grandeur arbitraire qui ait pour diviſeurs exacts les grandeurs données a & b. (Cette grandeur peut être repréſentée par abc; car $\frac{abc}{a} = bc$, & $\frac{abc}{b} = ac$.) Par ce moyen on pourra réduire les grandeurs a & b en deux fractions qui leur ſeront équivalentes, & l'on aura $\frac{abc}{bc} = a$, $\frac{abc}{ac} = b$.

2°. Il ne s'agit plus que de former une progreſſion arithmetique d'autant de termes qu'on en veut donner à la progreſſion harmonique, & que le premier terme de la progreſſion arithmetique ſoit le diviſeur bc, & le dernier terme ſoit le diviſeur ac: ce que l'on enſeignera dans la ſuite.

3°. Et de faire une *ſuite* de fractions qui ayent toutes pour numerateur la grandeur abc qu'on a ſuppoſée, & qui ayent pour dénominateurs les termes de la progreſſion arithmetique que l'on a formée pris de ſuite. Cette *ſuite* de fractions (dont la 1re eſt égale à a, & la derniere à b,) ſera la progreſſion harmonique qu'il falloit former.

Par exemple, ſi l'on propoſe de former une progreſſion harmonique de quatre termes, dont le premier terme ſoit $3 = a$, & le 4e ſoit $12 = b$. 1°. Il faut prendre un nombre comme $24 = abc$ qui ait 3 & 12 pour diviſeurs exacts : (il eſt évident que $c = \frac{2}{3}$; car $abc = 3 \times 12 \times \frac{2}{3} = 24$.) & réduire par ce moyen 3 & 12 aux fractions équivalentes $\frac{abc}{bc} = \frac{24}{8} = 3 = a$, $\frac{abc}{ac} = \frac{24}{2} = 12 = b$.

2°. Il faut former une progreſſion arithmetique de 4 termes, dont le 1er ſoit le diviſeur 8, & le 4e ſoit le diviſeur 2. On verra *dans les articles* 497 & 499 le moyen de former cette progreſſion qui eſt $\div$ 8. 6. 4. 2.

3°. Il faut écrire $\frac{24}{8} = 3$. $\frac{24}{6} = 4$. $\frac{24}{4} = 6$. $\frac{24}{2} = 12$. C'eſt la progreſſion harmonique qu'il falloit former. Car il eſt évident par le 1er Corollaire * que ces quatre termes, dont le premier & le dernier ſont les grandeurs données 3 & 12, ſont une progreſſion harmonique. * 414.

DE'FINITION.

416. TROIS grandeurs comme 3. 5. 6 ſont *une proportion contr'harmonique*, lorſque la 3e 6 eſt à la 1re 3 ; comme la difference 2 de la 1re 3 à la 2e 5 eſt à la difference 1 de la 2e 5 à la 3e 6. C'eſt à dire, on dit que les trois grandeurs 3. 5. 6 ſont une proportion contr'harmonique, parceque 6. 3 :: 5 — 3. 6 — 5. Et ſi la proportion contr'harmonique s'étend à plus de trois termes, on la nomme *une progreſſion contr'harmonique*.

Mais comme elle n'eſt pas d'uſage dans les Mathematiques, il ſuffit d'en avoir donné une idée, & il eſt inutile de s'y arrêter davantage.

SECTION VI.

Où l'on explique le calcul des incommenſurables ſimples, ou qui n'ont qu'un ſigne radical.

Suppoſitions que l'on a démontrées dans les Livres précedens.

1.

417. LA racine d'une puiſſance numerique imparfaite (laquelle
* 309. puiſſance numerique eſt un nombre entier ou une fraction) * eſt une grandeur incommenſurable. Par exemple, la racine 2e de 3 eſt une grandeur incommenſurable; la racine 3e de $\frac{1}{2}$ eſt une grandeur incommenſurable, & ainſi des autres.

Cela eſt cauſe qu'on exprime les grandeurs incommenſurables par le *ſigne radical* $\surd$, en écrivant au deſſus du ſigne l'expoſant qui marque ſi c'eſt une racine 2e, 3e, &c. Par exemple $\sqrt[2]{3}$ exprime la racine 2e de 3; $\sqrt[3]{5}$ marque la racine 3e de 5; $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$ marque la racine 5e de la puiſſance imparfaite $\frac{2}{3}$. Quand on veut marquer une incommenſurable d'une maniere generale, on ſe ſert d'une lettre pour l'expoſant du ſigne radical. Par exemple $\sqrt[n]{a}$ marque la racine quelconque de la puiſſance a. Quand il n'y a point d'expoſant ſur le ſigne $\surd$, on y ſous entend l'expoſant 2. Ainſi $\surd a$ eſt la même choſe que
* 153. $\sqrt[2]{a}$. On exprime * encore les incommenſurables comme des puiſſances, ſans ſe ſervir du ſigne radical $\surd$, en écrivant au haut de la grandeur vers la droite la fraction qui en eſt l'expoſant. Ainſi $3^{\frac{1}{2}}$ eſt la même choſe que $\sqrt[2]{3}$. De même $a^{\frac{1}{3}}$ eſt la même que $\sqrt[3]{a}$. En general $a^{\frac{1}{n}}$ eſt la même choſe que $\sqrt[n]{a}$; & $a^{\frac{m}{n}}$ eſt la même choſe $\sqrt[n]{a^m}$.

2.

418. La racine, dont l'expoſant eſt un nombre pair, d'une gran-
* 100. deur négative, comme $\sqrt[2]{-ab}$, $\sqrt[4]{-a^3b}$, &c. * qui eſt une grandeur impoſſible qu'on nomme (à cauſe de cela) *grandeur imaginaire*, eſt auſſi régardée comme une grandeur incommenſurable.

3.

419. Il y a enfin parmi les grandeurs littérales des puiſſances parfaites & imparfaites; par exemple a^3 eſt une 3e puiſſance parfaite, dont la racine 3e eſt a; mais a^2b étant conſiderée comme une puiſſance 3e, eſt une puiſſance imparfaite; car il n'y a pas de grandeur litterale dont le quarré étant multiplié par cette grandeur même donne pour produit a^2b.

Les racines des puiſſances litterales imparfaites ſont auſſi regardées comme des grandeurs incommenſurables. Par exemple $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^5}$, &c. ſont des incommenſurables; & en general $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$ ſont des incommenſurables.

4.

420. Pour élever une incommenſurable comme $\sqrt[3]{ab}$ à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui du ſigne $\surd$, il ne faut qu'effacer $\surd$, & la grandeur qui étoit précedée du ſigne $\surd$, ſans autre changement, ſera la puiſſance qu'on demande. Ainſi pour élever $\sqrt[3]{ab}$ à la 2e puiſſance, il ne faut qu'écrire ab, de même la 3e puiſſance de $\sqrt[3]{a}$ eſt a. La 2e puiſſance de $\sqrt{-ab}$ eſt $-ab$; la puiſſance n de $\sqrt[n]{a}$ eſt a; la puiſſance n de $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$ eſt $a^{n-1}b$; & ainſi des autres. Cela eſt évident de ſoi-même.

5.

421. Lorſque la grandeur litterale précedée du ſigne radical eſt élevée à une puiſſance qui a le même expoſant que la racine, la grandeur incommenſurable eſt égale à la grandeur litterale qui demeure en effaçant tant le ſigne radical que l'expoſant de la puiſſance litterale. C'eſt à dire $\sqrt{a^2} = a$; $\sqrt[3]{a^3} = a$; en general $\sqrt[n]{a^n} = a$; $\sqrt[n]{a^2b^n} = a^2b$. Cela eſt évident de ſoi-même.

REMARQUE.

APRE'S avoir donné des expreſſions aux grandeurs incommenſurables, on les a réduites au calcul; c'eſt à dire, on a trouvé le moyen de faire les mêmes operations ſur les incommenſurables que l'on fait ſur les grandeurs commenſurables entieres & rompues, ſçavoir l'addition, la ſouſtra-

ction, la multiplication, &c. & même de les faire entrer dans le calcul des grandeurs commenſurables, en ajoutant, ſouſtrayant, multipliant & diviſant les grandeurs commenſurables & incommenſurables mêlées les unes avec les autres: C'eſt ce qu'on va expliquer.

Le calcul des grandeurs incommenſurables.

DE'FINITIONS.

1.

422. DANS les grandeurs incommenſurables on dit que la grandeur devant laquelle eſt le ſigne radical, *eſt ſous le ſigne*. Ainſi dans $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$, &c. les grandeurs 3, 2, a, $a^2 + ab + b^2$ ſont ſous le ſigne.

Quand la grandeur qui eſt ſous le ſigne eſt complexe, on tire une ligne depuis le ſigne radical qui couvre toute la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne. Ainſi dans $\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$ la grandeur complexe $a^2 + ab + b^2$ que couvre la ligne, eſt ſous le ſigne $\sqrt[3]{}$.

2.

423. Pour ajouter des grandeurs incommenſurables tant entr'elles qu'avec des commenſurables, on les joint enſemble ſans changer leurs ſignes + ou —, en écrivant les commenſurables les premieres à gauche; & pour les retrancher les unes des autres, on change le ſigne de celles qu'on doit retrancher, & enſuite on les joint avec leur ſigne changé aux grandeurs dont on les veut retrancher. Ainſi pour ajouter $\sqrt[3]{ab}$ à a, on écrit $a + \sqrt[3]{ab}$. Pour ajouter $\sqrt[3]{a}$ à $\sqrt[3]{b}$, on écrit $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$. Pour ôter $+ \sqrt[3]{b}$ de $\sqrt[3]{a}$, on écrit $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$. Pour retrancher de $+ a$ l'incommenſurable $\sqrt[3]{b}$, on écrit $a - \sqrt[3]{b}$. Il en eſt de même des autres.

3.

424. Pour multiplier une grandeur incommenſurable par une grandeur commenſurable, on écrit la grandeur commenſurable la premiere, & on lui joint l'incommenſurable, obſervant * la regle des ſignes + & —.

* 95. Pour multiplier a par $\sqrt[2]{ab}$, ou $\sqrt[3]{ab}$ par a, on écrit $a\sqrt[2]{ab}$.

Pour multiplier $\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$ par $a + b$, on écrit $\overline{a + b}\ \sqrt[3]{\overline{a^2 + ab + b^2}}$. On tire une ligne sur la grandeur complexe $\overline{a + b}$ pour marquer que cette grandeur complexe est multipliée par l'incommensurable.

De même $-a\sqrt[n]{ax}$ est produit de $+\sqrt[n]{ax}$ par $-a$, ou de $+a$ par $-\sqrt[n]{ax}$. $+a\sqrt[n]{ax}$ est le produit de $-\sqrt[n]{ax}$ par $-a$. $+a\sqrt[n]{ax}$ est aussi le produit de $+a$ multiplié par $+\sqrt[n]{ax}$.

4.

425. Dans un produit d'une incommensurable par une commensurable, comme dans $a\sqrt[n]{ax}$, on dit que la grandeur a *est hors du signe*, & que la grandeur ax est sous le signe.

Quand il y a une grandeur complexe sous le signe, on l'ordonne par rapport à une lettre comme dans les produits: s'il y a une inconnue, c'est cette lettre inconnue qu'on prend pour ordonner la grandeur complexe, & ordinairement on écrit les termes qui contiennent les plus hautes puissances de l'inconnue les plus à droite de cette maniere $ax\sqrt[n]{ab - ax + cx^2 + ex^3}$.

5.

426. Pour diviser une grandeur commensurable par une incommensurable, ou une incommensurable par une commensurable, on écrit celle qui est le dividende sur une ligne, & celle qui est le diviseur au dessous, & cette fraction est le quotient auquel on donne le signe $+$ ou $-$, suivant la regle * * 139. des signes de la division.

Par exemple pour diviser $+a$ par $-\sqrt[3]{ab}$, on écrit pour quotient $-\frac{a}{\sqrt[3]{ab}}$. Le quotient de $-\sqrt[3]{ab}$ par $+a$ est $-\frac{\sqrt[3]{ab}}{a}$: on l'écrit encore de cette sorte $-\frac{1}{a}\sqrt[3]{ab}$, parceque $-\frac{\sqrt[3]{ab}}{a} = -1\sqrt[3]{ab}$. Pour diviser $-ax\sqrt[n]{a + bx}$ par $-b$, on écrit pour quotient $+\frac{ax\sqrt[n]{a + bx}}{b}$, ou bien $+\frac{ax}{b}\sqrt[n]{a + bx}$.

REMARQUE.

ON a mis ce premier calcul des incommensurables en définitions, parcequ'il ne consiste qu'en des signes arbitraires qu'on a déterminez à ce calcul; & il est pourtant d'un très

grand uſage dans les Mathematiques. Il n'eſt pas néceſſaire d'avertir qu'on marque auſſi dans les incommenſurables, comme dans les autres grandeurs, la multiplication par le ſigne ×, comme $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$, & la diviſion de deux incommenſurables, en les écrivant en fraction, le dividende ſur une ligne, & le diviſeur au deſſous $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

La multiplication des incommenſurables lorſque chacun des multiplicateurs ne contient qu'un ſeul ſigne radical, & que l'expoſant de chaque ſigne radical eſt le même.

PROBLÊME I.

427. *MULTIPLIER deux ou pluſieurs incommenſurables, dont chacune n'a qu'un ſeul ſigne radical, lequel ſigne a dans chacune le même expoſant.*

Regle ou operation. Il faut prendre le produit des grandeurs qui ſont ſous chaque ſigne radical, & écrire au devant le ſigne radical avec le même expoſant, & ce ſera le produit qu'on cherche. On obſervera la regle * des ſignes + & — de la multiplication.

* 95.

EXEMPLES.

POUR multiplier $+\sqrt[3]{a}$ par $+\sqrt[3]{b}$, on écrira pour produit $+\sqrt[3]{ab}$.

Pour multiplier $-\sqrt[3]{a-b}$ par $+\sqrt[3]{a+b}$, on écrira pour produit $-\sqrt[3]{a^2-b^2}$.

Pour multiplier $+\sqrt[3]{a^2}$ par $-\sqrt[3]{a}$, on écrira pour produit $-\sqrt[3]{a^3} = * - a$.

* 421.

Pour multiplier $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$, il faut prendre le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{4}{5}$ qui eſt $\frac{4}{10}$, & écrire $\sqrt[3]{}$ au devant, & le produit qu'on cherche eſt $\sqrt[3]{\frac{4}{10}}$.

Pour multiplier $+\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{b}$, $-\sqrt[n]{c}$ les unes par les autres, il faut écrire pour produit $+\sqrt[n]{abc}$.

Démonſtration du Problême. $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ peuvent repréſenter les incommenſurables qu'il faut multiplier l'une par l'autre; on va démontrer que leur produit eſt $\sqrt[n]{ab}$. Car * 1. $a :: b.$ ab.

* 72.

ab. Donc * $\sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{a} :: \sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{ab}$. Ainſi * $\sqrt[n]{ab}$ eſt le produit de $\sqrt[n]{a}$ par $\sqrt[n]{b}$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 360. * 72.

COROLLAIRE I.

428. ON multiplie auſſi une incommenſurable par une grandeur commenſurable à la maniere des incommenſurables, en élevant la derniere à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui du ſigne de l'incommenſurable; ce qui donne une expreſſion incommenſurable à la grandeur commenſurable ſans en changer la valeur. Par exemple, pour multiplier $\sqrt[3]{a}$ par b, on change b en $\sqrt[3]{b^3} = b$, puis on forme le produit $\sqrt[3]{ab^3} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b^3} = * b\sqrt[3]{a}$. * 421.

La démonſtration eſt la même. Car 1 . $b^3 :: a . ab^3$. Donc $\sqrt[3]{1} = 1 . \sqrt[3]{b^3} = b :: \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{ab^3} = * b\sqrt[3]{a}$. * *Ce qu'il falloit, &c.* * 421. * 72.

Pour multiplier $\sqrt[n]{a}$ par b, on changera b en $\sqrt[n]{b^n} = * b$, * 421.
& on formera enſuite le produit $\sqrt[n]{ab^n} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n} = * b\sqrt[n]{a}$. * 421.
Car 1. $b^n :: a . ab^n$. Donc * $\sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{b^n} = b :: \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{ab^n}$ * 360.
$= * b\sqrt[n]{a}$. * 421.

COROLLAIRE II.

Qui contient la Methode de reduire une incommenſurable à l'expreſſion la plus ſimple.

429. D'où l'on voit, 1°. que quand la grandeur qui eſt ſous le ſigne $\sqrt[n]{ab^n}$ eſt un produit ab^n formé de deux multiplicateurs, dont l'un eſt une puiſſance parfaite b^n qui a pour expoſant n, c'eſt à dire l'expoſant du ſigne radical, & dont l'autre multiplicateur a eſt une puiſſance imparfaite; on peut changer cette expreſſion en cette autre $b\sqrt[n]{a}$, en laiſſant ſous le ſigne $\surd$ la ſeule puiſſance imparfaite a, & écrivant au-devant du ſigne $\surd$ la racine b de la puiſſance parfaite b^n. Car $\sqrt[n]{ab^n} = * \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} = * b\sqrt[n]{a}$. * 427. * 421.

Cette operation contient une diviſion & une multiplication. Pour le voir clairement on remarquera, 1°. que $\sqrt[n]{ab^n} = 1\sqrt[n]{ab^n} = \underset{1}{1\sqrt[n]{ab^n}}$. 2°. Que pour reduire $1\sqrt[n]{ab^n}$ à $b\sqrt[n]{a}$, on diviſe la grandeur $\underset{1}{1\sqrt[n]{ab^n}} = \underset{1}{1\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n}}$ par $\sqrt[n]{b^n}$; ce qui donne $\frac{1\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n}}{1\sqrt[n]{b^n}} = * \underset{1}{1\sqrt[n]{a}} = 1\sqrt[n]{a}$; & qu'ainſi cette diviſion ſe fait * 109.

en effaçant ſimplement la grandeur b^n dans $1\sqrt[n]{ab^n}$. 3° Mais comme il faut que la grandeur à laquelle on reduit $1\sqrt[n]{ab^n}$ lui ſoit égale, & qu'elle ait preciſément la même valeur que $1\sqrt[n]{ab^n}$; il faut la multiplier par la même grandeur $\sqrt[n]{b^n}$ par laquelle on l'a diviſée, cela ſe fait en écrivant b audevant de $\sqrt[n]{a}$, de cette maniere $b\sqrt[n]{a}$; car $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$. On peut encore remarquer que $1\sqrt[n]{ab^n}$ a deux parties multipliées l'une par l'autre, l'une ſous le ſigne qui eſt $\sqrt[n]{ab^n}$, l'autre hors du ſigne qui eſt ici l'unité ſeule 1. En reduiſant $1\sqrt[n]{ab^n}$ à $b\sqrt[n]{a}$, on diviſe la partie qui eſt ſous le ſigne par $\sqrt[n]{b^n}$ ce qui ſe fait en effaçant b^n & écrivant $1\sqrt[n]{a}$; & on multiplie en même temps l'autre partie (1) qui eſt hors du ſigne, par la même grandeur $\sqrt[n]{b^n} = b$; ce qui ſe fait en écrivant b audevant du ſigne, & $1\sqrt[n]{ab^n}$ eſt reduite à $b\sqrt[n]{a}$ qui eſt égale à $1\sqrt[n]{ab^n}$.

Cette maniere de retirer hors du ſigne dans $\sqrt[n]{ab^n}$ la grandeur commenſurable $b = \sqrt[n]{b^n}$ pour former l'expreſſion $b\sqrt[n]{a}$, s'appelle *reduire une incommenſurable à ſa plus ſimple expreſſion*. On dit auſſi que c'eſt *retirer hors du ſigne une grandeur* b^n *qui eſt ſous le ſigne*.

COROLLAIRE III.

430. 2°. QUAND une incommenſurable contient une commenſurable hors du ſigne comme $b\sqrt[n]{a}$, on peut ſans en changer la valeur, faire paſſer la grandeur commenſurable b ſous le ſigne, en élevant b à la puiſſance n dont l'expoſant eſt celui du ſigne, & multipliant enſuite la grandeur a qui eſt ſous le ſigne par cette puiſſance b^n; & l'on aura $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$.

Application de ces Corollaires à des Exemples.

POUR reduire $\sqrt[3]{18}$ à ſa plus ſimple expreſſion, on diviſera 18 par 9 qui eſt le plus grand quarré qui diviſe exactement 18, & on écrira 3 racine 2e de 9 devant le ſigne radical, & 2 qui eſt le quotient de 18 diviſé par 9 ſous le ſigne radical, & l'expreſſion la plus ſimple de $\sqrt[3]{18}$ ſera $3\sqrt[3]{2}$.

On reduira de même $\sqrt[3]{54}$ à ſon expreſſion la plus ſimple $3\sqrt[3]{2}$, en diviſant 54 par la plus grande 3e puiſſance parfaite 27

qui ſoit un diviſeur de 54, & écrivant le quotient 2 de 54 diviſé par 27 ſous le ſigne, & la racine 3e de 3 de 27 hors du ſigne.

On réduira $\sqrt[3]{\frac{54}{3^2}}$ à ſa plus ſimple expreſſion $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4}}$, en reduiſant le numerateur $\sqrt[3]{54}$ à ſa plus ſimple expreſſion $3\sqrt[3]{2}$, & de même le dénominateur à ſa plus ſimple expreſſion $2\sqrt[3]{4}$, & écrivant enſuite ces plus ſimples expreſſions en fraction $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4}}$, ou bien $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{4}}$; & à cauſe de $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ on peut encore écrire $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{54}{3^2}}$.

On reduira $\sqrt[3]{a^5-a^3b^2}$ à la plus ſimple expreſſion $a\sqrt[3]{a^2-b^2}$, en diviſant la grandeur complexe $a^5-a^3b^2$ par a^3 qui eſt la plus grande 3e puiſſance parfaite qui en ſoit un diviſeur, & écrivant le quotient a^2-b^2 ſous le ſigne, & la racine 3e a de a^3 hors du ſigne.

On reduira $\sqrt[3]{x^6-5ax^5+9a^2x^4-7a^3x^3+2a^4x^2}$ à ſa plus ſimple expreſſion $x-a\sqrt[3]{x^3-2ax^2}$, en diviſant la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ qui eſt la plus grande 3e puiſſance parfaite qui la diviſe exactement, & écrivant le quotient x^3-2ax^2 ſous le ſigne, & $x-a$ qui eſt la racine 3e de $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ hors du ſigne avec une ligne qui couvre $x-a$, pour marquer que l'incommenſurable eſt multipliée par la grandeur complexe entiere $x-a$.

Pour reduire la grandeur incommenſurable $\sqrt[3]{x^2+\frac{4mpx^2}{a^2}}$ à ſon expreſſion la plus ſimple $\frac{x}{a}\sqrt[3]{a^2+4mp}$, 1°. on reduira tous les termes de la grandeur qui eſt ſous le ſigne à un même dénominateur, & l'on aura $\sqrt[3]{\frac{a^2x^2+4mpx^2}{a^2}}$. 2°. On reduira le numerateur à ſon expreſſion la plus ſimple $x\sqrt[3]{a^2+4pm}$, & le dénominateur $\sqrt[3]{a^2}$ a ſon expreſſion la plus ſimple a; & l'on aura $x\sqrt[3]{a^2+4mp}$, ou bien $\frac{x}{a}\sqrt[3]{a^2+4mp}$.

Pour reduire $\sqrt[3]{\frac{a^3m^3}{p^3x^3}+\frac{4a^2m^3}{px^3}}$ à ſa plus ſimple expreſſion $\frac{am}{px}\sqrt[3]{a^2+4mp}$, 1°. on reduira les termes de la grandeur qui eſt ſous le ſigne au même dénominateur, & l'on aura $\sqrt[3]{\frac{a^3m^3+4a^2m^3p}{p^3x^3}}$. 2°. On reduira le numerateur à ſa plus ſimple

expreſſion $am\sqrt[3]{a^2 + 4mp}$, & le dénominateur $\sqrt[3]{p^3x^3}$ à px, & l'on aura $\frac{am}{px}\sqrt[3]{a^2 + 4mp}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire concevoir la maniere de reduire une incommenſurable à ſa plus ſimple expreſſion, quand la grandeur qui eſt ſous le ſigne a pour diviſeur une puiſſance parfaite dont l'expoſant eſt le même que celui du ſigne radical; car quand il n'y a pas de tel diviſeur, on ne peut pas le reduire à une plus ſimple expreſſion, du moins ſans une préparation qu'on donnera dans la ſuite, par laquelle on met ſous le ſigne un diviſeur qui eſt une puiſſance parfaite du degré de l'expoſant du ſigne radical, ſans changer la valeur de l'incommenſurable.

Pour reduire ſous le ſigne dans $3\sqrt[3]{2}$, la grandeur 3, il faut élever 3 à la 3e puiſſance, & multiplier par cette puiſſance 9 la grandeur 2 qui eſt ſous le ſigne, & écrire le produit 18 ſous le ſigne, & l'on aura $\sqrt[3]{18} = 3\sqrt[3]{2}$.

On reduira de même $3\sqrt[3]{2}$ à $\sqrt[3]{54}$, en écrivant ſous le ſigne le produit 54 de 27 (qui eſt la 3e puiſſance de 3) par 2.

On reduira de même $a^2\sqrt{a^2 - b^2}$ à $\sqrt{a^6 - a^6b^2}$. Il en eſt de même des autres.

COROLLAIRE IV.

431. POUR multiplier deux ou pluſieurs incommenſurables qui ont toutes, ou quelques-unes, une grandeur commenſurable hors du ſigne, & qui ont le même expoſant du ſigne radical, comme $a\sqrt[n]{b}$ par $a\sqrt[n]{c}$; il faut écrire le produit des commenſurables hors du ſigne, & celui des incommenſurables ſous le ſigne. Ainſi le produit de $a\sqrt[n]{b} \times a\sqrt[n]{c}$ eſt $a^2\sqrt[n]{bc}$.

On peut auſſi, ſi l'on veut, reduire dans chaque multiplicateur la grandeur commenſurable ſous le ſigne, & faire enſuite la multiplication. Par exemple on reduira $a\sqrt[n]{b}$ à $\sqrt[n]{a^nb}$, & $a\sqrt[n]{c}$ à $\sqrt[n]{a^nc}$, & l'on formera enſuite le produit $\sqrt[n]{a^{2n}bc}$, qui ſe reduit à $a^2\sqrt[n]{bc}$.

Démonſtration. * 1. $a^nb :: a^nc . a^{2n}bc$. Donc *$\sqrt[n]{1} = 1$. *72 *360. *72. $\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{a^nc} = a\sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{a^{2n}bc} = a^2\sqrt[n]{bc}$. Ainſi * $a^2\sqrt[n]{bc}$ & $\sqrt[n]{a^{2n}bc}$ ſont chacune le produit de $a\sqrt[n]{b}$ par $a\sqrt[n]{c}$.

De même $6\sqrt[3]{10}$ eſt le produit de $2\sqrt[3]{5}$ par $3\sqrt[3]{2}$.

COROLLAIRE V.

432. UNE grandeur commenſurable a peut ſe reduire en un produit qui aura pour multiplicateurs la racine de cette grandeur repetée autant de fois que l'expoſant du ſigne radical contiendra d'unitez. Ainſi $a = \sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{a}$, $a = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}$, $a = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a}$. Il en eſt de même des autres. Cela eſt évident par la formation des puiſſances. * *143.

REMARQUE.

433 CETTE reduction d'une grandeur commenſurable en un produit équivalent exprimé par la racine de cette grandeur, eſt d'uſage en pluſieurs calculs. L'on a, par exemple, $\frac{\overline{a+1} \times \sqrt[4]{\overline{c+1}}}{\sqrt[3]{\overline{a+1}} \times \sqrt[3]{\overline{b+1}}}$. En changeant $a+1$ en $\sqrt[3]{\overline{a+1}} \times \sqrt[3]{\overline{a+1}}$, on reduit cette fraction à $\frac{\sqrt[3]{\overline{a+1}} \times \sqrt[3]{\overline{a+1}} \times \sqrt{\overline{c+1}}}{\sqrt[3]{\overline{a+1}} \times \sqrt[3]{\overline{b+1}}}$, laquelle en effaçant les grandeurs communes au numerateur & au dénominateur, ſe reduit à $\frac{\sqrt[3]{\overline{a+1}} \times \sqrt[3]{\overline{c+1}}}{\sqrt[3]{\overline{b+1}}}$.

COROLLAIRE VI.

Où l'on explique la multiplication des racines impoſſibles ou imaginaires.

434. QUAND une grandeur negative (c'eſt à dire précedée du ſigne $-$) eſt regardée comme une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre pair, par exemple une 2e puiſſance, une 4e puiſſance, une 6e puiſſance, &c. ſa racine lineaire eſt une grandeur impoſſible * qu'on nomme imaginaire. Ainſi $\sqrt[2]{-2}$, $\sqrt[2]{-2}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[4]{-2}$, &c. ſont des racines imaginaires. * 100,

Le calcul de ces racines imaginaires ſert dans la reſolution de beaucoup de Problêmes. Voici ce qu'il faut ſur tout obſer-
435. ver dans ce calcul. 1°. Une racine imaginaire étant élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt le même que l'expoſant du ſigne radical, rétablit la grandeur réelle dont elle étoit la racine. Ainſi $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-a} = \sqrt{-a^2} = -a$; $\sqrt[4]{-a}$ étant élevée à la 4e puiſſance, donne la grandeur réelle negative $-a$. Il en eſt de même des autres.

436. 2°. Il y a deux ſignes + ou — dans chaque imaginaire; l'un, qui eſt ſous le ſigne radical, eſt toujours —; l'autre, qui eſt audevant du ſigne radical, eſt ou + ou —.

Quand on multiplie une grandeur imaginaire par une grandeur réelle, comme $-\sqrt[3]{-3}$ par $+2$, ou par $+\sqrt[3]{2}$, il ne faut avoir égard qu'au ſigne qui eſt au devant du ſigne
* 95. radical, & ſuivre la regle * des ſignes + & — de la multiplication. Ainſi $+2 \times -\sqrt[3]{-3} = -2\sqrt[3]{-3}$. De même $+\sqrt[3]{2} \times -\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{-3}$, ou ſimplement $-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{-3}$.

Mais quand on multiplie une imaginaire par elle-même,
* 435. & que cette multiplication * rétablit la grandeur réelle negative, (comme quand on multiplie $+\sqrt[3]{-3}$ par $-\sqrt[3]{-3}$, ce qui rétablit la grandeur réelle -3) il faut avoir égard, à deux ſignes; celui qui précede immediatement la gran-
* 434. deur réelle -3 rétablie * eſt toujours —; l'autre, qui précede ce ſigne negatif —, vient de la multiplication des ſignes qui précedoient les ſignes radicaux dans les imaginai-
* 95. res qu'on a multipliées: ce ſecond ſigne ſuit * la regle des ſignes de la multiplication. Ainſi ce ſigne eſt + quand les ſignes qui précedent les ſignes radicaux ſont tous deux +, ou tous deux —, & ce ſigne eſt — quand l'un des ſignes qui précedent les ſignes radicaux eſt + & l'autre —.

D'où l'on voit que dans ce cas où la multiplication rétablit la grandeur réelle negative; cette grandeur réelle rétablie eſt d'abord précedée de deux ſignes; celui qui la tou-
* 95. che eſt —, & l'autre eſt + ou —, ſelon * la regle des ſignes + & —. Ainſi $+\sqrt[3]{-3}$ par $-\sqrt[3]{-3} = --3$, $+\sqrt[3]{-3}$ par $+\sqrt[3]{-3} = +-3$, enfin $-\sqrt[3]{-3}$ par $-\sqrt[3]{-3} = +-3$.

* 30 & 31. Mais $--3 =$ * $+3$, & $+-3 = -3$. C'eſt ce qui donne cette regle particuliere à la multiplication des imaginaires, dont le ſigne radical a pour expoſant 2, parceque ce ſont preſque les ſeules imaginaires qui ſe trouvent dans l'uſage ordinaire, & on peut aiſément étendre la regle aux autres imaginaires.

Regle pour les ſignes dans la multiplication des imaginaires qui ont $\sqrt[3]{}$.

437. QUAND on multiplie deux imaginaires, qui ont la même grandeur negative ſous $\sqrt[3]{}$, l'une par l'autre ; la grandeur réelle qui en vient eſt précedée du ſigne + quand les ſignes qui précedent $\sqrt[3]{}$ ſont differens, l'un + & l'autre —. Mais quand les ſignes qui précedent $\sqrt[3]{}$ ſont tous deux + ou tous deux —, la grandeur réelle qui vient de la multiplication eſt précedée du ſigne —. Par exemple $+\sqrt[3]{-a} \times -\sqrt[3]{-a} = +a$, $-\sqrt[3]{-a} \times +\sqrt[3]{-a} = +a$, $+\sqrt[3]{-a} \times +\sqrt[3]{-a} = -a$, $-\sqrt[3]{-a} \times -\sqrt[3]{-a} = -a$.

Ces choſes ſuppoſées, la multiplication des racines imaginaires ſe fait comme celles des autres racines, en obſervant ce qui eſt de particulier aux imaginaires.

Exemples de la multiplication des racines imaginaires.

438. POUR multiplier $+a\sqrt[3]{-b}$ par $+c\sqrt[3]{-b}$, on trouvera d'abord $+ac \times -b$, qu'on reduira à $-abc$.

On trouvera de même que $-a\sqrt[3]{-b} \times -c\sqrt[3]{-b} = +ac \times -b = -abc$, & que $+a\sqrt[3]{-b} \times -c\sqrt[3]{-b} = -ac \times -b = +abc$.

Le produit de -3 par $\sqrt[3]{-6} = -3\sqrt[3]{-6}$.

Pour multiplier $-\sqrt[3]{-b}$ par $+a\sqrt[3]{a}$; il faut écrire $-a\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{-b}$, ou bien pour éviter la confuſion, $-a\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{-b}$.

REMARQUE.

439. DANS la multiplication d'une racine imaginaire $\sqrt[3]{-b}$ par une racine réelle $\sqrt[3]{a}$, il vaut mieux, ce ſemble, écrire pour le produit $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{-b}$, que $\sqrt[3]{-ab}$, afin de diſtinguer toujours dans le calcul la racine imaginaire $\sqrt[3]{-b}$ de la racine réelle $\sqrt[3]{a}$ par laquelle elle eſt multipliée.

La raiſon de cette diſtinction eſt que la multiplication des imaginaires ne rétablit la grandeur réelle negative dont la racine eſt imaginaire, que dans le ſeul cas où la racine imaginaire eſt élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt le même

que l'expoſant du ſigne radical ; par exemple, la multiplication de $\sqrt[2]{-b}$ ne rétablira la grandeur réelle $-b$ qu'en élevant $\sqrt[2]{-b}$ à la 2e puiſſance, ce qui arrive en multipliant $\sqrt[2]{-b}$ par $\sqrt[2]{-b}$. Le produit $\sqrt[2]{-b^2}$ eſt alors égal à $-b$. Mais ſi en multipliant $\sqrt[2]{-b}$ par $\sqrt[2]{b}$, on écrivoit auſſi pour produit $\sqrt[2]{-b^2}$; dans ce cas $\sqrt[2]{-b^2}$ ne ſeroit pas la grandeur réelle negative $-b$ dont $\sqrt[2]{-b}$ eſt la racine imaginaire; (& ſi l'on retiroit la racine b hors du ſigne, il faudroit laiſſer ſous le ſigne $\sqrt[2]{}$ l'imaginaire $\sqrt[2]{-1}$, de cette maniere $b\sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{-b^2}$, pour exprimer que dans la multiplication d'une imaginaire $\sqrt[2]{-b}$ par une réelle $\sqrt[2]{b}$, le produit $\sqrt[2]{-b^2}$ ou $b\sqrt[2]{-1}$ contient toujours une racine imaginaire.)

Pour éviter cette confuſion de deux expreſſions ſemblables de deux choſes ſi differentes, il me ſemble qu'il vaut mieux écrire $\sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{-b}$, que $\sqrt[2]{-b^2}$.

Quand on multiplie auſſi une imaginaire par une imaginaire differente, comme $\sqrt[2]{-a}$ par $\sqrt[2]{-b}$, il faut de même écrire pour le produit $\sqrt[2]{-a} \times \sqrt[2]{-b}$, afin de diſtinguer toujours chacune des imaginaires differentes dans le produit.

On peut auſſi remarquer que quand la grandeur qui eſt précedée du ſigne $-$ ſous le ſigne $\sqrt[2]{}$, eſt un quarré parfait comme dans $\sqrt[2]{-b^2}$, qui ne vient pas du produit $\sqrt[2]{-b} \times \sqrt[2]{-b}$, duquel naîtroit la grandeur réelle $-b$, mais qui vient de ce qu'on a tiré la racine 2e du quarré negatif $-b^2$ en écrivant $\sqrt[2]{-b^2}$; il paroît mieux de conſerver cette expreſſion qui diſtingue la grandeur imaginaire, que de retirer hors du ſigne $\surd$, la racine de ce quarré parfait, de cette maniere $b\sqrt[2]{-1}$. Et ſi l'on ſe ſervoit dans la pratique de cette expreſſion $b\sqrt[2]{-1}$, au lieu de $\sqrt[2]{-b^2}$, il faudroit prendre garde de ne la pas confondre avec les grandeurs réelles.

La Diviſion des incommenſurables, lorſque le dividende & le diviſeur ne contiennent chacun qu'un ſigne radical, & que l'expoſant de chaque ſigne radical eſt le même.

PROBLÊME II

440. *FAIRE la diviſion de deux grandeurs incommenſurables, ou dont au moins l'une eſt incommenſurable, lorſque chaque incommenſurable n'a qu'un ſigne radical, & que l'expoſant de chaque ſigne radical eſt le même.*

Regle ou Operation. Il faut diviſer la grandeur qui eſt ſous le ſigne dans le dividende par la grandeur qui eſt ſous le ſigne dans le diviſeur, & écrire le ſigne radical avec le même expoſant devant le quotient, & ce ſera le quotient qu'on cherche. On ſuivra * la regle des ſignes + & — de la diviſion. *139.

EXEMPLES.

POUR diviſer $+\sqrt[3]{a^2b}$ par $+\sqrt[3]{ab}$, on diviſera a^2b par ab, ce qui donnera le quotient a, on écrira le ſigne $\sqrt[3]{}$ devant le quotient, & l'on aura $+\sqrt[3]{a}$ pour le quotient.

Pour diviſer $+\sqrt[3]{b^2}$ par $-\sqrt[3]{bc}$, on écrira pour quotient $-\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$, ou, ſi l'on veut, $-\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c}}$.

Pour diviſer $-\sqrt[4]{a}$ par $-\sqrt[4]{b}$, on écrira pour quotient $+\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

Pour diviſer $-\sqrt[n]{a}$ par $+\sqrt[n]{b}$, on écrira pour quotient $-\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Pour diviſer $\sqrt[2]{a^2-b^2}$ par $\sqrt[2]{a-b}$, on diviſera a^2-b^2 par $a-b$, & on écrira pour quotient $\sqrt[2]{a+b}$.

Pour diviſer $\sqrt[n]{b}$ par $\sqrt[n]{b}$, il faut écrire pour quotient $\sqrt[n]{1} = 1$.

On diviſera de même $+\sqrt[3]{12}$ par $-\sqrt[3]{4}$, en écrivant pour quotient $-\sqrt[3]{3}$.

On trouvera de même que le quotient de $-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ par $+\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, eſt $-\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$, en réduiſant * $-\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ à ſa plus ſimple expreſſion. *429.

Pour trouver le quotient de $\sqrt[n]{a^q}$ diviſé par $\sqrt[m]{\frac{a^p}{b^p}}$, il faut diviſer a^q par $\frac{a^p}{b^p}$, ce qui donnera $\frac{a^q b^p}{a^p}$, & écrire $\sqrt[m]{\frac{a^q b^p}{a^p}}$

* 153. qu'on pourra auſſi écrire de cette ſorte * $a^{\overline{q-p}}\, b^p\, {}^{\frac{1}{m}}$.

& 149. *Démonſtration.* En prenant $\sqrt[n]{a}$ pour repréſenter le dividende, & $\sqrt[n]{b}$ pour repréſenter le diviſeur, il faut démontrer que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ eſt le quotient de $\sqrt[n]{a}$ diviſée par $\sqrt[n]{b}$, ou bien

* 106. que * $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{\frac{a}{b}} . 1$.

* 106 & 111. * $a . b :: \frac{a}{b} . 1$. Donc * $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{\frac{a}{b}} . \sqrt[n]{1} = 1$. *Ce qu'il*

* 360 & 394. *falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

441. POUR diviſer $a\sqrt[n]{b}$ par $c\sqrt[n]{d}$ il faut diviſer, 1°, la grandeur qui eſt hors du ſigne dans le dividende par la grandeur qui eſt hors du ſigne dans le diviſeur, & diviſer, 2°, par le Problême précedent les grandeurs qui ſont ſous le ſigne: écrire le premier quotient au devant du ſigne, & le ſecond ſous le ſigne, & l'on aura $\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$ pour le quotient qu'on cherche; ou bien on réduira ſous le ſigne dans le dividende & dans le diviſeur les grandeurs qui ſont hors du ſigne, on en fera enſuite la diviſion par le Problême précedent, & on abregera le quotient en retirant hors du ſigne les grandeurs qu'on en peut retirer.

Par exemple, on réduira $a\sqrt[n]{b}$ à $\sqrt[n]{a^n b}$, & $c\sqrt[n]{d}$ à $\sqrt[n]{c^n d}$; enſuite on formera le quotient $\sqrt[n]{\frac{a^n b}{c^n d}}$ qu'on réduira à $\frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$.

* 106 & 111. *Démonſtration.* * $a^n b . c^n d :: \frac{a^n b}{c^n d} . 1$. Donc * $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.

* 394. * 429. $\sqrt[n]{c^n d} = c\sqrt[n]{d} :: \sqrt[n]{\frac{a^n b}{c^n d}} = * \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}} . \sqrt[n]{1} = 1$. * *Ce qu'il falloit*

* 106. *démontrer.*

COROLLAIRE II.

442. POUR faire la diviſion quand il n'y a que l'une des deux

* 430. grandeurs données qui ſoit incommenſurable, il faut * réduire la grandeur commenſurable, ſans en changer la valeur, à une expreſſion incommenſurable qui ait l'expoſant du ſigne de l'incommenſurable donnée, & faire enſuite la diviſion.

Par exemple, pour diviſer a par $\sqrt[n]{a}$, on réduira a à $\sqrt[n]{a^n}$, & enſuite on diviſera $\sqrt[n]{a^n}$ par $\sqrt[n]{a}$, & on trouvera le quotient $\sqrt[n]{\frac{a^n}{a}} = \sqrt[n]{a^{n-1}}$.

On trouvera de même le quotient de 2 diviſé par $\sqrt{2}$, en changeant 2 en $\sqrt[3]{4}$; & faiſant enſuite la diviſion, on aura $\sqrt[3]{\frac{4}{2}} = \sqrt[3]{2}$ pour le quotient.

Pour diviſer 3 par $\sqrt[3]{2}$, on changera 3 en $\sqrt[3]{9}$, & on trouvera enſuite $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ pour le quotient qu'on cherche.

De même pour diviſer $\sqrt[5]{32}$ par 2, on changera 2 en $\sqrt[5]{8}$, & on trouvera enſuite le quotient $\sqrt[5]{4} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{8}}$.

REMARQUE.

443. ON peut auſsi faire la diviſion ſans changer l'expreſſion de la grandeur commenſurable, en écrivant en fraction la grandeur commenſurable & la grandeur incommenſurable; c'eſt à dire en écrivant en fraction le dividende & le diviſeur.

Par exemple, on diviſera a par $\sqrt[n]{a}$, en écrivant $\frac{1}{1}\sqrt[n]{a}$; on diviſera $\sqrt[n]{a}$ par a, en écrivant $\frac{1}{a}\sqrt[n]{a}$.

De même le quotient de $3\sqrt{2}$ par 2, ſera $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

COROLLAIRE III.

Où l'on explique la diviſion des racines imaginaires.

444. QUAND le dividende & le diviſeur contiennent la même grandeur imaginaire; comme auſsi quand l'un des deux contient une imaginaire, & l'autre contient la grandeur négative réelle, dont la premiere eſt la racine imaginaire: la diviſion ſe fait de la même maniere que celle des incommenſurables qu'on vient d'expliquer, en remarquant ſeulement que le quotient qui vient d'une imaginaire diviſée par elle-même, ſans avoir égard au ſigne qui précede le ſigne $\sqrt{}$, eſt l'unité poſitive. Par exemple $\frac{\sqrt{-l^2}}{\sqrt{-l^2}} = +1$; $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}} = +1$: Car il eſt évident que $\sqrt{-l^2}$ eſt contenue une fois dans elle-même $\sqrt{-l^2}$, ce qui ſe marque par l'unité poſitive.

Pour diviſer $+\sqrt[2]{-3}$ par $-\sqrt[2]{-3}$, le quotient doit être $\frac{+\sqrt[2]{-3}}{-\sqrt[2]{-3}} = -+1 = -1$.

De même $\frac{a\sqrt[2]{-f^2}}{b\sqrt[2]{-f^2}} = \frac{a}{b}$.

Comme auſſi pour diviſer $-f^2$ par $\sqrt[2]{-f^2}$, il faut changer $-f^2$ en $\sqrt[2]{-f^2} \times \sqrt[2]{-f^2}$, & enſuite former le quotient $\frac{\sqrt[2]{-f^2} \times \sqrt[2]{-f^2}}{\sqrt[2]{-f^2}} = \sqrt[2]{-f^2}$.

De même pour diviſer $\sqrt[2]{-f^2}$ par $-f^2$, il faut changer $-f^2$ en $\sqrt[2]{-f^2} \times \sqrt[2]{-f^2}$, & former enſuite le quotient $\frac{1}{\sqrt[2]{-f^2}} = \frac{\sqrt[2]{-f^2}}{\sqrt[2]{-f^2} \times \sqrt[2]{-f^2}}$.

On trouvera de la même maniere que le quotient de $-f^2 = \sqrt[2]{-f^2} \times \sqrt[2]{-f^2}$ par $a\sqrt[2]{-f^2}$, eſt $\frac{1}{a}\sqrt[2]{-f^2}$; que celui de $a\sqrt[2]{-f^2}$ par $-f^2$ $(= \sqrt[2]{-f^2} \times \sqrt[2]{-f^2})$ eſt $\sqrt[2]{-f^2}$.

Mais quand le dividende contient une imaginaire & le diviſeur en contient une autre differente; comme auſſi quand il n'y a que l'un des deux qui contienne une imaginaire, & que l'autre contient une grandeur réelle commenſurable (differente de la grandeur réelle négative dont le premier contient la racine imaginaire,) la diviſion ſe fait en écrivant ſimplement pour quotient le dividende & le diviſeur en fraction.

Par exemple, pour diviſer $\sqrt[2]{-2}$ par $\sqrt[2]{-3}$, il faut écrire pour quotient $\frac{\sqrt[2]{-2}}{\sqrt[2]{-3}}$. De même le quotient de a diviſée par $\sqrt[2]{-f^2}$ eſt $\sqrt[2]{-f^2}$. Le quotient de $\sqrt[2]{a}$ diviſée par $\sqrt[2]{-f^2}$, eſt $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{-f^2}}$. Le quotient de $\sqrt[2]{-f^2}$ par $\sqrt[2]{a}$, eſt $\frac{\sqrt[2]{-f^2}}{\sqrt[2]{a}}$. Il en eſt de même des autres.

PROBLÊME IV.

Où l'on enſeigne à connoître les cas dans leſquels les incommenſurables ſont commenſurables entr'elles.

445. *TROUVER les cas où deux incommenſurables dont le ſigne radical a le même expoſant, ſont commenſurables entr'elles ; c'eſt à dire les cas où le rapport d'une incommenſurable à une autre incommenſurable eſt égal au rapport d'un nombre à un autre nombre.*

1. *Maniere.* Il faut réduire * l'une & l'autre incommenſurable à leur plus ſimple expreſſion ; & ſi, après la réduction, il ſe trouve dans l'une & l'autre incommenſurable la même grandeur ſous le ſigne radical, elles ſont commenſurables entr'elles. * 429.

EXEMPLES.

ON connoîtra que $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[3]{18}$ ſont commenſurables entr'elles ; car $\sqrt[3]{32} = 4\sqrt[3]{2}$, & $\sqrt[3]{18} = 3\sqrt[3]{2}$; mais $4\sqrt[3]{2} . 3\sqrt[3]{2} :: * 4 . 3$. Par conſéquent $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[3]{18}$ ont entr'elles le même rapport que les nombres 4 & 3. *75 & 109.

De même $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ ſont commenſurables, parceque

$$\sqrt[3]{375} = 5\sqrt[3]{3}, \text{ \& } \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}, \text{ \& } \frac{5\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}} = * \frac{5}{2}.$$ *75. & 109.

En general toutes les incommenſurables repréſentées par $\sqrt[n]{a^n b}$ & par $\sqrt[n]{bc^n}$ ſont commenſurables entr'elles, parceque

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}, \text{ \& } \sqrt[n]{bc^n} = c\sqrt[n]{b} ; \text{ \& } \frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{b}} = * \frac{a}{c}.$$ *75 & 109.

Cela convient aux imaginaires quand les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical ſont les mêmes. Par exemple, $3\sqrt{-2} . 5\sqrt{-2} :: * 3 . 5$. *75 & 109.

Cette methode eſt évidente.

2. *Maniere.* On ſuppoſera les deux incommenſurables repréſentées par $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$, & que l'expoſant des deux ſignes radicaux ſoit un même nombre entier quelconque repréſenté par n. Il faudra élever celle des deux grandeurs qu'on voudra, qui eſt ſous l'un des deux mêmes ſignes radicaux, à la puiſſance $n - 1$, & l'on aura a^{n-1} ou b^{n-1} ; il faudra enſuite multiplier cette puiſſance par la grandeur qui eſt

ſous l'autre ſigne radical, & l'on aura $a^{n-1}b$, ou ab^{n-1}. Il faudra voir après cela ſi ce produit $a^{n-1}b$, ou bien ab^{n-1}, eſt une puiſſance parfaite qui ait pour expoſant n; c'eſt à dire il faudra en extraire la racine dont l'expoſant eſt n; & ſi l'on trouve la racine exacte, c'eſt à dire, ſi $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$, ou bien $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$, repréſentent chacune une racine exacte; les deux incommenſurables repréſentées par $\sqrt[n]{a}$ & par $\sqrt[n]{b}$ ſeront
* 409. commenſurables entr'elles, & leur rapport $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ſera égal à * $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$, ou bien à $\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$.

Par exemple, pour voir ſi $\sqrt[5]{32}$ & $\sqrt[5]{18}$ ſont commenſurables, j'éleve 32 à la puiſſance dont l'expoſant eſt $2 - 1 = 1$, c'eſt à dire, 32 eſt la puiſſance même, je multiplie 32 par 18, & je trouve le produit 576; j'en tire la racine quarrée, & je trouve la racine exacte 24. Cela me fait connoître que $\sqrt[5]{32}$ & $\sqrt[5]{18}$ ſont commenſurables, & que leur rapport eſt égal à $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$.

Pour connoître ſi $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ ſont commenſurables, j'éleve 24 à la puiſſance $3 - 1 = 2$, & je multiplie cette puiſſance qui eſt 576 par 375; j'extrais la racine 3e du produit 216000, & je trouve que cette racine eſt exactement 60; j'en conclus que $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ ſont commenſurables, & que leur rapport $\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{24}} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}$.

Ou bien j'éleve 375 à la puiſſance $3 - 1 = 2$; je multiplie cette puiſſance qui eſt 140625 par 24; j'extrais la racine 3e du produit 3375000; & trouvant que cette racine eſt exactement 150, j'en conclus que $\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{24}} = \frac{175}{150} = \frac{5}{2}$.

Démonſtration de la ſeconde maniere. On ſuppoſera que
* 389. $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ repréſentent les deux incommenſurables. $\frac{a}{b}$ * eſt compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ que n contient d'unitez.

En concevant entre a & b autant de moyens proportion-
* 405 & nels qu'il y a d'unitez dans $n - 1$, $\frac{a}{b}$ * eſt auſſi compoſé d'au-
407.

tant de rapports égaux à $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$ ou à $\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$ qu'il y a d'unitez dans n. Par conſequent $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$. Mais quand $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$, comme auſſi $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$, eſt une puiſſance parfaite dont l'expoſant eſt n; le rapport $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$, comme auſſi $\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$ eſt évidemment un rapport de deux grandeurs commenſurables. Par conſequent dans ce cas $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ eſt un rapport commenſurable.

3. *Maniere*. Il faut écrire en fraction les deux grandeurs qui ſont ſous les ſignes radicaux, & réduire * cette fraction aux moindres termes; par exemple, ſuppoſant que les deux incommenſurables ſoient repréſentées par $\sqrt[n]{a^n b}$, & $\sqrt[n]{bc^n}$, on écrira $\frac{a^n b}{bc^n}$, qu'on réduira au moindre rapport $\frac{a^n}{c^n}$. Si le numerateur & le dénominateur du moindre rapport $\frac{a^n}{c^n}$ ſont chacun une puiſſance parfaite dont l'expoſant ſoit n, le rapport des deux incommenſurables ſera commenſurable; car $\frac{a^n b}{bc^n} = \frac{a^n}{c^n}$; donc $\frac{\sqrt[n]{a^n b}}{\sqrt[n]{bc^n}} = * \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = * \frac{a}{b}$. *269. *360. *421.

Par exemple, on verra que $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[3]{18}$ ſont commenſurables; parceque $\frac{32}{18}$ étant réduite aux moindres termes $\frac{16}{9}$, les deux termes ſont chacun une 2e puiſſance parfaite. Ainſi $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{4}{3}$.

PROBLÈME IV.

446. *ELEVER une incommenſurable repréſentée en general par* $\sqrt[n]{a}$ *à telle puiſſance qu'on voudra.*

Regle ou Operation. Il n'y a qu'à multiplier * l'incommenſurable $\sqrt[n]{a}$ une fois par elle-même, 2 fois, 3 fois, 4 fois, & ainſi de ſuite, & l'on aura de ſuite toutes ſes puiſſances * $\sqrt[n]{a^2}$, $\sqrt[n]{a^3}$, $\sqrt[n]{a^4}$, $\sqrt[n]{a^5}$, &c. *427. *143.

En general, pour élever $\sqrt[n]{a}$ à la puiſſance p, en ſuppoſant que n & p repréſentent deux nombres entiers quelconques, il faut écrire $\sqrt[n]{a^p}$. Et pour élever $\sqrt[n]{a^p}$ à la puiſſance q, il faut écrire $\sqrt[n]{a^{pq}}$.

COROLLAIRE I.

447. EN ſuppoſant que n repréſente ſucceſſivement tous les nombres entiers 1, 2, 3, 4, &c. l'unité & les puiſſances d'une incommenſurable priſes de ſuite, feront une progreſſion $\div \sqrt[n]{1} = 1 . \sqrt[n]{a^1} . \sqrt[n]{a^2} . \sqrt[n]{a^3} . \sqrt[n]{a^4} . \sqrt[n]{a^5}$. &c. Cette progreſſion, à cauſe de l'expoſant indéterminé n, repréſentera toutes les progreſſions formées par les racines d'une même grandeur a, & des puiſſances de cette racine priſes de ſuite, dont 1 eſt le premier terme, $\sqrt[n]{a^1}$ le ſecond, $\sqrt[n]{a^2}$ le troiſiéme, & ainſi de ſuite.

Car il eſt évident que le même rapport $\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}}$ regne dans la progreſſion.

COROLLAIRE II.

448. QUAND $n = 1$, alors le ſigne $\sqrt[1]{}$ ne marque aucune racine de la grandeur a, ni aucune des puiſſances de a, mais il repréſente que a, & les puiſſances de a ſont priſes en elles mêmes, c'eſt à dire $\sqrt[1]{a} = a$, $\sqrt[1]{a^2} = a^2$; ainſi quand $n = 1$, la progreſſion eſt $\div 1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7 . a^8$, &c.

Quand $n = 2$, la progreſſion eſt $\div 1 . \sqrt[2]{a} . \sqrt[2]{a^2} . \sqrt[2]{a^3} \sqrt[2]{a^4}$. &c. Quand $n = 3$, $\div 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[3]{a^3} . \sqrt[3]{a^4} . \sqrt[3]{a^5} . \sqrt[3]{a^6}$. &c. Quand $n = 6$, $\div 1 . \sqrt[6]{a} . \sqrt[6]{a^2} . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^4} . \sqrt[6]{a^5} . \sqrt[6]{a^6} . \sqrt[6]{a^7} . \sqrt[6]{a^8} . \sqrt[6]{a^9} . \sqrt[6]{a^{10}} . \sqrt[6]{a^{11}} . \sqrt[6]{a^{12}}$. &c. Ces progreſſions particulieres ſuffiſent pour faire appercevoir le nombre infini de progreſſions particulieres repréſentées par la progreſſion generale.

COROLLAIRE III.

449. LORSQUE l'expoſant du ſigne radical d'une progreſſion eſt multiple de l'expoſant du ſigne radical d'une autre progreſſion, tous les termes de cette derniere ſe trouvent parmi les termes de la premiere d'une maniere équivalente.

Ainſi tous les nombres étant multiples de l'unité, les termes

termes de la progreſſion $\sqrt[1]{}$ dont l'expoſant du ſigne $\checkmark$ eſt 1, ſont parmi les termes de chacune des autres progreſſions.

Tous les termes de la progreſſion, dont le ſigne radical a pour expoſant 2, ſe trouvent parmi les termes de la progreſſion $\sqrt[2]{}$, de la progreſſion $\sqrt[6]{}$, de la progreſſion $\sqrt[3]{}$, de la progreſſion $\sqrt[12]{}$, &c.

Tous les termes de la progreſſion $\sqrt[1]{}$, ſe trouvent dans chacune des progreſſions dont les ſignes radicaux ſont $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[12]{}$, &c. Il en eſt de même des autres progreſſions.

Démonſtration. 1°. Il eſt évident que les termes de la progreſſion $\sqrt[1]{}$ ſe trouvent dans chacune des autres repréſentées par la progreſſion generale $\sqrt[n]{}$; car il eſt clair que, par exemple, $\sqrt[2]{a^2} = a$, $\sqrt[2]{a^4} = a^2$; & ainſi des autres; de même dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[6]{a^6} = a$; $\sqrt[6]{a^{12}} = a^2$; $\sqrt[6]{a^{18}} = a^3$; & ainſi des autres; & en general $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, $\sqrt[n]{a^{3n}} = a^3$, &c.

De même tous les termes de la progreſſion $\sqrt[2]{}$ ſe trouvent d'une maniere équivalente dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$ où 6 eſt multiple de 2, & dans toutes les autres où l'expoſant du ſigne eſt multiple de 2. Car, par exemple, le terme $\sqrt[2]{a}$ étant le moyen proportionnel dans la progreſſion $\sqrt[2]{}$, entre 1 & a, il eſt clair que quelque expreſſion que puiſſe avoir le moyen proportionnel entre 1 & a, ce ſera toujours une grandeur égale à $\sqrt[2]{a}$; & dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$, il eſt évident que $\sqrt[6]{a^3}$ eſt un moyen proportionnel entre 1 & $\sqrt[6]{a^6} = a$; puiſque $\div \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6}$; ainſi $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[2]{a}$.

Tous les termes de la progreſſion $\sqrt[1]{}$ ſe trouvent auſſi d'une maniere équivalente dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$ où 6 eſt multiple de 3. Par exemple, $\sqrt[1]{a}$ étant le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[1]{a^3} = a$ dans la progreſſion $\sqrt[1]{}$; quelqu'expreſſion que puiſſe avoir le 1er des deux moyens proportionnels entre 1 & a, ce ſera toujours une grandeur égale à $\sqrt[1]{a}$. Or il eſt évident que dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$, le terme $\sqrt[6]{a^2}$ peut être regardé comme le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[6]{a^6} = a$, puiſque $\div 1 . \sqrt[6]{a^2} . \sqrt[6]{a^4} . \sqrt[6]{a^6}$. Par conſequent $\sqrt[1]{a} = \sqrt[6]{a^2}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire appercevoir clairement

aux lecteurs la verité de ce raiſonnement. Dans une progreſſion dont l'expoſant du ſigne eſt un nombre multiple de l'expoſant du ſigne d'une autre progreſſion, on peut diſtinguer tout autant de moyens proportionnels entre 1 & a, & entre toutes les puiſſances de a priſes de ſuite, dans la premiere que dans la ſeconde.

Par exemple, dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$, on peut diſtinguer tout autant de moyens proportionnels entre les termes 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, & ainſi de ſuite, qu'il y en a entre 1 & a, & a^2 & a^3, &c. dans la progreſſion $\sqrt[3]{}$; comme auſſi on peut diſtinguer tout autant de moyens proportionnels dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$ entre 1 & a, a & a^2, a^2 & a^3, &c. qu'il y en a dans la progreſſion $\sqrt{}$, entre 1 & a, a & a^2, a^2 & a^3, &c. Car il eſt évident qu'en prenant dans la progreſſion $\sqrt[6]{}$, le 1er terme, le 4e, le 7e terme, le 10e terme, & ainſi de ſuite, en laiſſant deux termes interpoſez, on aura la progreſſion $\div\ \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6} = a . \sqrt[6]{a^9} . \sqrt[6]{a^{12}} = a^2$, &c. dans laquelle il y a un moyen proportionnel entre 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, &c. comme il y a un moyen proportionnel entre 1 & a, entre a & a^2, &c. dans la progreſſion $\sqrt[3]{}$ qui eſt $\div\ 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} = a . \sqrt[3]{a^3} . \sqrt[3]{a^4} = a^2$. &c. En comparant de même la progreſſion $\sqrt[6]{}$ avec la progreſſion $\sqrt{}$, on verra qu'en prenant le 1er terme, le 3e, le 5e, & ainſi de ſuite, en laiſſant un terme interpoſé, on aura la progreſſion $\div\ \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^2} . \sqrt[6]{a^4} . \sqrt[6]{a^6} = a . \sqrt[6]{a^8} . \sqrt[6]{a^{10}} . \sqrt[6]{a^{12}} = a^2$. &c. dans laquelle il y a deux moyens proportionnels entre 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, &c. comme il y a deux moyens proportionnels entre 1 & a, entre a & a^2, entre a^2 & a^3, &c. dans la progreſſion $\sqrt{}$ qui eſt $\div\ \sqrt{1} = 1 . \sqrt{a} . \sqrt{a^2} . \sqrt{a^3} = a . \sqrt{a^4} . \sqrt{a^5} . \sqrt{a^6} = a^2$. &c.

Or les grandeurs 1, a, a^2, &c. étant égales dans les deux progreſſions que l'on compare, les deux moyens proportionnels
* 408. de l'une, * ſont neceſſairement égaux aux moyens correſpondans de l'autre.

Par conſequent lorſque l'expoſant du ſigne d'une progreſſion eſt multiple de l'expoſant du ſigne d'une autre progreſ-

ſion, tous les termes de cette derniere ſe trouvent d'une maniere équivalente parmi les termes de la premiere. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE IV. ET PROBLÈME V.

450. *QUAND on a une incommenſurable comme* $\sqrt[6]{a^3}$; *en trouver une expreſſion équivalente*, 1°, *avec une ſigne radical dont l'expoſant ſoit multiple de l'expoſant* 6 *de l'incommenſurable donnée, par exemple, avec le ſigne* $\sqrt[12]{}$. 2°. *avec un ſigne dont l'expoſant ſoit une aliquote ou ſous-multiple de l'expoſant du ſigne donné* $\sqrt[6]{}$, *par exemple, avec le ſigne* $\sqrt[3]{}$.

Regle ou Operation pour le premier cas. Il faut diviſer l'expoſant du ſigne que l'on demande par l'expoſant du ſigne donné (dans l'exemple, 12 par 6;) le quotient (qui eſt 2 dans cet exemple) ſera l'expoſant de la puiſſance à laquelle il faut élever la grandeur qui eſt ſous le ſigne donné. C'eſt à dire, il faut élever la grandeur qui eſt ſous le ſigne donné à la puiſſance dont le quotient eſt l'expoſant; écrire au devant le ſigne radical avec l'expoſant qu'on demande, & l'on aura l'expreſſion équivalente qu'on cherchoit. Dans notre exemple il faut élever a^3 à la puiſſance dont l'expoſant ſoit le quotient 2, & écrire le ſigne $\sqrt[12]{}$ au devant de cette puiſſance a^6, & l'on aura $\sqrt[12]{a^6} = \sqrt[6]{a^3}$. Car comme dans $\div \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6} = a$; la grandeur $\sqrt[6]{a^3}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a; de même dans $\div \sqrt[12]{1} = 1 . \sqrt[12]{a^6} . \sqrt[12]{a^{12}} = a$; $\sqrt[12]{a^6}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a.

Regle ou operation pour le ſecond cas. Il faut diviſer l'expoſant du ſigne de la grandeur donnée par l'expoſant du ſigne qu'on demande qui en eſt ſous multiple (dans notre exemple, 6 par 2.) Prendre la racine de la grandeur donnée qui eſt ſous le ſigne donné; en prendre, dis-je, la racine dont l'expoſant eſt le quotient qu'on vient de trouver, (dans notre exemple il faut prendre la racine troiſiéme de a^3, qui eſt a,) & écrire cette racine ſous le ſigne radical qu'on demande, & ce ſera l'expreſſion équivalente qu'on cherchoit. Ainſi dans notre exemple on aura $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3}$. Car comme $\sqrt[6]{a^3}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a dans $\div \sqrt[6]{1} = 1 . \sqrt[6]{a^3} . \sqrt[6]{a^6} = a$; de même $\sqrt[3]{a}$ eſt moyenne proportionnelle entre 1 & a dans $\div \sqrt[3]{1} = 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} = a$.

DE'FINITION.

CETTE réduction d'une expreſſion incommenſurable à une autre équivalente qui ait un autre expoſant du ſigne radical, s'appelle *la réduction d'une incommenſurable à un ſigne donné*.

REMARQUE.

451. SI dans le premier cas on vouloit réduire une incommenſurable comme $\sqrt[6]{a^3}$ à un ſigne donné dont l'expoſant ne fût pas multiple de l'expoſant 6 de l'incommenſurable, comme ſi on vouloit réduire $\sqrt[6]{a^3}$ à $\sqrt{}$; on ne le pourroit pas ſans introduire un nouveau ſigne radical. De même on ne ſçauroit dans le 2e cas (ſans introduire un nouveau ſigne radical) réduire une incommenſurable donnée comme $\sqrt[6]{a^3}$ à un ſigne dont l'expoſant ne ſeroit pas ſous-multiple de l'expoſant de l'incommenſurable, par ex. au ſigne $\sqrt{}$. On ne ſçauroit pas non plus réduire une incommenſurable donnée comme $\sqrt[6]{a^3}$ à un ſigne dont l'expoſant ſeroit ſous-multiple de l'expoſant de l'incommenſurable donnée, par exemple, au ſigne $\sqrt{}$, lorſque l'expoſant 3 de la puiſſance a^3 qui eſt ſous $\sqrt[6]{}$, ne peut pas ſe diviſer exactement par le quotient 2 de l'expoſant 6 de $\sqrt[6]{}$, diviſé par 3 expoſant de $\sqrt{}$; ainſi on ne peut pas réduire $\sqrt[6]{a^3}$ au ſigne $\sqrt{}$; mais on pourroit réduire $\sqrt[6]{a^4}$ au ſigne $\sqrt{}$, parceque le quotient 2 de 6, expoſant de $\sqrt[6]{}$, diviſé par 3, expoſant de $\sqrt{}$, diviſant exactement 4 expoſant de a^4, on peut extraire la racine 2e exacte de a^4 qui eſt a^2, & l'on auroit $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt{a^2}$.

COROLLAIRE V. ET PROBLEME VI.

452. *REDUIRE deux incommenſurables qui ont differens ſignes radicaux à avoir le même ſigne radical (c'eſt à dire à avoir le même expoſant de leur ſigne radical) ſans en changer la valeur.*

1. *Cas.* Quand l'expoſant du ſigne de l'une des deux incommenſurables contient exactement l'expoſant du ſigne de l'autre, il ne faut rien changer dans la premiere, mais
* 450. ſeulement réduire la derniere au ſigne de la premiere par * le Problême précedent.

Par exemple, pour réduire $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[6]{a^4}$ à un même ſigne, il faut élever la grandeur a de $\sqrt[3]{a}$ à la puiſſance 3 dont l'expoſant 3 eſt le quotient de l'expoſant 6 de $\sqrt[6]{}$, diviſé par 2, expoſant de $\sqrt[2]{}$, & écrire au devant de cette puiſſance a^3 le ſigne $\sqrt[6]{}$, & l'on aura $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[3]{a}$; & les incommenſurables $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[6]{a^4}$ ſeront réduites à un même ſigne.

De même, pour réduire $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$, j'éleve la grandeur 2 de $\sqrt[3]{2}$ à la 2e puiſſance marquée par le quotient 2 de 6 expoſant de $\sqrt[6]{}$, diviſé par 3 expoſant de $\sqrt[3]{}$, & j'écris devant 4, qui eſt la 2e puiſſance de 2, le ſigne $\sqrt[6]{}$, & je trouve $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$. Ainſi $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$ ſont réduites au même ſigne.

On réduira de même $\sqrt[mn]{a^q}$, $\sqrt[m]{a^q}$ au même ſigne, en changeant ſeulement $\sqrt[m]{a^q}$ en ſon équivalente $\sqrt[mn]{a^{nq}}$.

Remarque ſur ce premier cas.

LORSQU'IL arrive que la grandeur qui eſt ſous le ſigne le plus élevé, eſt une puiſſance parfaite qui a pour expoſant le quotient de l'expoſant du plus grand ſigne radical diviſé par l'expoſant du moindre, il faut extraire cette racine qui ſera exacte, & écrire au devant le moindre ſigne radical; & dans ce cas l'incommenſurable du plus grand ſigne radical ſera réduite au moindre ſigne radical.

Par exemple, s'il faut réduire $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[6]{a^4}$ au même ſigne, il ne faut rien changer dans $\sqrt[3]{a}$, mais réduire $\sqrt[6]{a^4}$ au ſigne $\sqrt[3]{}$, en tirant la racine 2e de a^4 qui eſt a^2, (parceque 6 diviſé par 3 donne 2 pour quotient;) & l'on aura $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$; & $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[6]{a^4}$ ſeront réduites au même ſigne $\sqrt[3]{}$.

Si l'on avoit $\sqrt[m]{a}$ & $\sqrt[3m]{b^1}$ à réduire au même ſigne, il faudroit ſimplement réduire $\sqrt[3m]{b^1}$ à ſon équivalente * $\sqrt[m]{b}$. * 450.

Si l'on avoit encore $\sqrt[mn]{a^{nq}}$ & $\sqrt[m]{a^p}$, il faudroit réduire $\sqrt[mn]{a^{nq}}$ ſon équivalente $\sqrt[m]{a^q}$.

2. *Cas du 6e Problême.* Si les expoſans des ſignes radicaux ſont *premiers*, il faut les multiplier l'un par l'autre, & leur pro-

duit ſera l'expoſant du ſigne radical auquel il faut réduire
* 450. chaque incommenſurable par * le Problême 5e.

Par exemple, pour réduire $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{3}$ à un même ſigne, il faut prendre le produit $2 \times 3 = 6$; élever $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[3]{3}$ chacune au ſigne $\sqrt[6]{}$; ſçavoir $\sqrt[2]{2}$, en élevant 2 à la puiſſance 3e qui eſt 8 (parceque 6 expoſant de $\sqrt[6]{}$ diviſé par 2 expoſant de $\sqrt[2]{}$, donne 3 pour quotient) & $\sqrt[3]{3}$, en élevant 3 à la 2e puiſſance qui eſt 9 (parceque 6 expoſant de $\sqrt[6]{}$ diviſé par 3 expoſant de $\sqrt[3]{}$, donne 2 pour quotient.) Enfin il faut écrire $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{9}$ qui ſeront équivalentes à $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

On réduira de même $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[2]{b}$ au même ſigne $\sqrt[6]{}$, en écrivant $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[6]{b^3} = \sqrt[2]{b}$.

On réduira de même $\sqrt[m]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ au même ſigne, en réduiſant $\sqrt[m]{a}$ à ſon équivalente $\sqrt[mn]{a^n}$, & $\sqrt[n]{b}$ à ſon équivalente $\sqrt[mn]{b^m}$.

3. *Cas*. Lorſque les expoſans des deux ſignes radicaux ne
* 262. ſont pas premiers entr'eux, il faut chercher * le moindre nombre dont ils ſont des diviſeurs exacts, & ce nombre ſera l'expoſant du ſigne radical auquel il faut réduire les deux incommenſurables propoſées.

Par exemple, pour réduire au même ſigne les incommenſurables $\sqrt[4]{a}$ & $\sqrt[6]{b}$, il faut chercher le moindre nombre 12
* 450. qui a pour diviſeurs 4 & 6. Il faut enſuite réduire * $\sqrt[4]{a}$ & $\sqrt[6]{b}$ chacune au ſigne $\sqrt[12]{}$; & l'on trouvera $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{a}$, & $\sqrt[12]{b^2} = \sqrt[6]{b}$.

Ce Problême n'a pas beſoin de démonſtration étant une
* 450. ſuite évidente du précedent *.

REMARQUES.

I.

453. CETTE réduction des incommenſurables à un même ſigne eſt neceſſaire pour operer ſur les incommenſurables; car on ne peut les ajouter les unes aux autres, les ſouſtraire les unes des autres, les multiplier & les diviſer les unes par les autres qu'après les avoir réduites à un même ſigne. Elle ſert auſſi à connoître de deux incommenſurables qui ont differens ſignes, celle qui eſt plus grande que l'autre, ce qui eſt

quelquefois neceſſaire. Car étant réduites au même ſigne, & s'il y a des grandeurs hors du ſigne, ces grandeurs étant miſes ſous le ſigne, on voit aiſément * quelle eſt la plus grande. *212.

2.

454. Quand deux incommenſurables de differens ſignes ſont réduites chacune à leur plus ſimple expreſſion, & qu'elles ont quelque grandeur commenſurable hors du ſigne; il faut en les réduiſant au même ſigne ne rien changer dans les grandeurs qui ſont hors du ſigne.

Par exemple, pour réduire $3\sqrt[2]{2}$ & $4\sqrt[3]{5}$ au même ſigne $\sqrt[6]{}$, il faut écrire $3\sqrt[6]{8} = 3\sqrt[2]{2}$, & $4\sqrt[6]{25} = 4\sqrt[3]{5}$. De même pour réduire $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[5]{d}$ au même ſigne $\sqrt[6]{}$, il faut écrire $a\sqrt[6]{b^2} = a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[6]{d^3} = c\sqrt[5]{d}$. Car il eſt évident que $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[6]{a^6b^2} = a\sqrt[6]{b^2}$, & de même que $c\sqrt[5]{d} = \sqrt[5]{c^5d} = \sqrt[6]{c^6d^2} = c\sqrt[6]{d^2}$.

COROLLAIRE VI. ET PROBLÈME VII.

455. *EXTRAIRE la racine quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre donné, d'une incommenſurable. Par exemple, extraire la racine 2e de* $\sqrt[3]{a}$.

Regle ou Operation. Il faut multiplier l'expoſant du ſigne radical de l'incommenſurable propoſée par l'expoſant de la racine qu'on cherche, le produit ſera l'expoſant du ſigne radical de la racine qu'on cherche, ſous lequel il faudra écrire la grandeur propoſée ſans autre ſigne radical, & ce ſera la racine qu'on demande.

Par exemple, pour trouver la racine 2e de $\sqrt[3]{a}$, je prens le produit 6 de 2 par 3, & j'écris $\sqrt[6]{a}$ pour la racine 2e de $\sqrt[3]{a}$.

Pour extraire la racine 3e de $\sqrt[5]{10}$, il faut prendre le produit $3 \times 5 = 15$, & écrire $\sqrt[15]{10}$ pour la racine 3e de $\sqrt[5]{10}$.

De même pour trouver la racine n de $\sqrt[p]{a}$, il faut prendre le produit np & écrire $\sqrt[np]{a}$ pour la racine n de $\sqrt[p]{a}$.

REMARQUE.

456. LORSQUE l'incommenſurable dont on cherche la racine contient ſous le ſigne une puiſſance parfaite dont l'expoſant

eſt celui de la racine qu'on cherche, comme ſi on vouloit extraire la racine 3e de $\sqrt[3]{a^3}$; dans ce cas il faut ſeulement extraire la racine qu'on demande de la puiſſance qui eſt ſous le ſigne, & écrire cette racine ſous le même ſigne radical ſans changer ſon expoſant, & ce ſera la racine qu'on cherche. Ainſi la racine 3e de $\sqrt[3]{a^3}$ eſt $\sqrt[3]{a}$, puiſque $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}$ *446. $= *\sqrt[3]{a^3}$. De même la racine n de $\sqrt[n]{a^n}$ eſt $\sqrt[n]{a}$.

Démonſtration du problême. La racine d'une puiſſance tant commenſurable qu'incommenſurable, eſt le premier d'autant de moyens proportionnels entre l'unité & cette puiſſance, qu'il y a d'unitez moins une dans l'expoſant de la racine. Ainſi dans la progreſſion $\div\div 1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 .$ &c. qui peut repréſenter les puiſſances d'une grandeur a commenſurable ou incommenſurable priſes de ſuite depuis l'unité, puiſque ces puiſſances ſe forment de la même maniere en multipliant continuellement la grandeur a par elle-même; dans cette progreſſion, dis-je, la racine 2e a de a^2 eſt le moyen proportionnel entre 1 & a^2. La racine 3e a de a^3 eſt le premier des deux moyens proportionnels entre 1 & a^3; & ainſi de ſuite.

Or le Problême fait découvrir pour la racine qu'on cherche, le premier d'autant de moyens proportionnels entre 1 & la puiſſance incommenſurable propoſée qu'il y a d'unitez moins une dans l'expoſant de la racine qu'on cherche, qui eſt le même que celui de la puiſſance propoſée. (Quand on cherche la racine 2e, 3e, 4e, 5e &c. d'une grandeur commenſurable ou incommenſurable, on conſidere cette grandeur comme une puiſſance 2e, 3e, 4e, 5e, &c. de la racine qu'on cherche.) Car en cherchant, par exemple, la racine 3e de $\sqrt[3]{a}$, on trouve par le Problême $\sqrt[3]{a}$; & il eſt évident *450. que dans $\div\div \sqrt[3]{1} = 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[3]{a^3}$. Le terme $\sqrt[3]{a^3} = *\sqrt[3]{a}$, & que $\sqrt[3]{a}$ eſt le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[3]{a^3}$ qui eſt la puiſſance 3e de $\sqrt[3]{a}$. De même, dans le *456. cas * de la remarque, la racine 3e de $\sqrt[3]{a^3}$ qu'on trouve être $\sqrt[3]{a}$, eſt le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[3]{a^3}$, comme on le voit clairement dans la progreſſion $\div\div \sqrt[3]{1} = 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a^2} . \sqrt[3]{a^3}$. Il eſt évident que cela convient à tous les autres exemples.

Le

Le Problême fait donc découvrir la racine que l'on cherche. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE VII.

457. IL ſuit du Problême précedent que quand une incommenſurable eſt précedée de pluſieurs ſignes radicaux comme $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}}$, on peut les rêduire à un ſeul ſigne radical, en prenant le produit des expoſans de tous les ſignes radicaux, & écrivant ce produit ſur ce ſigne radical. Ainſi $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}} = \sqrt[2\times3\times4]{a^3} = \sqrt[24]{a^3}$. De même $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{p-1}}}} = \sqrt[mnp]{a^{p-1}}$. Si l'on avoit $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^n}}}$, on pourroit la réduire à * $\sqrt[mp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a^n}}$. Si l'on avoit cette expreſſion $\sqrt{a\sqrt{a^2\sqrt[4]{a^6}}}$, on la réduiroit d'abord à $\sqrt[3]{\sqrt{a^3\sqrt[4]{a^6}}}$, (* en faiſant paſſer * dans $\sqrt[3]{a\sqrt{a^2}}$, a qui eſt hors du ſigne $\sqrt{}$ ſous ce ſigne $\sqrt{}$,) & en faiſant enſuite paſſer a^3 ſous le ſigne $\sqrt{}$, on auroit $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^{16}}}}$, qu'on réduiroit enfin au ſeul ſigne $\sqrt[24]{a^{16}}$ qu'on pourroit encore réduire * à la plus ſimple expreſſion $a^2\sqrt[3]{a^2}$. * 456. * 430. * 429.

En general on réduira $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b^n\sqrt[p]{c^r}}}$ au ſeul ſigne $\sqrt[mnp]{a^{np}b^{pq}c^r}$.

REMARQUE.

458. LE calcul des grandeurs étant le moyen le plus ſimple & le plus facile de découvrir tout ce qu'on peut déſirer de ſçavoir dans les Mathematiques; on doit prendre garde, afin que ce moyen ſoit auſſi très ſur, de ne pas employer des expreſſions de grandeurs qui ſoient équivoques. C'eſt pourquoi il eſt bon de faire ici remarquer aux Commençans que quand il y a pluſieurs ſignes radicaux joints enſemble, comme le ſont des multiplicateurs dans un produit; cette expreſſion peut marquer deux choſes, 1°, quand ils ſont joints de cette maniere $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt{c}$, cela marque une multiplication, c'eſt à dire, cela marque que les trois incommenſurables $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt{c}$, ſont multipliées les unes par les autres. Dans ce cas, pour rêduire ce produit qui contient trois ſignes radicaux à un ſeul ſigne radical, il faut ſe ſervir de la methode de l'*art.* 452. On réduira par cette methode $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$ à $\sqrt[mn]{a^nb^m}$, & le

produit $\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b}\sqrt[r]{c}$ ſera déja réduit à $\sqrt[mp]{a^{n}b^{mp}}\sqrt[r]{c}$, qu'on réduira enfin à $\sqrt[mnp]{a^{np}b^{mpq}c^{mn}}$.

2°. Quand les ſignes radicaux ſont joints de façon qu'il y a des lignes droites tirées du haut des ſignes radicaux les plus à gauche, leſquelles lignes couvrent toutes les grandeurs qui ſont le plus à droite; cela marque non une multiplication comme dans l'expreſſion précedente, mais une extraction de racines, comme on le voit dans cette expreſſion $\sqrt[r]{a\sqrt[q]{b\sqrt[p]{c}}}$; c'eſt à dire, cette expreſſion marque l'extraction de la racine, dont l'expoſant eſt m, de la grandeur $a\sqrt[q]{b\sqrt[p]{c^{r}}}$; & cette derniere expreſſion exprime le produit de la grandeur a par la racine n de la grandeur $b^{q}\sqrt[p]{c^{r}}$.

Pour réduire cette expreſſion qui contient trois ſignes radicaux à un ſeul ſigne radical, on pourra commencer par la grandeur la plus à droite $b^{q}\sqrt[p]{c^{r}}$, & on fera paſſer b^{q} ſous le
*430. ſigne $\sqrt[p]{}$, * ce qui donnera $\sqrt[p]{b^{pq}c^{r}}$, & l'on aura déja $a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c^{r}}}$
*430. *455. $= * a\sqrt[n]{\sqrt[p]{b^{pq}c^{r}}} = * a\sqrt[np]{b^{pq}c^{r}}$. On fera enſuite paſſer * a
*430. ſous le ſigne $\sqrt[np]{}$, & l'on aura $a\sqrt[np]{b^{pq}c^{r}} = \sqrt[np]{a^{np}b^{pq}c^{r}}$, &
*455. $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c^{r}}}} = \sqrt[m]{\sqrt[np]{a^{np}b^{pq}c^{r}}} = * \sqrt[mnp]{a^{np}b^{pq}c^{r}}$.

Enfin, quand pluſieurs ſignes radicaux ſont joints, & qu'il n'y a de grandeur que ſous le ſigne radical le plus vers la droite, comme dans cette expreſſion $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}$, cela ne marque qu'une extraction de racines, & cette expreſſion ſignifie la racine 2e de la racine 3e de la racine 4e de la grandeur a, & on la réduira à $\sqrt[2\times3\times4]{a} = \sqrt[24]{a}$ par le Problême de l'*art* 455. Dans ce cas, il n'y auroit aucune équivoque quand on ne tireroit pas des lignes des ſignes radicaux les plus à gauche ſur ceux qui ſont plus à droite.

PROBLÊME VIII.

459. *AYANT une expreſſion qui contient une incommenſurable, la changer en differentes expreſſions toutes équivalentes, c'eſt à dire, qui auront la même valeur.*

Les differentes expreſſions équivalentes d'une même grandeur qui contient une incommenſurable, ſont de grand uſage dans l'Analyſe & dans la reſolution des Problêmes des Mathematiques. Voici les principales methodes de trouver ces differentes expreſſions équivalentes.

La 1re maniere eſt celle de * réduire une incommenſurable à ſa plus ſimple expreſſion. On prépare par là les incommenſurables à être plus facilement ajoutées les unes aux autres, & à être retranchées les unes des autres. Car étant ainſi réduites, on ajoute enſemble ou on retranche les unes des autres celles qui ſont commenſurables entr'elles, comme ſi c'étoient des grandeurs commenſurables; car $a\sqrt[3]{b}$ & $2a\sqrt[3]{b}$ ajoutées enſemble ſont $3a\sqrt[3]{b}$; & $a\sqrt[3]{b}$ étant retranchée de $2a\sqrt[3]{b}$, la difference eſt $a\sqrt[3]{b}$. Quand elles ſont incommenſurables on les ajoute en les joignant ſimplement avec leurs ſignes + ou —, & on les retranche les unes de autres, en joignant celles qui doivent être retranchées par des ſignes oppoſez à celles dont elles doivent être retranchées. * 429.

La 2e maniere eſt celle de réduire * ſous le ſigne les grandeurs qui ſont hors du ſigne: ce changement eſt d'uſage en pluſieurs rencontres. * 430.

La 3e maniere eſt celle de donner à une incommenſurable un ſigne radical * dont l'expoſant ſoit multiple ou ſous-multiple de celui qu'elle a. Cette maniere ſert à préparer les incommenſurables au calcul, en réduiſant au même ſigne celles qui doivent entrer dans un même calcul. * 450.

On a déja expliqué les manieres précedentes, en voici d'autres utiles.

460. *La 4e maniere* conſiſte à multiplier ou à diviſer le numerateur & le dénominateur de l'expreſſion qui contient une incommenſurable par l'incommenſurable même, ou par une autre grandeur; ce qui eſt cauſe * que la grandeur conſerve toujours la même valeur ſous differentes expreſſions. * 75 & 109.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{2a}{b\sqrt[3]{\frac{a}{c}}}$ à d'autres expreſſions équivalentes, on la changera dabord en * $\frac{2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}}{b\sqrt[3]{\frac{a}{c}}}$. Enſuite on diviſera * 432. le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{a}$, & l'on aura

$\frac{2\sqrt[2]{a}}{b\sqrt[2]{\frac{1}{c}}}$; & en faiſant la diviſion marquée par $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{\frac{1}{c}}}$, on trouvera le quotient $\frac{\sqrt[2]{ac}}{\sqrt[2]{1}}$, ce qui donnera $\frac{2\sqrt[2]{ac}}{b\sqrt[2]{1}} = \frac{2\sqrt[2]{ac}}{b}$, parceque $\sqrt[2]{1} = 1$, & $1b = b$.

Pour réduire $ax\sqrt[2]{\frac{x+a}{x-a}}$ à une expreſſion équivalente dans laquelle le ſeul dénominateur contienne une incommenſurable, il faut multiplier le numerateur & le denominateur par $\sqrt{x+a}$, & l'on aura $\frac{ax \times \sqrt{x+a}}{\sqrt[2]{x^2-a^2}} = ax\sqrt[2]{\frac{x+a}{x-a}}$.

Si l'on veut que l'incommenſurable ſoit au numerateur, il faut multiplier par $\sqrt[2]{x-a}$, & l'on aura $\frac{a}{x-a}\sqrt[2]{x^2-a^2}$.

Si l'on avoit $\frac{2ax-x^2}{\sqrt[2]{2ax-x^2}}$, on pourroit la rendre plus ſimple en diviſant le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[2]{2ax-x^2}$, & l'on auroit $\sqrt[2]{2ax-x^2} = \frac{2ax-x^2}{\sqrt[2]{2ax-x^2}}$; car

* 432. * 109. $\frac{2ax-x^2}{\sqrt[2]{2ax-x^2}} = * \frac{\sqrt[2]{2ax-x^2} \times \sqrt[2]{2ax-x^2}}{\sqrt[2]{2ax-x^2}} = * \sqrt[2]{2ax-x^2}$

s'il y avoit $\frac{\sqrt[2]{2ax-x^2}}{2ax-x^2}$; on trouveroit $\sqrt[2]{2ax-x^2} = \frac{\sqrt[2]{2ax-x^2}}{2ax-x^2} \cdot \sqrt[2]{x+a}$

Si l'on a $\frac{\sqrt{a}}{\frac{\sqrt[2]{x-a}}{\sqrt[2]{a}}}$ à réduire à une expreſſion qui ſoit plus ſimple ; il n'y a qu'à effacer le diviſeur $\sqrt[2]{a}$ du numerateur & du dénominateur qui ſont chacun une fraction, & l'on aura l'expreſſion équivalente * $\frac{\sqrt[2]{x+a}}{\sqrt[2]{x-a}}$.

* 109.

REMARQUE.

ON voit clairement par les exemples précedens comment on peut faire paſſer une incommenſurable du numerateur au dénominateur, ou du dénominateur au numerateur, ſans changer la valeur de l'expreſſion. Les Commençans doivent

faire attention que toute grandeur entiere peut être regardée comme une fraction dont le dénominateur eſt l'unité, & que quand la grandeur eſt entiere comme $x\sqrt[2]{x^2 - a^2}$, pour faire paſſer l'incommenſurable au dénominateur, il faut concevoir $x\sqrt[2]{x^2 - a^2} = \frac{x\sqrt[2]{x^2 - a^2}}{1}$, & multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[2]{x^2 - a^2}$, & l'on aura $\frac{x^3 - a^2 x}{\sqrt[2]{x^2 - a^2}} = x\sqrt[2]{x^2 - a^2}$.

Cette maniere de réduire une grandeur qui contient une incommenſurable à des expreſſions équivalentes, en multipliant ou diviſant le numerateur & le dénominateur par une même grandeur ou par des grandeurs égales, ſert auſſi à faire en ſorte qu'il ſe trouve ſous le ſigne quelque grandeur commenſurable qu'on puiſſe tirer hors du ſigne, ce qui peut faire changer l'expreſſion en beaucoup de formes qui peuvent être utiles dans l'analyſe, ce que l'on va faire voir par des exemples ſimples & generaux.

On ne ſçauroit tirer aucune grandeur commenſurable hors du ſigne dans $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$: ſuppoſé qu'on ait beſoin de rendre le numerateur commenſurable, il n'y a qu'à multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[n]{a^{n-1}}$, & l'on aura $\sqrt[n]{\frac{a^{n-1+1}}{a^{n-1}b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{n-1}b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}$.

Si c'eſt le dénominateur qu'on veuille rendre commenſurable, il faut multiplier par $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, & l'on aura $\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}$.

On peut même tirer hors du ſigne d'une incommenſurable telle grandeur qu'on voudra, & qui ſoit au numerateur ou au dénominateur, quoique l'incommenſurable n'ait pour dénominateur ou pour numerateur que l'unité. Par exemple, ſi l'on veut tirer hors du ſigne de l'incommenſurable $\sqrt[n]{a}$ la grandeur donnée b, & qu'elle ſoit au numerateur ou au dénominateur, il faut multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[n]{b^n}$, & l'on aura $\frac{\sqrt[n]{a}}{1} = \frac{\sqrt[n]{ab^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = b\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^n}$.

On voudroit que $\sqrt[3]{2}$ eût hors du ſigne $\frac{1}{2}$ ou 2, il faut multiplier le numerateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{4}$, & l'on aura $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$.

REMARQUE.

LES exemples qu'on a donnez de la 4e maniere ſuffiſent pour faire voir comment on peut changer l'expreſſion d'une incommenſurable en une infinité d'autres équivalentes en multipliant ſon numerateur & ſon dénominateur par une même grandeur.

Voici une 5e maniere de trouver des expreſſions équivalentes d'une même incommenſurable qui a une grandeur ſous le ſigne & une grandeur hors du ſigne; (quand il n'y a pas de grandeur hors du ſigne, l'unité peut toujours être regardée comme la grandeur hors du ſigne, $\sqrt[n]{a} = 1\sqrt[n]{a}$.) Cette 5e maniere n'eſt que la quatriéme exprimée d'une autre façon; & elle eſt d'uſage dans le calcul des puiſſances par les expoſans, (qu'on rendra general dans la ſuite,) pour donner differentes formes à une grandeur dont une partie eſt hors du ſigne, & l'autre ſous le ſigne, ſans en changer la valeur.

361. Cette 5e *maniere* conſiſte à multiplier la grandeur qui eſt hors du ſigne, & à diviſer en même temps la grandeur qui eſt ſous le ſigne par une même grandeur; ou bien à diviſer la grandeur qui eſt hors du ſigne, & à multiplier en même temps celle qui eſt ſous le ſigne, par une même grandeur. Il eſt évident que cela n'en doit point changer la valeur, & que par cette operation on multiplie le numerateur & le dénominateur par une même grandeur; car $a \times \frac{b}{1} = ac \times \frac{b}{c}$; comme auſſi $\frac{a}{1} \times b = \frac{a}{c} \times bc$.

EXEMPLES.

EN multipliant dans $x^4\sqrt[3]{ax^8}$, x^4 par x^5, & en diviſant en même temps $\sqrt[3]{ax^8}$ par x^3 réduite à $\sqrt[3]{x^6} = x^3$, on chan-

▸ 109. gera $x^4\sqrt[3]{ax^8}$ en $x^{4+3}\frac{\sqrt[3]{ax^8}}{\sqrt[3]{x^6}} = * x^7\sqrt[3]{ax^2}$ qui eſt équivalente à $x^4\sqrt[3]{ax^8}$.

En multipliant dans $x^4 \times \frac{1}{\sqrt[3]{ax^3}}$, x^4 par x^3, en diviſant

$\frac{1}{\sqrt[2]{ax^3}}$ par $\sqrt[2]{x^4} = x^2$ on la changera en $x^{4+2} \times \frac{\sqrt[2]{ax^3}^{1}}{\sqrt[2]{x^4}} = x^6 \times$

$\frac{1}{\sqrt[2]{ax^3} \times \sqrt{x_4}} = x^6 \times \sqrt[2]{ax^7}^{1}$ qui eſt équivalente à $x^4 \times \sqrt[2]{ax^3}^{1}$.

En diviſant dans $\overline{3ax^3 + 4x^4} \times \sqrt[2]{ax + x^2}$, ce qui eſt hors du ſigne par x; & multipliant en même temps par $\sqrt[2]{x^2} = x$, ce qui eſt ſous le ſigne, on la changera en $\overline{3ax^2 + 4x^3} \times \sqrt[2]{ax + x^2} \times \sqrt[2]{x^2} = \overline{3ax^2 + 4x^3} \times \sqrt[2]{ax^3 + x^4}$.

D'où l'on voit qu'en general on peut faire les changemens ſuivans dans toutes les incommenſurables qui peuvent être repréſentées par $gx^m \sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}$ &c. ſans en changer la valeur. 1°. On peut multiplier gx^m par x élevée à telle puiſſance qu'on voudra, comme par x^q, & diviſer en même temps la partie qui eſt ſous le ſigne par $\sqrt[p]{x^{pq}} = x^q$, & l'on aura $gx^{m+q} \frac{\sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}}{\sqrt[p]{x^{pq}}}$ &c. qui deviendra, en

* 149. & 440. faiſant la diviſion par le moyen des expoſans, $* gx^{m+q} \overline{\sqrt[p]{ax^{1-pq} + bx^{n-pq} + cx^{2n-pq}} + \&c}$ qu'on pourra auſſi écrire de cette maniere $* gx^{m+q} \times$ * 153.

$\overline{ax^{1-pq} + bx^{n-pq} + cx^{2n-pq} + \&c}^{\frac{1}{p}}$ &c.

Si l'on veut repréſenter l'expoſant rompu $\frac{1}{p}$ par une lettre r, en ſuppoſant $r = \frac{1}{p}$, on trouvera en multipliant chacune de ces grandeurs égales par p, $pr = 1$; & en diviſant chaque membre de cette derniere égalité par r, on aura $p = \frac{1}{r}$. En ſubſtituant dans l'expreſſion précedente r à la place de $\frac{1}{p}$, & $\frac{1}{r}$ à la place de p, elle deviendra, ſans changer de valeur,

$gx^{m+q} \times \overline{ax^{1-\frac{q}{r}} + bx^{n-\frac{q}{r}} + cx^{2n-\frac{q}{r}} + \&c.}^{r}$

On peut auſſi diviſer gx^m par x^q, & multiplier ce qui eſt ſous le ſigne par $\sqrt[p]{x^{pq}} = x^q$, & l'on aura $gx^{m-q} \sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}} \times \sqrt[p]{a^{pq}}$ qui diviendra, en faiſant la multiplication par le moyen des expoſans, $* gx^{m-q} \overline{\sqrt[p]{ax^{1+pq} + bx^{n+pq} + cx^{2n+pq}} + \&c.}$ * 148 & qu'on pourra auſſi écrire de cette maniere $gx^{m-q} \times$ 427.

$\overline{ax^{1+pq} + bx^{n+pq} + cx^{2n+pq} + \&c.}^{\frac{1}{p}}$ En ſuppoſant comme ci-

dessus $r = \frac{1}{p}$; d'où l'on déduira $p = \frac{1}{r}$; & en substituant dans l'expression précedente r à la place de $\frac{1}{p}$; & $\frac{1}{r}$ à la place de p ; elle deviendra , sans changer de valeur , $gx^{m-q} \times \overline{ax^{1+\frac{q}{r}} + bx^{n+\frac{q}{r}} + cx^{2+\frac{q}{r}} + \&c.}^{r}$

2°. On peut faire en sorte que , dans la grandeur complexe qui est sous le signe, le premier terme ax demeure sans x, c'est à dire, devienne simplement a; ou que le dernier terme cx^{2n} devienne sans x^{2n} ou soit simplement c.

Pour faire que a demeure seule sans x, il faut diviser ce qui est sous le signe par $\sqrt[p]{x}$, & multiplier en même temps ce qui est hors du signe par $\sqrt[p]{x}$, & l'on aura $gx^m \times \sqrt[p]{x} \times \frac{\sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}}{\sqrt[p]{x}} = {}^{*149\&\ 440.} gx^m \sqrt[p]{x} \times \sqrt[p]{a + bx^{n-1} + cx^{2n-1}}$ qui devien-dra (en se servant de l'expression des exposans au lieu des signes) $gx^{m+\frac{1}{p}} \times \overline{a + bx^{n-1} + cx^{2n-1}}^{\frac{1}{p}} = $ (en supposant $r = \frac{1}{p}$) $gx^{m+r} \times \overline{a + bx^{n-1} \times cx^{2n-1} + \&c.}^{r}$ où l'on voit que le terme a sous le signe, n'a plus x, & cependant l'expression est équivalente à $gx^m \sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}$.

Pour faire en sorte que ce soit le terme cx^{2n} sous le signe, qui devienne c sans x^{2n} ; il faut diviser la grandeur qui est sous le signe par $\sqrt[p]{x^{2n}}$, & multiplier en même temps par $\sqrt[p]{x^{2n}}$ celle qui est hors du signe, & l'on trouvera $gx^m \times \sqrt[p]{x^{2n}} \times \frac{\sqrt[p]{ax + bx^n + cx^{2n}}}{\sqrt[p]{x^{2n}}} = {}^{*149\&\ 440.} gx^m \sqrt[p]{x^{2n}} \times \sqrt[p]{ax^{1-2n} + bx^{n-2n} + cx^{2n-2n}}$

$^{*153.}= ($ * en se servant de l'expression des exposans sans les signes radicaux) $gx^{m+\frac{2n}{p}} \times \overline{c + bx^{-n} + ax^{-2n+1}}^{\frac{1}{p}} = ($en supposant $r = \frac{1}{p}) gx^{m+2nr} \times \overline{c + bx^{-n} + ax^{-2n+1}}^{r}$; le terme cx^{2n} est devenu c sans x^{2n}, & cette expression est équivalente à la proposée.

DE'FINITION.

DE'FINITION.

462. UNE ſuite de pluſieurs grandeurs incommenſurables dont les ſignes radicaux ont le même expoſant jointes par les ſignes + & —, comme $a + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{d}$, &c. ſera nommé *une ſuite d'incommenſurables:* on la diſtingue par termes; chaque incommenſurable fait un terme; quand il y a une ou pluſieurs grandeurs commenſurables, comme dans $a + f - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, toutes les commenſurables $a + f$ ne font qu'un ſeul terme; & s'il y avoit des grandeurs incommenſurables qui fuſſent commenſurables entr'elles, elles ne feroient auſſi qu'un ſeul terme; ainſi la ſuite $a + f - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a^2 b}$ ne contient que deux termes, $a + f$ n'en faiſant qu'un, & $-\sqrt[3]{b} + a\sqrt[3]{b}$ n'en faiſant auſſi qu'un ſeul qui eſt $\overline{a - 1} \times \sqrt[3]{b}$.

Quand une de ces ſuites a deux termes, on l'appelle *un binome;* ſi elle en a trois, *un trinome*, &c.

On donne ici à ces ſommes d'incommenſurables le nom de *ſuites* pour les diſtinguer des *incommenſurables complexes*, comme $\sqrt[p]{a + bx^n + cx^{2n}}$ &c. parceque le calcul de ces dernieres eſt le même que le calcul des incommenſurables incomplexes $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, &c. qu'on a expliqué juſqu'ici.

On fera pourtant diſtinguer de deux ſortes dincommenſurables complexes. Les unes, comme $\sqrt[3]{a + bx + dx^2}$, ne contiennent ſous le ſigne que des grandeurs commenſurables, les autres ont ſous le même ſigne parmi leurs termes des incommenſurables, comme $\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a} + b}$. Le calcul de ces dernieres a du rapport avec le calcul *des ſuites d'incommenſurables* qu'on va expliquer; c'eſt pourquoi on a differé juſqu'ici d'en donner des exemples.

SECTION VII.

Où l'on explique le calcul des ſuites d'incommenſurables.

L'Addition & la Souſtraction.

PROBLÊME I.

463. *AJOUTER une ſuite d'incommenſurables à une autre, ou la retrancher d'une autre. On ſuppoſe que tous les ſignes radicaux dans l'une & l'autre ont le même expoſant.*

Regle ou Operation. On les écrira d'abord l'une ſous l'autre, obſervant quand il y a des termes incommenſurables dans l'une & l'autre, qui ſont commenſurables entr'eux, * 429. de les écrire les uns ſous les autres, * les ayant réduits auparavant à la plus ſimple expreſſion. On ajoutera enſuite les termes commenſurables entr'eux comme ſi c'étoient des grandeurs commenſurables, & on joindra tous les autres les uns aux autres avec leur ſigne, & l'on aura leur ſomme.

La ſouſtraction ſe fera en ôtant les termes de la ſuite à retrancher, des termes de l'autre ſuite qui leur ſont commenſurables quand il y en a, comme dans la ſouſtraction des grandeurs commenſurables, & on ôtera les autres termes en les joignant par des ſignes + & — oppoſez aux leur, aux termes de la ſuite dont on doit faire la ſouſtraction.

EXEMPLES.

ADDITION.

$$\begin{array}{r} a + 2\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{ac} \\ b - \sqrt[3]{ab} + 5\sqrt[3]{ac} \\ \hline \text{Somme } a+b+\sqrt[3]{ab}+8\sqrt[3]{ac}. \end{array}$$

SOUSTRACTION.

$$\begin{array}{r} a + 2\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{ac} \\ b - \sqrt[3]{ab} + 5\sqrt[3]{ac} \\ \hline \text{Difference } a-b+3\sqrt[3]{ab}-2\sqrt[3]{ac} \end{array}$$

ADDITION.

$$\begin{array}{r} \overline{3a+5b} \times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 3\sqrt[3]{\overline{a-y}} \\ + 2b \times \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} - 2\sqrt[3]{\overline{a+y}} \\ \hline \text{Somme } \overline{3a+7b} \times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} + 3\sqrt[3]{\overline{a-y}} - 2\sqrt[3]{\overline{a+y}} \end{array}$$

SOUSTRACTION.

$$\begin{array}{l} 3a+5b\times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}+3\sqrt[3]{a-y} \\ \quad +2b\times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}-2\sqrt[3]{a+y} \\ \hline \text{Difference } 3a+3b\times x\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}+3\sqrt[3]{a-y}+2\sqrt[3]{a+y}. \end{array}$$

Pour les incommenſurables complexes qui ont ſous leurs ſignes d'autres incommenſurables.

464. POUR faire voir clairement que ces ſortes d'incommenſurables complexes peuvent quelquefois ſe réduire à une plus ſimple expreſſion, on fera remarquer que quand on veut multiplier $\sqrt[n]{a+bx}$ par x, (on trouve d'abord $x\sqrt[n]{a+bx}$.) & l'on fait paſſer le multiplicateur x réduit à $\sqrt[n]{x^n}$ ſous le ſigne de $\sqrt[n]{a+bx}$, * en multipliant $a+bx$ par x^n, & l'on trouve $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n+1}}$. On multiplie de même $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{bx}$ par x; (ce qui donne d'abord $x\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{bx}$;) & l'on fait paſſer x réduit à $\sqrt[n]{x^n}$ ſous le ſigne, en multipliant $a+\sqrt[n]{bx}$ par x^n, & on trouve $\sqrt[n]{ax^n+x^n\sqrt[n]{bx}}$. * 428.

Cet exemple $\sqrt[n]{ax^n+x^n\sqrt[n]{bx}}$ (qui repréſente en general toutes les incommenſurables complexes ſemblables) fait voir évidemment que quand une grandeur x^n, qui multiplie tous les termes de la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne radical, eſt elle-même une puiſſance parfaite dont l'expoſant n eſt celui du ſigne ſous lequel eſt la grandeur complexe, on peut alors faire paſſer hors du ſigne la racine x de cette puiſſance parfaite x^n, & l'on a $\sqrt[n]{ax^n+x^n\sqrt[n]{bx}}$ réduite à ſa plus ſimple expreſſion $x\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{bx}}$

Cela montre que pour réduire $\sqrt[3]{a^3b+a^3c\sqrt{d}}$ à ſa plus ſimple expreſſion, il faut écrire $a\sqrt[3]{b+c\sqrt{d}}$.

Pour réduire $\sqrt[3]{b^3c+\sqrt{b^4c^2d}}$ à ſa plus ſimple expreſſion, il faut d'abord réduire $\sqrt[3]{b^4c^2d}$ à ſa plus ſimple expreſſion $b^2c\sqrt[3]{d}$, & l'on a $\sqrt[3]{b^3c+b^2c\sqrt[3]{d}}$, qu'on réduit enſuite à ſa plus ſimple expreſſion $b\sqrt[3]{c+c\sqrt{d}}$.

De même pour réduire $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{32}$ à ſa plus ſimple expreſſion, il faut commencer par réduire $\sqrt[3]{32}$ à $4\sqrt[3]{2}$, & l'on a $\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{2}$ qu'on réduit enfin à $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$.

Il ſuit de là que ſi deux incommenſurables complexes de cette ſorte, etant réduites à leur plus ſimple expreſſion, contiennent ſous le ſigne les mêmes grandeurs; elles ſe-
*75 & 109. ront commenſurables entr'elles. Car il eſt viſible * que $3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$ eſt à $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$ comme 3 à 2; puiſque 3 & 2 ſont multipliez par la grandeur $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$.

REMARQUES.

1.

465. IL eſt évident que ce qu'on vient d'expliquer par rapport aux incommenſurables complexes $x\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{bx}$ convient auſſi aux incommenſurables complexes $x\sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{bx}$ qui ont des termes incommenſurables dont le ſigne radical a un expoſant p different de l'expoſant n du ſigne radical principal $\sqrt{}$ ſous lequel ſont tous les termes.

2.

466. On réduit ces incommenſurables complexes, quand elles
*452. ont des ſignes differens, à un même ſigne, * comme les autres incommenſurables; par exemple, pour réduire $\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{cd}$ & $\sqrt[3]{a^2 - a\sqrt{bc}}$ à un même ſigne $\sqrt{}$, on élevera $b + \sqrt[3]{cd}$ à la troiſiéme puiſſance, & $a^2 - a\sqrt{bc}$ à la 2e; & l'on aura $\sqrt{b^3 + 3bcd + 3b^2 + cd} \times \sqrt[3]{cd}$, & $\sqrt{a^4 - 2a^3\sqrt{bc} + a^2\sqrt[3]{b^2c^2}}$ qui ſont équivalentes aux propoſées; & ſi l'on veut que les ſignes radicaux des termes qui ſont ſous le ſigne principal $\sqrt{}$,
*452. ayent auſſi le ſigne $\sqrt{}$, on changera $\sqrt[3]{cd}$ * en ſon équivalante $\sqrt[6]{c^3d^3}$, $\sqrt[3]{bc}$ en ſon équivalante $\sqrt[6]{b^2c^2}$, & enfin $\sqrt[3]{b^2c^2}$ en ſon équivalante $\sqrt[6]{b^4c^4}$, & on écrira ces nouveaux termes dans les grandeurs complexes propoſées à la place des termes auſquels ils ſont équivalans.

467. Pour ajouter ou ſouſtraire ces ſortes d'incommenſurables complexes, il faut réduire à leur plus ſimple expreſſion celles qui peuvent y être réduites, & les réduire auſſi à avoir

un même ſigne : on fera enſuite l'addition ou la ſouſtraction comme dans le Problême précedent.

EXEMPLE.

ADDITION.	SOUSTRATION.
$ab + 3a\sqrt[3]{b + c\sqrt[3]{d}}$	$ab + 3a\sqrt[3]{b + c\sqrt[3]{d}}$
$2ab - a\sqrt[3]{b + c\sqrt[3]{d}}$	$2ab - a\sqrt[3]{b + c\sqrt[3]{d}}$
Somme $3ab + 2a\sqrt[3]{b + c\sqrt[3]{d}}$.	Difference $-ab + 4a\sqrt[3]{b + c\sqrt[3]{d}}$

La Multiplication.

PROBLÊME II.

468. *MULTIPLIER une ſuite d'incommenſurables par une autre. On ſuppoſe que les ſignes radicaux de l'une & de l'autre ſuite ont tous le même expoſant.*

Regle ou Operation. Il faut multiplier ſucceſſivement tous les termes d'une ſuite par chacun des termes de l'autre, obſervant * la regle des ſignes + & −, de la multiplication ; ajouter tous les produits dans une ſomme : ce ſera le produit qu'on cherche. S'il ſe trouvoit dans l'une des ſuites ou dans les deux, pluſieurs termes commenſurables entr'eux, il faudroit réduire tous ces termes d'une même ſuite en un ſeul, les réduiſant d'abord à leur plus ſimple expreſſion, & les ajoutant enſuite en un ſeul terme. Il faut de même réduire en un ſeul terme tous les termes, du produit qu'on trouvera, qui ſeront commenſurables entr'eux. * 95.

EXEMPLES.

$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}}$
$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}}$
$a + \sqrt[3]{ab}$
$+ \sqrt[3]{ab + b}$

Produit $a + b + 2\sqrt[3]{ab}$

$a + b + 2\sqrt[3]{ab}$
$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}}$
$a\sqrt[3]{a + b\sqrt[3]{a} + 2a\sqrt[3]{b}}$
$+ a\sqrt[3]{b + b\sqrt[3]{b} + 2b\sqrt[3]{a}}$

Produit. $a + 3b \times \sqrt[3]{a} + 3a + b \times \sqrt[3]{b}$ 3e puiſſ. de $\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}}$

$a^2 + 3a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} - 4b\sqrt[3]{c}$

$1 - 2a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} + 5b\sqrt[3]{b}$

$a^2 + 3a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} - 4b\sqrt[3]{c}$

$- 2a^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} - 6a^2\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} + 8ab\sqrt[3]{\frac{a^2c}{b}} =$

$+ 5a^2b\sqrt[3]{b} + 15ab\sqrt[3]{a^2} - 20b^2\sqrt[3]{bc}$

d. $a^2 + 3a - 2a^2 \times \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} - 4b\sqrt[3]{c} - 6a^2\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} + 8ab\sqrt[3]{\frac{a^2c}{b}} + 5a^2b\sqrt[3]{b} + 15ab\sqrt[3]{a^2} - 20b^2\sqrt[3]{bc}$

Exemple où il y a des grandeurs imaginaires.

multiplié $x^2 + x\sqrt[2]{} - k^2 - j^2$

$- x\sqrt[2]{} - l^2 + j\sqrt[2]{} - k^2$

$+ j\sqrt[2]{} - l^2$

$- \sqrt[2]{} - k^2 \times \sqrt[2]{} - l^2$

multiplicateur $x + j + \sqrt[2]{} - l^2$

$x^3 + x^2\sqrt[2]{} - k^2 - j^2x$

$- x^2\sqrt[2]{} - l^2 + jx\sqrt[2]{} - k^2$

$+ jx\sqrt[2]{} - l^2$

$- x\sqrt[2]{} - k^2 \times \sqrt[2]{} - l^2$

$+ jx^2 \quad + jx\sqrt[2]{} - k^2 \quad - j^3$

$- jx\sqrt[2]{} - l^2 \quad + j^2\sqrt[2]{} - k^2$

$+ j^2\sqrt[2]{} - l^2$

$- j\sqrt[2]{} - k^2 \times \sqrt[2]{} - l^2$

$+ x^2\sqrt[2]{} - l^2 + x\sqrt[2]{} - k^2 \times \sqrt[2]{} - l^2 \quad - j^2\sqrt[2]{} - l^2$

$+ l^2x \quad + j\sqrt[2]{} - k^2 \times \sqrt[2]{} - l^2$

$- j\,l^2$

$+ l^2\sqrt[2]{} - k^2$

produit $x^3 + x^2\sqrt[2]{} - k^2 - j^2x \quad - j^3$

$+ jx^2 \quad + 2jx\sqrt[2]{} - k^2 \quad + j^2\sqrt[2]{} - k^2$

$+ l^2x \quad - j\,l^2$

$+ l^2\sqrt[2]{} - k^2$

Si on multiplie ce produit par $x - j - \sqrt[3]{-k^3}$, on trouvera le produit

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2j^3 \\ \quad + k^3 \\ \quad + l^3 \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{l} x^3 - 2jl \\ \quad + 2jk^3 \end{array}\right\} \times x \quad \begin{array}{l} + j^4 \\ + j^2k^3 \\ + j^2l^3 \\ + k^3l^3 \end{array}$$

Exemple ſur les incommenſurables complexes qui ont des incommenſurables parmi leurs termes.

469. Si l'on avoit $a\sqrt[n]{a+b}$ à multiplier par $b\sqrt[n]{c+d}$, il eſt évident * que le produit ſeroit $ab\sqrt[n]{ac+bc+ad+bd}$. D'où l'on voit que dans les incommenſurables complexes il faut multiplier, 1°, ce qui eſt hors du ſigne dans le multiplié par ce qui eſt hors du ſigne dans le multiplicateur, (ce qui donne ab,) 2°. ce qui eſt ſous le ſigne par ce qui eſt ſous le ſigne; & écrire pour le produit total $ab\sqrt[n]{ab+bc+ad+bd}$. Cela ſuffit pour faire concevoir la multiplication des incommenſurables complexes qui ont des incommenſurables parmi leurs termes : il faut ſeulement obſerver, 1°, qu'on multiplie à part les grandeurs commenſurables qui ſont hors du ſigne principal dans le multiplié & dans le multiplicateur; & dans le produit total on les écrit au devant du ſigne principal comme l'on le voit dans les exemples. * 431.

2°. Que dans les multiplications partiales on ne fait point d'attention au ſigne principal du multiplié & du multiplicateur (qui doit y avoir le même expoſant,) & l'on multiplie les grandeurs qui ſont ſous le ſigne principal du multiplié par les grandeurs qui ſont ſous le ſigne principal du multiplicateur, comme s'il n'y avoit point de ſigne principal dans l'un & dans l'autre; mais on a ſoin de remettre le ſigne principal dans le produit total.

3°. Que quand tous les termes de la grandeur complexe, qui eſt ſous le ſigne principal, ſont incommenſurables, comme dans $a\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{b}}$, le ſigne du terme le plus à gauche $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ n'influe point ſur le terme ſuivant, quand il n'y a pas de ligne tirée de ce ſigne pour couvrir le terme ſuivant à droite. Il en eſt de même dans $b\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{c}}$. Ainſi pour faire

les multiplications partiales de la 1re par la 2e, on multiplie d'abord $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{b}$ par $\sqrt[n]{a}$, & enſuite par $\sqrt[n]{c}$. Après avoir pris la ſomme de ces produits, on écrit au devant le ſigne principal, on tire une ligne qui couvre le produit total, & on écrit au devant du ſigne principal le produit ab des commenſurables.

4°. Enfin, quand on a formé le produit total, on le ré-
*464. duit * à ſa plus ſimple expreſſion, quand cela ſe peut, comme on le voit dans le 4e exemple.

EXEMPLES.

I.

$$\begin{array}{l} a\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{bc} \\ a\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{bc} \\ \hline a^2 \left\{ \begin{array}{l} ac + c\sqrt[3]{bc} \\ \quad - a\sqrt[3]{bc} - bc \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

Produit $a^2\sqrt[3]{ac - bc} - \sqrt{a+c} \times \sqrt[3]{bc}$

EXEMPLE II.

$$\begin{array}{l} a\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b^{n-3}} \\ b\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{b^3} \\ \hline ab \left\{ \begin{array}{l} a^n + a^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-3}} \\ \quad - a\sqrt[n]{b^3} - b \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

Produit $ab\sqrt[n]{a^n - b} + a^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-3}} - a\sqrt[n]{b^3}$

EXEMPLE III.

$$\begin{array}{l} a\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{b}} \\ b\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} + \sqrt[n]{c} \\ \hline ab \left\{ \begin{array}{l} a + \sqrt[n]{ab} \\ \quad + \sqrt[n]{a^{n-2}c} + \sqrt[n]{bc} \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

Produit $ab\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{a^{n-2}c} + \sqrt[n]{bc}}$

EXEMPLE

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2 b}} \\
\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3 c} + \sqrt[3]{a^2 d}} \\
\hline
\sqrt[3]{a^3 c} + \sqrt[3]{a^2 bc} \\
\quad + \sqrt[3]{a^3 d} + \sqrt[3]{a^2 bd} \\
\hline
\text{Produit } \sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{ac} + a^2 \sqrt[3]{bc} + a^2 \sqrt[3]{ad} + a^2 \sqrt[3]{bd}} = \\
= a \sqrt[3]{\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ad} + \sqrt[3]{bd}}
\end{array}$$

EXEMPLE V.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\
\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\
\hline
+ \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} \\
\quad + \frac{1}{2}q\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} + \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 \\
\hline
\text{Produit } \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{27}p^3 + q\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}
\end{array}$$

EXEMPLE VI.

Si on multiplie la grandeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$ par elle-même, on trouvera le même produit que dans le 5^e^ Exemple, avec cette seule difference qu'il y aura le signe — devant le terme incommensurable $q\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$.

EXEMPLE VII.

Si on multiplie $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$, qu'on nommera a; par $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$, qu'on nommera b; on trouvera que le produit ab sera $\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{3}p$; parceque toutes les autres grandeurs du produit se détruiront par des signes opposez + & —, & qu'il ne restera sous le signe $\sqrt[3]{}$ que la grandeur $\frac{1}{27}p^3$.

EXEMPLE VIII.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -p \\
+x\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}\cdot \\
+x\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}\cdot \\
-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
A & x^2+ax-p \\
 & \quad +bx+a^2 \\
 & \qquad +2ab \\
 & \qquad +b^2 \\
 & \\
B & x-a-b \\
\hline
C & x^3+-px+ap \\
 & \qquad +bp \\
 & \qquad -a^3 \\
 & \qquad -3a^2b \\
 & \qquad -3ab^2 \\
 & \qquad -b^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
C & x^3-px+q
\end{array}
$$

Si l'on propoſoit de multiplier la grandeur A par la grandeur B. on pourroit, pour abreger le calcul, ſuppoſer $a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$, & $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$, & l'on changeroit par ce moyen le multiplié A en A, & le multiplicateur B en B: faiſant la multiplication de A par B, on trouveroit le produit C; & ſubſtituant dans le dernier terme de C, les valeurs de $-a^3$, de $-b^3$, de $-3a^2b$, de $-3ab^2$, on le réduiroit à la ſeule grandeur $+q$, & le produit C deviendroit $C\ x^3-px+q$.

Car, 1°, il eſt évident que $a^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$, & que $b^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$; ainſi $-a^3 - b^3 = +\frac{1}{2}q + \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} + \frac{1}{2}q - \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} = +q$. 2°. Par le 7ᵉ exemple $ab = \frac{1}{3}p$; d'où l'on déduit $-3a \times ab = -ap$, & $-3ab \times b = -bp$; ainſi $+ap - 3a^2b = 0$, $+bp - 3ab^2 = 0$ & $-a^3 - b^3 = +q$.

REMARQUE.

IL eſt bon de remarquer les avantages que l'on tire pour la facilité du calcul, de la maniere d'abreger des expreſſions fort compoſées par d'autres plus ſimples, & même par une ſeule lettre, quand cela ſe peut, comme dans le 8ᵉ exemple.

PROBLÊME III.

470. *AYANT une fraction dont le dénominateur eſt une ſuite d'incommenſurables de tant de termes qu'on voudra, & dont le numerateur eſt une grandeur quelconque (on ſuppoſera ici, pour tourner toute l'attention des Commençans à ce qu'il y a de principal dans le Problême, que le numerateur eſt l'unité) la changer en une autre fraction équivalente dont le dénominateur ſoit une grandeur commenſurable; c'eſt à dire ôter toutes les incommenſurables du dénominateur; & trouver les formules propres à délivrer ainſi le dénominateur d'une fraction de toutes les incommenſurables qu'il peut contenir, ſans changer la valeur de la fraction. On ſuppoſera que tous les ſignes radicaux du dénominateur ont 2 pour expoſant.*

Remarques pour la réſolution du Problême.

PAR exemple, $\sqrt[2]{a + \sqrt[3]{b + \sqrt{c + \sqrt[3]{d + \sqrt{e + \&c.}}}}}$ peut repréſenter une des fractions de ce Problême; il s'agit de délivrer le dénominateur de cette fraction de toutes les incommenſurables qu'il contient, ſans changer la valeur de la fraction.

On remarquera, 1°, qu'en multipliant les deux termes d'une fraction par un même multiplicateur, * on n'en change point la valeur. 2°. qu'en multipliant une incommenſu- *75.

rable par elle-même, de façon qu'on éleve la grandeur qui eſt ſous le ſigne à la puiſſance dont l'expoſant eſt celui du ſigne, on la rend commenſurable; par exemple, $\sqrt[2]{a} \times \sqrt[2]{a} = a$. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$; & ainſi des autres. 3°. que dans la multiplication d'une grandeur complexe comme $a + b + c +$ &c. par la même grandeur, ſi l'on change ſeulement dans le multiplicateur le ſigne + ou — d'un ou de deux ou de pluſieurs termes, il arrive par là que l'on trouve des produits particuliers qui ſe détruiſent par des ſignes oppoſez + & —, & qu'il y a dans le produit total moins de termes qu'il n'y en auroit, ſi l'on n'avoit pas changé le ſigne + ou — de quelques-uns des termes. Ainſi $\overline{a+b} \times \overline{a-b} = a^2 - b^2$. 4°. qu'enfin, en prenant pour les exemples des fractions qui ayent pour dénominateurs des ſuites d'incommenſurables litterales, leſquels dénominateurs ayent d'abord deux termes, puis trois, après quatre, & ainſi de ſuite; on trouvera par le Problême des multiplicateurs en lettres propres à délivrer d'incommenſurables les dénominateurs des fractions qui auront deux termes, trois termes, quatre termes d'incommenſurables, & ainſi de ſuite; & que ces multiplicateurs exprimez par des lettres ſeront autant de *formules* pour délivrer d'incommenſurables les dénominateurs des fractions particulieres qui auront deux termes, trois termes, & ainſi de ſuite.

Réſolution du Problême. *Regle ou Operation*. 1°. Pour faciliter le calcul il faut repréſenter les incommenſurables du dénominateur chacune par une lettre ſans ſigne radical; par ex. $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{a+b+c+d}$, $\frac{1}{a+b+c+d+e}$, & ainſi de ſuite, repréſenteront les fractions dont le dénominateur a deux, trois, quatre, cinq incommenſurables, &c.

2°. Il faut operer par ordre, premierement, ſur la fraction de deux incommenſurables, puis ſur celle de trois, après ſur celle de quatre, & ainſi de ſuite; & chercher pour chacune le multiplicateur par lequel multipliant les deux termes de la fraction il vienne un produit du dénominateur où il n'y ait plus d'incommenſurables.

3°. Pour trouver ce multiplicateur il faut multiplier le ſeul dénominateur tel qu'il eſt par le dénominateur même, après

avoir changé le ſigne + ou — de l'un de ſes termes, quand il n'en a que deux ou trois ; on change les ſignes + ou — de deux de ſes termes, quand il a quatre ou cinq termes, & ainſi des autres. Cette premiere operation ſuffit quand le dénominateur n'a que deux termes ; mais quand le dénominateur en a un grand nombre, il faut abreger le produit qu'on vient de trouver, en exprimant par une ſeule lettre (élevée à la puiſſance du degré des dimenſions des termes du produit) tous les termes commenſurables du produit. Regardant ce produit comme s'il étoit le dénominateur qu'on doit délivrer d'incommenſurables, il faut le multiplier par lui-même après avoir changé le ſigne + ou — de quelques-uns des termes du multiplicateur, ce qui donnera un nouveau produit qu'on abregera comme le précedent, & qu'on multipliera de même par lui-même après avoir changé le ſigne + ou — de quelques-uns des termes du multiplicateur. Continuant ainſi d'operer, on arrivera enfin à un produit qui n'aura plus que des grandeurs commenſurables.

4°. On ſéparera du dernier produit commenſurable le dénominateur incommenſurable de la fraction donnée ; & ce qui demeurera après cette ſéparation ſera le multiplicateur qu'on cherchoit, par lequel multipliant les deux termes de la fraction donnée, on ôtera les incommenſurables de ſon dénominateur. Ce multiplicateur ſera *une formule* qui repréſentera le multiplicateur pour toutes les fractions particulieres dont le dénominateur aura le même nombre d'incommenſurables que la propoſée. Cela s'éclaircira par les exemples ſuivans.

EXEMPLES.

I.

POUR ôter les incommenſurables du dénominateur de la fraction $\frac{1}{\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2}}$.

1°. On ſuppoſera $\sqrt[2]{3} = a$, $\sqrt[2]{2} = b$, & l'on aura $\frac{1}{a+b}$ qui repréſentera toutes les fractions dont le dénominateur a deux incommenſurables.

2°. Il faut multiplier $a + b$ par $a - b$, & l'on aura le produit $a^2 - b^2$ où il n'y a plus d'incommenſurables.

Ainſi $a - b$ eſt la formule qui repréſente le multiplicateur qu'il faut prendre pour ôter les incommenſurables du dénominateur des fractions repréſentées par $\frac{1}{a+b}$. Elle fait voir, par exemple, que pour ôter les incommenſurables de $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}$, il faut multiplier les deux termes par $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, & l'on aura la fraction $\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{3 - 2 = 1}$ équivalente à la propoſée.

2.

Pour ôter les incommenſurables du dénominateur des fractions repréſentées par $\frac{1}{a+b+c}$; il faut multiplier $a + b + c$ par $a + b - c$, & l'on aura $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$. Il faut ſuppoſer (pour abreger) les commenſurables $a^2 + b^2 - c^2 = d^2$. Et le produit ſera $d^2 + 2ab$. Il faut le multiplier par $d^2 - 2ab$, & l'on aura le produit $d^4 - 4a^2b^2$ où il n'y a plus d'incommenſurables. En remettant dans ce produit la valeur de d^2, on aura $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$. On ſeparera de ce dernier produit le dénominateur $a + b + c$; ce qui ſe peut faire en prenant dans la ſuite des operations le produit $\overline{a + b - c} \times \overline{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab} = a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 - ac^2 + 2abc + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3$; ou bien en diviſant le dernier produit qui n'a plus d'incommenſurables $a^4 + b^4$ &c. par $a + b + c$, & le quotient $a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 - ac^2 + 2abc + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3$ ſera la formule du multiplicateur dont il faut ſe ſervir pour ôter les incommenſurables du dénominateur des fractions repréſentées par $\frac{1}{a+b+c}$, & le dénominateur délivré d'incommenſurables ſera repréſenté par $a^4 + b^4 +$ &c.

3.

Pour trouver le multiplicateur qui doit ſervir à ôter les incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b+c+d}$, il faut multiplier le dénominateur par $a + b - c - d$; & ſuppo-

ſant $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = e^2$, le produit ſera $e^2 + 2ab - 2cd$; il faut le multiplier par $-e^2 + 2ab - 2cd$, & ſuppoſant dans le produit les grandeurs commenſurables $-e^4 + 4a^2b^2 + 4c^2d^2 = f^4$, le produit ſera $f^4 - 8abcd$. Il faut le multiplier par $f^4 + 8abcd$, & l'on aura enfin le produit $f^8 - 64a^2b^2c^2d^2$, dans lequel il n'y a plus d'incommenſurables. Il ne faut plus que ſubſtituer dans ce produit la valeur de f^8, ſubſtituer dans ce qui en viendra la valeur des puiſſances de e, après ces ſubſtitutions ſéparer $a + b + c + d$ de ce produit, & l'on aura le multiplicateur qu'on cherchoit.

4.

On trouvera de même le multiplicateur qui doit ſervir à ôter les cinq incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b+c+d+e}$, en multipliant d'abord ce dénominateur par $a + b + c - d - e$, ce qui donnera $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - e^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 2de$. Ce produit (en ſuppoſant $f^4 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - e^2$ qui ſont commenſurables) deviendra $f^4 + 2ab + 2ac + 2bc - 2de$. On le multipliera par $-f^4 + 2ab + 2ac + 2bc + 2de$, & l'on trouvera (en ſuppoſant les grandeurs commenſurables $-f^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 4d^2e^2 = -g^4$) le produit $-g^4 + 4f^2de + 8abc \times \overline{a+b+c}$.

On remarquera ici qu'en joignant à ce produit celui-ci $-8abc \times \overline{a+b+c+d+e}$, le produit deviendra $-g^4 + 4f^2de - 8abc \times \overline{d+e}$ qui n'a plus que quatre termes dont trois ſont incommenſurables. Cela fait voir que pour arriver à un produit qui n'ait que quatre termes, il faut faire ainſi les multiplications : il faut multiplier le dénominateur propoſé $a + b + c + d + e$ par $\overline{a+b+c-d-e} \times -\overline{f^4 + 2ab + 2ac + 2bc + 2de}$, y joindre $\overline{a+b+c+d+e} \times -8abc$, & l'on arrivera au produit $-g^4 + 4f^2de - 8abc \times \overline{d+e}$ qui eſt égal au produit $-g^4 + 4f^2de + 8abc \times \overline{a+b+c} - 8abc \times \overline{a+b+c+d+e}$.

Pour continuer, il faut multiplier $-g^4 + 4f^2de - 8abc \times \overline{d+e}$ par $-g^4 + 4f^2de + 8abc \times \overline{d+e}$, & l'on trouvera

$g^8 + 16f^4d^2e^2 - 64a^2b^2c^2 \times \overline{d^2 + e^2} - 2 \times 4g^4f^2 \times de - 64a^2b^2c^2 \times 2de$. On ſuppoſera les grandeurs commenſurables $g^8 + 16f^4d^2e^2 - 64a^2b^2c^2 \times \overline{a^2 + e^2} = b^8$, & $- 2 \times 4g^4f^2 \times de - 64a^2b^2c^2 \times 2de$ pouvant ſe réduire à $+ \overline{g^4f^2 + 16a^2b^2c^2} \times - 8de$, on ſuppoſera (pour abreger le calcul) les grandeurs commenſurables $+ g^4f^2 + 16a^2b^2c^2 = l^6$, & le produit qu'on vient de trouver ſera $b^8 - 8l^6de$ qui n'a plus que deux termes, dont un ſeul eſt incommenſurable.

Enfin on multipliera $b^8 - 8l^6de$ par $b^8 + 8l^6de$, & l'on aura le produit $b^{16} - 64l^{12}d^2e^2$ qui n'a plus d'incommenſurables.

On ſeparera de ce produit le dénominateur $a + b + c + d + e$, en ſubſtituant les valeurs des puiſſances de f, de g, de b, & de l dans la ſuite des operations que voici marquées. $\overline{a + b + c + d + e} \times \overline{a + b + c - d - e} \times - \overline{f^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2de} - 8abc \times \overline{a + b + c + d + e}$ plus tout le produit précedent multiplié par $- g^4 + 4f^2de + 8abc \times \overline{d + e}$; plus tout le produit qui précede multiplié par $b^8 + 8l^6de$; & après les ſubſtitutions on ne commencera la ſuite de produits que par $\overline{a + b + c - d - e} \times - \overline{f^2 + 2ab}$ &c. & l'on aura le multiplicateur qu'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

ON a donné le ſigne + à tous les termes du dénominateur qui contient une ſuite d'incommenſurables; mais il eſt évident que la methode eſt la même quand les ſignes ſont —, ou mêlez de + & de —, & qu'on peut repréſenter tous les dénominateurs, qui ont une ſuite d'incommenſurables, par $a + b + c + d + e$ &c. en ſuppoſant que les ſignes + repréſentent les ſignes + ou — des dénominateurs particuliers; par exemple, $a + b + c$ peut repréſenter $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, en ſuppoſant que $+ b$ repréſente $- \sqrt[3]{3}$, & $+ c = - \sqrt[3]{2}$. Il faut ſeulement prendre garde dans les produits aux ſignes + ou — que doivent avoir les termes des produits par rapport à la ſuppoſition que $+ b + c$ repréſentent $- \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$.

2.

2.

On peut continuer d'appliquer la methode aux dénominateurs qui ont plus de cinq termes ; mais dans la pratique cela eſt aſſez inutile ; car ces cas là n'arrivent preſque jamais.

On verra, vers la fin du Problême ſuivant l'uſage de ce 3e Problême pour la diviſion des ſuites d'incommenſurables.

3.

471. On pourroit étendre la methode du 3e Problême à ôter les incommenſurables des fractions dont le dénominateur eſt une ſuite de termes incommenſurables, leſquels ont tous le ſigne $\sqrt{}$, ou $\sqrt[3]{}$, ou $\sqrt[4]{}$, &c.

Mais cela ne pouvant gueres être d'uſage que dans l'analyſe où ces cas là n'arrivent encore que très rarement, & l'analyſe elle-même fourniſſant des methodes plus aiſées que celles qu'on pourroit mettre ici, il ſuffira de donner la methode pour délivrer d'incommenſurables les dénominateurs des fractions, qui n'ont chacun que deux termes incommenſurables avec le ſigne $\sqrt{}$, ou $\sqrt[3]{}$, ou $\sqrt[4]{}$, &c.

Par exemple, pour trouver le multiplicateur qui doit ſervir à ôter les incommenſurables de $\frac{1}{a+b}$, en ſuppoſant que a & b repréſentent des incommenſurables avec le ſigne $\sqrt{}$; il faut multiplier $a+b$ par le multiplicateur $a-b$, non pas pris lineaire, mais élevé à la 2e puiſſance ; c'eſt à dire, il faut multiplier $a+b$ par $a^2-2ab+b^2$, & l'on aura le produit $a^3-a^2b-ab^2+b^3$.

On remarquera que ſi on ajoutoit le produit de $a+b$ par $+ab$, on auroit $a^3-a^2b-ab^2+b^3+a^2b+ab^2=a^3+b^3$ qui ne contient plus d'incommenſurables.

Cela fait voir que pour ôter les incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b}$, il faut ſe ſervir du multiplicateur a^2-ab+b^2, & que ce multiplicateur eſt la formule que l'on cherchoit. Par exemple, pour ôter les incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$, il faut ſuppoſer $a=\sqrt[3]{3}$, & $b=\sqrt[3]{2}$, & l'on aura $a^2-ab+b^2=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$. Il

faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$ par $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$, & l'on aura $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3+2=5}$.

Pour trouver le multiplicateur qui doit ſervir à ôter les incommenſurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b}$, en ſuppoſant que a & b repréſentent deux incommenſurables avec le ſigne $\sqrt{}$, il faut multiplier $a+b$ par le multiplicateur $a-b$ élevé à la 3e puiſſance; c'eſt à dire, par $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, & l'on trouvera le produit $a^4-2a^3b+2ab^3-b^4$.

On remarquera que lui ajoutant le produit $\overline{a+b}\times\overline{+2a^2b-2ab^2}=+2a^3b+2a^2b^2-2a^2b^2-2ab^3$, on aura le produit a^4-b^4 où il n'y a plus d'incommenſurables. Ce qui fait voir que le multiplicateur ou la formule qu'on cherche eſt $a^3-a^2b+ab^2-b^3$.

On trouvera de même que $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$; $a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5$, $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$; & ainſi de ſuite, ſont les formules des multiplicateurs qui doivent ſervir à délivrer d'incommenſurables le dénominateur de $\frac{1}{a+b}$, en ſuppoſant que $a+b$ repréſente ſucceſſivement deux incommenſurables avec le ſigne $\sqrt{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[7]{}$, &c.

4.

472. Quand les formules ſont trouvées, on peut, pour mieux repréſenter les incommenſurables, mettre les ſignes radicaux dans la fraction generale qui repréſente toutes les fractions particulieres dont les dénominateurs ont une ſuite d'incommenſurables, & marquer auſſi les ſignes radicaux devant les termes des formules. Par exemple, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ repréſentera toutes les fractions dont le dénominateur eſt de deux termes incommenſurables avec le ſigne $\sqrt[3]{}$, & $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ repréſentera la formule qui doit ſervir à ôter les incommenſurables du dénominateur de ces fractions: il en eſt de même des autres.

La démonſtration du 3ᵉ Problême eſt évidente par les operations mêmes que l'on a faites pour le réſoudre, & par les remarques qui ſervent de préparation à la réſolution.

La diviſion des ſuites d'incommenſurables.

PROBLÊME IV.

473. *DIVISER une ſuite d'incommenſurables ſoit par une grandeur commenſurable, ſoit par une autre ſuite d'incommenſurables : les expoſans des ſignes radicaux doivent être les mêmes dans le dividende & dans le diviſeur.*

Regle ou Operation. Il faut faire la diviſion comme celle des grandeurs litterales complexes, obſervant * la regle des ſignes + & — de la diviſion, & * les regles de la diviſion des incommenſurables qui n'ont qu'un ſigne radical, comme on le verra dans les exemples ſuivans. * 139. * 440.

EXEMPLES.

I.

Où le diviſeur eſt commenſurable.

Dividende $\overset{2}{\sqrt{}}8 + \overset{2}{\sqrt{}}48 - \overset{2}{\sqrt{}}50$ ($\frac{2 = \overset{2}{\sqrt{}}4}{\overset{2}{\sqrt{}}2 + \overset{2}{\sqrt{}}12 - \overset{2}{\sqrt{}}\frac{50}{4}}$ diviſeur. quotient.

Le même Exemple où les incommenſurables ſont réduites à leur plus ſimple expreſſion.

$2\overset{2}{\sqrt{}}2 + 4\overset{2}{\sqrt{}}3 - 5\overset{2}{\sqrt{}}2 = -3\overset{2}{\sqrt{}}2 + 4\overset{2}{\sqrt{}}3$ ($\frac{2 \quad \text{diviſeur.}}{-\frac{1}{2}\overset{2}{\sqrt{}}2 + \overset{2}{\sqrt{}}3}$ quot.

EXEMPLE II.

Où le diviſeur n'a qu'un ſeul terme, lequel eſt incommenſurable.

$3\overset{2}{\sqrt{}}15 - 2\overset{2}{\sqrt{}}17 + \overset{2}{\sqrt{}}35$ ($\frac{2\overset{2}{\sqrt{}}5}{\frac{1}{2}\overset{2}{\sqrt{}}3 - \sqrt{\frac{17}{5}} + \frac{1}{2}\overset{2}{\sqrt{}}7}$

EXEMPLE III.

$a\overset{2}{\sqrt{}}ab - \frac{a^2}{b}\overset{2}{\sqrt{}}bc - \frac{ac}{b}\overset{2}{\sqrt{}}cd$ ($\frac{a\overset{2}{\sqrt{}}b}{\overset{2}{\sqrt{}}a - \frac{a}{b}\overset{2}{\sqrt{}}c - \frac{c}{b}\overset{2}{\sqrt{}}\frac{cd}{b}}$.

Dans les Exemples ſuivans le diviſeur eſt une ſuite d'incommenſurables.

EXEMPLE IV.

$$4\sqrt[3]{12} - 16\sqrt[3]{30} + 6\sqrt[3]{18} - 6\sqrt[3]{14} + 24\sqrt[3]{35} - 9\sqrt[3]{21} \Big(\frac{2\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{7}}$$

EXEMPLE V.

$$a\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt[3]{b} + 3b\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} \Big\} \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a + 2\sqrt[3]{ab} + b}$$
$$+ 2a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{a}$$

Quand le dividende & le diviſeur contiennent des grandeurs incommenſurables litterales, il faut ordonner l'un & l'autre par rapport à une même lettre, écrivant pour premier terme celui qui contient la plus haute puiſſance de cette lettre, pour ſecond terme celui qui contient la puiſſance immédiatement moindre, & ainſi de ſuite : comme on le voit dans ce 5e Exemple.

Enſuite on dira le quotient de $a\sqrt[3]{a}$ diviſé par $\sqrt[3]{a}$ eſt a; il faut écrire a au quotient; écrire o ſous $a\sqrt[3]{a}$ dans le dividende; multiplier $+\sqrt[3]{b}$ par le quotient a; retrancher le produit $a\sqrt[3]{b}$ de $+3a\sqrt[3]{b}$, & écrire au deſſous le reſte $+2a\sqrt[3]{b}$, qu'il faut réduire à $+2\sqrt[3]{a^2b}$ afin de continuer la diviſion.

On dira enſuite le quotient de $+2a\sqrt[3]{b} = +2\sqrt[3]{a^2b}$ diviſé par $\sqrt[3]{a}$ eſt $+2\sqrt[3]{ab}$; il faut écrire $+2\sqrt[3]{ab}$ au quotient, marquer o au dividende ſous $+2a\sqrt[3]{b}$, multiplier $+\sqrt[3]{b}$ par $+2\sqrt[3]{ab}$, retrancher le produit $+2b\sqrt[3]{a}$ de $3b\sqrt[3]{a}$, & écrire le reſte $+b\sqrt[3]{a}$.

Enfin on dira le quotient de $+b\sqrt[3]{a}$ diviſé par $\sqrt[3]{a}$ eſt $+b$; il faut écrire $+b$ au quotient, marquer o au dividende ſous $+b\sqrt[3]{a}$, multiplier $+\sqrt[3]{b}$ par $+b$; retrancher le produit $+b\sqrt[3]{b}$ de $+b\sqrt[3]{b}$ dans le dividende; & comme il ne reſte rien, le quotient $a + 2\sqrt[3]{ab} + b$ eſt exact.

Voici l'exemple de la diviſion du même dividende par $a + 2\sqrt[3]{ab} + b$.

$$a\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt[3]{b} + 3b\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} \;\Big\}\; \frac{a + 2\sqrt[3]{ab} + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$$
$$+ a\sqrt[3]{b} + 2b\sqrt[3]{a}$$

REMARQUE.

474. QUE le dividende ait plusieurs termes incommensurables ou qu'il n'ait qu'un seul terme, & que ce seul terme soit commensurable ou incommensurable, cela ne met pas de difficulté à faire la division. Quand le diviseur n'a qu'un seul terme, que ce terme soit commensurable ou incommensurable, la division est toujours facile, & elle se fait exactement, comme on l'a vû dans les trois premiers exemples. Toute la difficulté de la division des suites d'incommensurables ne vient que de ce que le diviseur contient plusieurs termes incommensurables. Voici la methode pour faire ces divisions.

Methode pour la division des suites d'incommensurables quand le diviseur est une suite d'incommensurables.

475. IL faut regarder le dividende & le diviseur comme une fraction dont le premier est le numerateur, & le second le dénominateur : chercher * par le 3e Problême (qui n'est que pour ceci) le multiplicateur propre à délivrer d'incommensurables le dénominateur. Multiplier par ce multiplicateur le dividende & le diviseur, ce qui donnera une nouvelle fraction * égale à celle du dividende & du diviseur ; & son dénominateur étant commensurable, on fera la division de son numerateur par son dénominateur ; & le quotient sera évidemment celui que l'on cherche : car il aura * le même rapport à l'unité qu'a le dividende proposé au diviseur proposé. * 470. * 75. * 106.

Par exemple, s'il faut diviser $3\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{7}$ par $4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{2}$, on supposera la fraction $\frac{3\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{7}}{4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{2}}$, on multipliera les deux termes * par $4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2}$, & l'on trouvera * $\frac{12\sqrt[3]{15} - 9\sqrt[3]{10} + 16\sqrt[3]{21} - 12\sqrt[3]{14}}{30} = \frac{3\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{7}}{4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{2}}$: on * 470.

fera enſuite la diviſion, & le quotient qu'on cherche ſera en réduiſant les fractions aux moindres termes $\frac{2}{5}\sqrt{15} - \frac{1}{10}\sqrt[3]{10} + \frac{8}{15}\sqrt[3]{21} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{14}$.

S'il faut diviſer 12 par $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}$, on ſuppoſera $\frac{12}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}$, on multipliera les deux termes par $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}$, & l'on trouvera $\frac{12\sqrt[3]{7} + 12\sqrt[3]{3}}{4}$, on fera enſuite la diviſion, & le quotient qu'on cherche ſera $3\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{3}$.

De même pour diviſer $a - b$ par $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$, on ſuppoſera la fraction $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$; on multipliera les deux termes par $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, & l'on aura $\frac{\overline{a-b} \times \overline{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}}{a-b}$; on fera enſuite la diviſion, & le quotient qu'on cherche ſera $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire clairement concevoir la methode, & en même temps l'uſage du 3e Problême.

La Diviſion, lorſqu'il y a des incommenſurables imaginaires.

476. LA diviſion eſt ſemblable à celle des grandeurs complexes; *139. il y faut obſerver * la regle des ſignes + & — de la diviſion, *444. & ce qu'il y a de particulier * à la diviſion des imaginaires. Il ſuffira d'en mettre ici des exemples où l'on diſtinguera par une ligne ponctuée le dividende d'avec les reſtes particuliers que l'on ajoute au dividende dans la pratique de la diviſion.

EXEMPLE I.

$x^4 - 2j^2x^2 + 2jk^2x + j^4$ | $x - j - \sqrt[3]{-k^2}$ diviſeur.

$+ k^2x^2 - 2jl^2x + j^2k^2$ | $x^3 + jx^2 - j^2x - j^3$ quot

$+ l^2x^2 + j^2l^2$ | $+ x^2\sqrt[3]{-k^2} + 2jx\sqrt[3]{-k^2} + j^2\sqrt[3]{-k^2}$

$+ k^2l^2$ | $+ l^2x + jl^2$

$+ l^2\sqrt[3]{-k^2}$

$- j^2x^2 - j^3x + j^3\sqrt[3]{-k^2}$

$\sqrt[3]{-k^2} + 2jx^2\sqrt[3]{-k^2} + j^2x\sqrt[3]{-k^2} + jl^2\sqrt[3]{-k^2}$

$- jl^2x$

$+ l^2x\sqrt[3]{-k^2}$

EXEMPLE II.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + jx^2 \quad -j^2x \quad -j^3 \\ \text{divi-} \\ \text{dende.} \quad + x^2\sqrt[2]{-k^2} + 2jx\sqrt[2]{-k^2} + j^2\sqrt[2]{-k^2} \\ \qquad\qquad + l^2x \quad -jl^2 \\ \qquad\qquad\qquad + l^2\sqrt[2]{-k^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + x\sqrt[2]{-k^2} - j^2 \quad \text{diviſeur.} \\ \hline x + j + \sqrt[2]{-l^2} \quad \text{quotient.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + x^2\sqrt[2]{-l^2} + jx\sqrt[2]{-k^2} \quad -j^2\sqrt[2]{-l^2} \\ \qquad\qquad - jx\sqrt[2]{-l^2} \quad -j\sqrt[2]{-k^2}\times\sqrt[2]{-l^2} \\ \qquad\qquad + x\sqrt[2]{-k^2}\times\sqrt[2]{-l^2} \end{array}$$

EXEMPLE III.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x\sqrt[2]{-k^2} - j^2 \\ \text{divi-} \\ \text{dende.} \quad - x\sqrt[2]{-l^2} + j\sqrt[2]{-k^2} \\ \qquad\qquad + j\sqrt[2]{-l^2} \\ \qquad\qquad - \sqrt[2]{-k^2}\times\sqrt[2]{-l^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - j + \sqrt[2]{-k^2} \quad \text{diviſeur.} \\ \hline x + j - \sqrt[2]{-l^2} \quad \text{quotient.} \end{array}$$

$$+ jx$$

La Diviſion des incommenſurables complexes qui ont des incommenſurables parmi leurs termes.

477. POUR diviſer une incommenſurable complexe $ab\sqrt[n]{ac + ad + bc + bd}$ *441. par une autre $a\sqrt[n]{a + b}$; il eſt évident * qu'il faut diviſer, 1°, la grandeur ab qui eſt hors du ſigne par a qui eſt hors du ſigne, ce qui donne le quotient b; 2°, diviſer la grandeur $ac + ad + bc + bd$ qui eſt ſous le ſigne par $a + b$, ce qui donne le quotient $c + d$; 3°, & écrire pour quotient $b\sqrt[n]{c + d}$. Lorſque les incommenſurables complexes contiennent ſous le ſigne des incommenſurables parmi leurs

termes, la diviſion ſe doit faire de la même maniere, en obſervant ce qui eſt de particulier * dans la diviſion d'une incommenſurable par une autre grandeur commenſurable, ou incommenſurable.

* 440. & les art. ſuivans.

EXEMPLE I.

PAR exemple, ſi l'on propoſe de faire la diviſion de $a^2\sqrt[3]{ac - a\sqrt[3]{bc} - bc + c\sqrt[3]{bc}}$ par $a\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{bc}}$; on diviſera, 1°, a^2 par a, & l'on aura le quotient a; 2°, on diviſera $ac - a\sqrt[3]{bc} - bc + c\sqrt[3]{bc}$ par $a + \sqrt[3]{bc}$, & l'on trouvera le quotient $c - \sqrt[3]{bc}$; 3°, il faut écrire pour le quotient qu'on cherche $a\sqrt[3]{c - \sqrt[3]{bc}}$.

EXEMPLE II.

ON trouvera de la même maniere, en diviſant $ab\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{a^{n-1}c} + \sqrt[n]{bc}}$ par $a\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{b}}$ que le quotient eſt $b\sqrt[n]{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{c}}$.

EXEMPLE III.

SI l'on vouloit diviſer la grandeur (C.) $x^3 - px + q$ par la grandeur (B) $x - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[2]{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$. Pour abreger le calcul on ſuppoſeroit l'incommenſurable complexe $F = a$, & l'incommenſurable complexe $G = b$, & l'on changeroit par ce moyen le diviſeur B en $B \cdot x - a - b$.

dividende (C) $x^3 - px + q$

$+ ax^2 + a^2x - ap$

$+ bx^2 + 2abx - bp$

$+ b^2x + a^3$

$+ 3a^2b$

$+ 3ab^2$

$+ b^3$

(B.) $x - a - b$ diviſeur.

(A.) $x^2 + ax - p$ quotient.

$+ bx + a^2$

$+ 2ab$

$+ b^2$

On feroit enſuite la diviſion, & l'on trouveroit le quotient

tient A, & le reſte $+q - ap - bp + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

En ſubſtituant dans ce reſte les valeurs de $a^3 + b^3 = -q$, comme on l'a fait voir dans le 8e Exemple de l'article 469, & les valeurs de $+3a^2b + 3ab^2 = +ap + bp$, comme on l'a montré dans le même endroit ; tout ce reſte entier ſe trouveroit égal à zero, toutes les grandeurs dont il eſt compoſé ſe détruiſant par des ſignes + & − oppoſez, aprés les ſubſtitutions. Ainſi on trouveroit que le quotient A eſt exact.

On ſubſtitueroit enſuite dans ce quotient les valeurs de a, de b, & celles de a^2, de $2ab$ & de b^2, ces dernieres ont été priſes pour les Exemples 5e, 6e & 7e de l'article 469. Et après ces ſubſtitutions les quotient A ſe trouveroit changé en la grandeur A du 8e Exemple de l'article 469 ; & cette grandeur A ſeroit le quotient qu'on vouloit trouver de la grandeur C diviſée par la grandeur B.

La formation des puiſſances des ſuites d'incommenſurables & des incommenſurables complexes qui ont des incommenſurables parmi leurs termes.

478. LA formation des puiſſances de toutes les grandeurs, & par conſequent de toutes les grandeurs incommenſurables, * ſe fait par la multiplication réïterée de la grandeur qu'on veut élever à une puiſſance dont l'expoſant eſt donné. On peut auſſi ſe ſervir des formules des puiſſances de l'art. 160, comme on l'a enſeigné dans les articles 171 & les ſuivans. C'eſt pourquoi les Commençans pourront eux-mêmes élever telle ſuite d'incommenſurables qu'ils voudront, & telles incommenſurables complexes qui ont des incommenſurables parmi leurs termes, qui pourront ſe préſenter, à une puiſſance donnée quelconque ; puiſqu'il ne faut employer que la multiplication de ces ſortes de grandeurs, qu'on leur a enſeignée. Il eſt inutile de groſſir ce Traité des ces calculs qui ne leur apprendroient rien de nouveau. * 143 & 159.

Remarque ſur l'extraction des racines des ſuites d'incommenſurables.

479. L'EXTRACTION des racines des ſuites d'incommenſurables n'eſt gueres d'uſage que dans l'analyſe. Cette ſcience fournit une methode facile & generale pour faire l'extraction des racines de telle ſuite qu'on voudra d'incommenſurables.

On trouvera cette methode expliquée *dans la derniere Section du cinquiéme Livre de l'Analyſe démontrée, page* 257. On ne ſçauroit donner ici que des methodes particulieres pour les ſuites de deux termes incommenſurables, de trois termes, de quatre termes, &c. Ces methodes ſeroient même difficiles à démontrer ſans ſe ſervir de l'analyſe. On a cru qu'il ſeroit inutile d'en prolonger ce Traité. On ſe contentera de mettre la methode pour extraire la racine quarrée des binomes, comme de $5 + 2\sqrt{6}$, dont les ſignes radicaux ont pour expoſant 2. Voici le principe de cette methode.

480. Si l'on éleve un binome $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ à la 2e puiſſance, on trouvera le binome $a + b + 2\sqrt{ab}$. Cela fait voir que dans toute ſeconde puiſſance d'un binome, laquelle n'a auſſi que deux termes, l'un des termes $a + b$ eſt la ſomme des quarrez des deux termes du binome qui en eſt la racine, & que l'autre terme $2\sqrt{ab}$ eſt le double du produit des deux termes $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ du binome qui en eſt la racine.

Mais les quarrez $a + b$ des deux termes de la racine $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ qui paroiſſent diſtinguez dans le quarré $a + b + 2\sqrt{ab}$, ſont d'ordinaire confondus enſemble, comme dans $5 + 2\sqrt{6}$ qui eſt le quarré de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. C'eſt pourquoi la formule $a + b + 2\sqrt{ab}$ ne peut pas ſuffire telle qu'elle eſt pour donner une regle generale de l'extraction des racines 2es des binomes. Voici ce qu'il y faut ajouter.

Si l'on prend le quarré $a^2 + 2ab + b^2$ du premier terme $a + b$, & qu'on en ôte le quarré $4ab$ du ſecond terme $2\sqrt{ab}$, on aura $a^2 - 2ab + b^2$ qui eſt le quarré de $a - b$ difference des quarrez a & b des deux termes $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ de la racine.

Si lon prend $a - b$ racine 2e de $a^2 - 2ab + b^2$, & que, 1°, on l'ajoute au 1er terme $a + b$ du binome $a + b + 2\sqrt{ab}$, on trouvera $2a$, dont la moitie a ſera le quarré du 1er terme de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 2°. Si l'on retranche $a - b$ de $a + b$. l'on trouvera $2b$, dont la moitie b ſera le quarré du ſecond terme $\sqrt{b}$ de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

On déduit de-là cette *regle pour l'extraction de la racine quarrée des binomes*.

481. Pour tirer la racine quarrée d'un binome comme $7 + \sqrt{48}$; 1°, il faut ôter le quarré du moindre terme du quarré du plus grand terme, & prendre la racine quarrée du reſte. (Dans cet exemple il faut ôter 48 quarré de $\sqrt{48}$ du quarré 49 du plus grand terme 7, & prendre 1 qui eſt la racine quarrée du reſte 1.)

2°. Il faut ajouter cette racine 2e du reſte au plus grand terme, ce qui donnera une ſomme, & retrancher cette même racine du même plus grand terme, ce qui donnera un reſte. (Dans cet exemple il faut ajouter 1 à 7, & la ſomme ſera 8, & retrancher 1 de 7, & le reſte ſera 6.)

3°. Il faut prendre ſéparément la racine 2e de la moitié de la ſomme & de la moitié du reſte, & faire un binome de ces deux racines, en les joignant avec le même ſigne + ou — qui joint les deux termes du binome dont on cherche la racine; ce binome ſera la racine qu'on demande. (Dans cet exemple on prendra 2 racine 2e de 4 moitié de la ſomme 8, & $\sqrt[2]{3}$ racine 2e de 3 moitié du reſte 6; & l'on aura $2 + \sqrt[2]{3}$ pour la racine 2e de $7 + \sqrt[2]{48}$)

EXEMPLES.

POUR tirer la racine quarrée de $y + a - 2\sqrt[2]{ay}$, 1°, on ôtera de $y^2 + 2ay + a^2$ quarré du 1er terme $y + a$, le quarré $4ay$ du ſecond terme $- 2\sqrt[2]{ay}$; & l'on trouvera le reſte $y^2 - 2ay + a^2$, on prendra $y - a$ racine 2e du reſte $y^2 - 2ay + a^2$. 2°. On ajoutera $y - a$ à $y + a$, & la ſomme ſera $2y$, ſa moitié ſera y. On ôtera $y - a$ de $y + a$; le reſte ſera $+ 2a$, ſa moitié a. 3°. L'on prendra les racines $\sqrt[2]{y}$, $\sqrt[2]{a}$ de ces moitiez, & l'on écrira $\sqrt[2]{y} - \sqrt[2]{a}$ pour la racine que l'on cherche.

Pour trouver la racine quarrée de $m^2 + \frac{px^2}{m} + x\sqrt{4pm}$, 1°, on ôtera $4pmx^2$ de $m^4 + 2mpx^2 + \frac{p^2x^4}{m^2}$, & l'on prendra $m^2 - \frac{px^2}{m}$ racine 2e du reſte. 2°. On ajoutera $m^2 - \frac{px^2}{m}$ à $m^2 + \frac{px^2}{m}$, & on l'en retranchera; m^2 ſera la moitié de la ſomme, & $\frac{px^2}{m}$ la moitié du reſte. 3°. On prendra les racines 2es de ces moitiez, & on les écrira ainſi $m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$. Ce ſera la racine qu'on cherchoit.

Pour extraire la racine 2e de $-1 + \sqrt[2]{-8}$, 1°, on ôtera -8 quarré de $+\sqrt[2]{-8}$ de $+1$ quarré de -1, ce qui donnera $+9$, dont on prendra la racine 2e qui eſt $+3$. 2°. On ajoutera $+3$ au terme -1, & la ſomme ſera $+2$, ſa moitié eſt $+1$. On ôtera $+3$ du même terme -1, & l'on aura -4, ſa moitié eſt -2. 3°. On prendra les racines 2es de ces moitiez; ces racines ſont $+1$, $\sqrt[2]{-2}$, & l'on aura $+1 + \sqrt[2]{-2}$ pour la racine qu'on cherche.

Pour avoir la racine 2e de $4\sqrt[2]{2} - 2\sqrt[2]{6}$, 1°, on ôtera 24

quarré de $-2\sqrt[3]{6}$, de 32 quarré de $4\sqrt[3]{2}$, & le reſte ſera 8; on en prendra la racine 2e qui eſt $2\sqrt[3]{2}$. 2°. On ajoutera cette racine à $4\sqrt[3]{2}$, la ſomme ſera $6\sqrt[3]{2}$, ſa moitié ſera $3\sqrt[3]{2}$. On ôtera cette même racine $2\sqrt[3]{2}$, de $4\sqrt[3]{2}$, le reſte ſera $2\sqrt[3]{2}$, ſa moitié ſera $1\sqrt[3]{2}$. 3°. On prendra les racines 2es de ces moitiez; ces racines ſont $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{1\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. On écrira $\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{2}$ pour la racine qu'on cherche.

On peut par la même regle trouver la racine d'un quadrinome comme $\sqrt{10 + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{40 + \sqrt[3]{60}}}$, (ou en le réduiſant à la plus ſimple expreſſion) de $\sqrt{10 + 2\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{10 + 2\sqrt[3]{15}}}$, en le conſiderant comme un binome, dont on diſtinguera les deux termes par une ligne ſur chacun. 1°. On ôtera le quarré du ſecond terme $2\sqrt[3]{10 + 2\sqrt[3]{15}}$ qui eſt (en le réduiſant à ſa plus ſimple expreſſion) $100 + 40\sqrt[3]{6}$, du quarré du premier terme $10 + 2\sqrt[3]{6}$ qui eſt $124 + 40\sqrt[3]{6}$, ce qui donnera 24, dont on prendra la racine 2e qui eſt $2\sqrt[3]{6}$. 2°. On ajoutera $2\sqrt[3]{6}$ au premier terme $10 + 2\sqrt[3]{6}$; la ſomme ſera $10 + 4\sqrt[3]{6}$, ſa moitié ſera $5 + 2\sqrt[3]{6}$. On ôtera $2\sqrt[3]{6}$ du même premier terme; le reſte ſera 10, ſa moitié ſera 5. 3°. On prendra les racines 2es de ces moitiez, & l'on trouvera par la regle des
* 481. binomes * que $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ eſt la racine 2e de $5 + 2\sqrt[3]{6}$, & la racine 2e de 5 eſt $\sqrt[3]{5}$. On écrira $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ pour la racine 2e du quadrinome propoſé.

REMARQUE.

482. QUAND on ne peut pas trouver par la regle la racine quarrée d'un binome, ou quand on trouve pour cette racine une expreſſion plus compoſée que n'eſt le binome propoſé, on ſe contente d'écrire $\sqrt{}$ au devant du binome pour marquer la racine 2e de ce binome. Par exemple, pour extraire la racine 2e de $+\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - p}$, il ſuffit d'écrire $\sqrt{\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - p}}$.

La démonſtration de la regle eſt clairement contenue dans
* 480. le principe * dont on l'a déduite.

TABLE DES SECTIONS.

LIVRE I.

Du Calcul des grandeurs entieres.

SECTION I. *Des noms des principales Propoſitions dont on ſe ſert dans les Mathematiques, les Axiomes generaux de ces Sciences, dont on déduira les premieres Regles du Calcul, & enfin la diviſion de ce Traité.* Page 1

SECT. II. *De l'Addition & de la Souſtraction des grandeurs entieres.* 37

SECT. III. *De la Multiplication des grandeurs entieres.* 50

SECT. IV. *De la Diviſion des grandeurs entieres.* 79

SECT. V. *De la compoſition ou de la formation des Puiſſances des grandeurs entieres,* 125

SECT. VI. *De la réſolution des Puiſſances numeriques & litterales, ce qu'on nomme auſſi l'extraction des racines.* 166

LIVRE II.

Du Calcul des grandeurs rompues, qu'on nomme auſſi fractions : des comparaiſons des rapports ſimples ; des rapports compoſez ; & du calcul des grandeurs incommenſurables.

SECTION I. *Des grandeurs ſimples ou premieres, & des grandeurs compoſées ; la methode de trouver le plus grand diviſeur commun à deux & à pluſieurs grandeurs, & la methode de trouver tous les diviſeurs d'une grandeur compoſée.* 215

SECT. II. *Des réductions des grandeurs rompues.* 253

SECT. III. *De l'Addition, Souſtraction, Multiplication,*

Diviſion des fractions, de la formation de leurs puiſſances, & de l'extraction de leurs racines. 274

SECT. IV. *Sur les comparaiſons des rapports geometriques, où ſont expliquées les proportions des grandeurs en general.* 315

SECT. V. *Des rapports compoſez.* 338

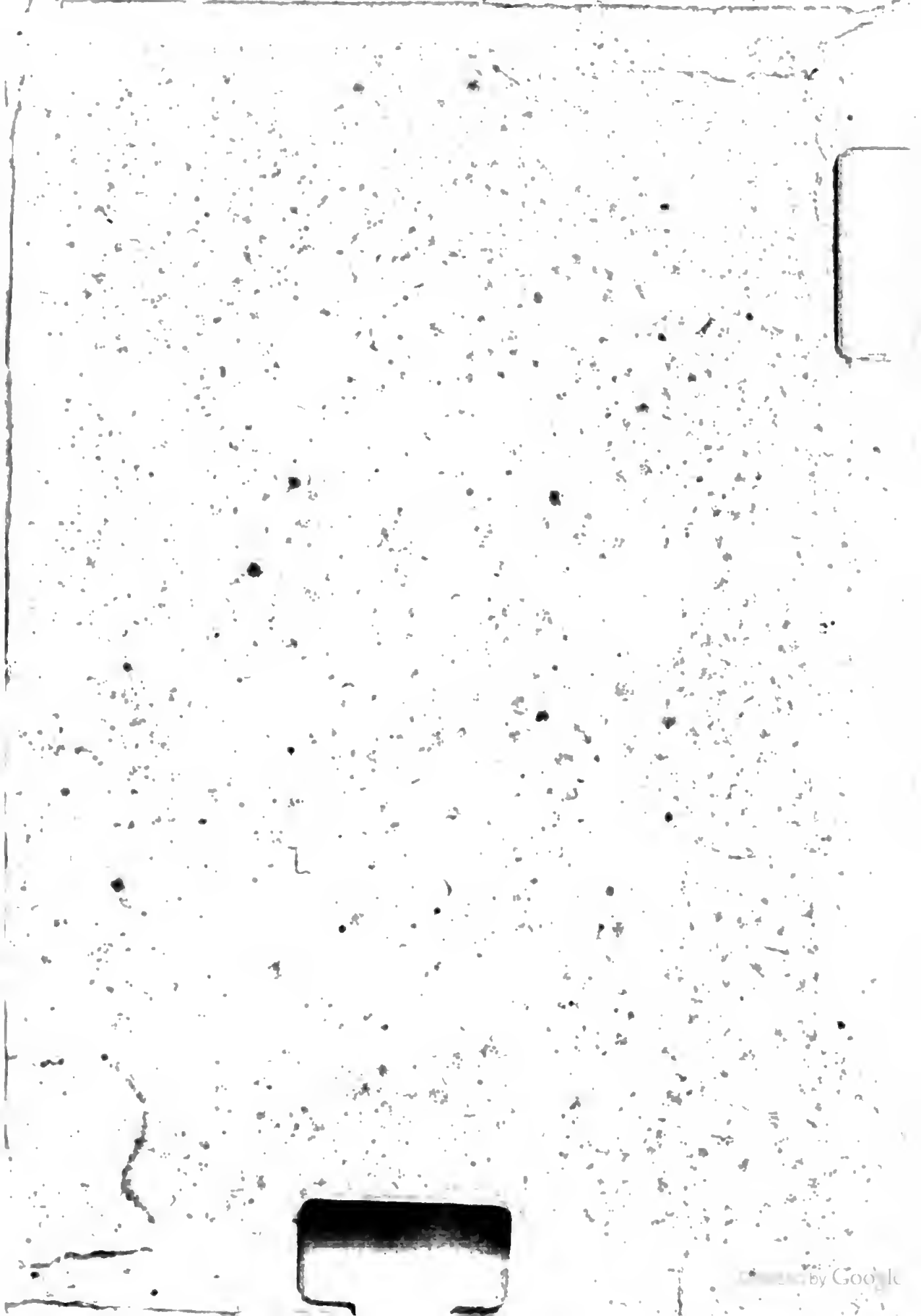
SECT. VI. *Du calcul des incommenſurables ſimples, ou qui n'ont qu'un ſigne radical.* 372

SECT. VII. *Du calcul des ſuites d'incommenſurables.* 410

Fin de la Table.

S 6N
C08893

Bibliotheca Nazionale Napoli

Digitized by Google

Digitized by Google